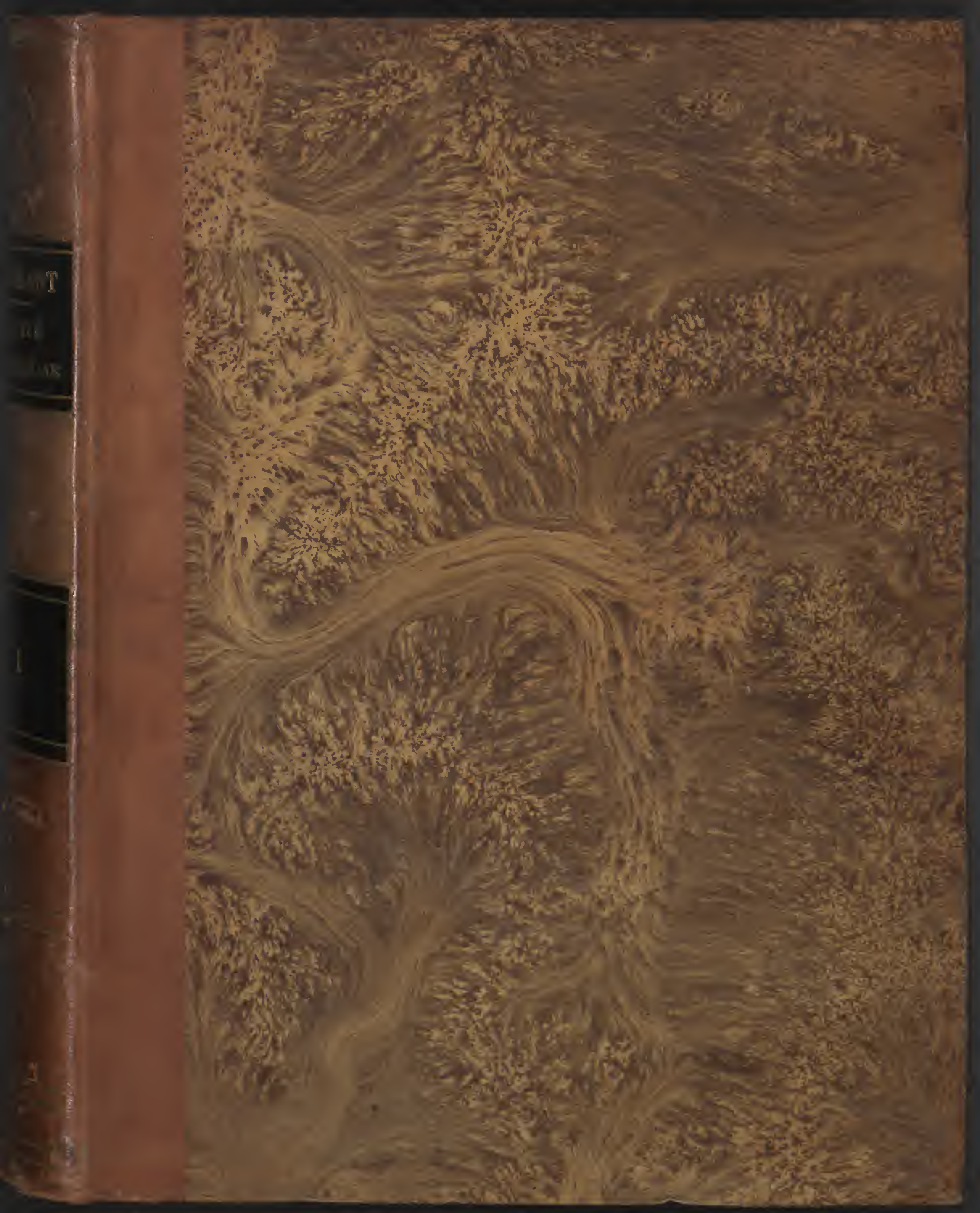


TRAITÉ
DE GÉODÉSIE.

CET OUVRAGE SE TROUVE AUSSI :

à Toulouse............ chez CHARPENTIER.

LEIPSICK, chez MICHELSEN.

LONDRES, chez DULAU et Cie.

Genève.............	chez	CHERBULIEZ.
Pétersbourg.........	—	GRAFF.
Turin..............	—	BOCCA. PIC.
Vienne..............	—	ROHRMANN.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

TRAITÉ
DE GÉODÉSIE,

OU

EXPOSITION

DES MÉTHODES TRIGONOMÉTRIQUES ET ASTRONOMIQUES,

APPLICABLES

A LA MESURE DE LA TERRE ET A LA CONSTRUCTION DU CANEVAS DES CARTES TOPOGRAPHIQUES;

PAR L. PUISSANT,

Colonel d'État-Major en retraite, chef de la première section du Dépôt général de la Guerre,
membre de l'Académie des Sciences de l'Institut de France;
de celle des Sciences et Lettres de Palerme; de l'Académie des Sciences militaires en Suède, etc.

TROISIÈME ÉDITION.

TOME PREMIER.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1842

AVANT-PROPOS.

TROISIÈME ÉDITION.

La topographie d'un grand État, fondée sur des procédés trigonométriques et astronomiques, remonte à l'époque où l'illustre Cassini de Thury conçut et exécuta le vaste projet d'une carte de la France; et cette œuvre monumentale, qui mérite encore à beaucoup de titres l'estime dont elle jouit généralement, a servi pendant longtemps de modèle aux autres nations. Mais l'opération à jamais mémorable qui a été exécutée de nos jours par deux de nos astronomes célèbres, pour la détermination de l'unité fondamentale de notre système des poids et mesures, est surtout remarquable par l'emploi des méthodes particulières d'observation et de calcul qui ont singulièrement contribué au perfectionnement de la science géodésique, et influé même sur les progrès de la topographie. Cette heureuse révolution, suite naturelle de l'invention du cercle répétiteur par Borda, et de son application à la mesure d'un grand arc de méridien, s'est propagée dans toute l'Europe savante, et a déjà pénétré dans les autres parties du monde civilisé.

Quoique le ci-devant corps des Ingénieurs-géographes militaires eût exploré géodésiquement, au commencement de ce siècle, les contrées alors soumises à la domination française, et qu'il eût formé une des plus intéressantes collections de cartes qui existent, cependant le Dépôt général de la Guerre, pour accroître ses richesses en ce genre et utiliser pendant les loisirs de la paix l'expérience de ces ingénieurs, méditait depuis 1812 le projet d'une nouvelle description géométrique du royaume qui répondît aux besoins des différents services publics, et qui eût pour fondement la méridienne de Dunkerque mesurée par Delambre et Méchain. Il avait en conséquence signalé plusieurs fois au Gouvernement l'insuffisance et les imperfections de la carte de Cassini, considérée principalement dans ses détails et dans la configuration du sol; et lorsque ses propositions furent en partie accueillies, il fit commencer, sous les

auspices du Bureau des Longitudes, quelques opérations préliminaires sur le parallèle de Strasbourg, ainsi que sur celui qui lie le Mont-Blanc à la méridienne dont il s'agit. Mais il appartenait à l'illustre auteur de la *Mécanique céleste* de fixer définitivement l'attention de l'autorité supérieure sur cet objet (*), de faire acquérir à la Géodésie un degré d'intérêt qu'elle n'avait pas encore eu.

Le désir bien naturel de profiter d'une circonstance aussi favorable pour répandre la connaissance des principes de cette science parmi de jeunes officiers qui devaient être appelés à coopérer à une nouvelle triangulation générale du royaume, me fit naître l'idée de refondre en entier mon *Traité de Géodésie* (1[re] édition de 1805), afin d'en mieux coordonner toutes les parties, et de le rendre plus méthodique et plus complet. Depuis lors mes leçons à l'École d'application des Ingénieurs-Géographes et mes fonctions au Dépôt de la Guerre m'ont mis à même de faire un grand nombre d'observations utiles, d'approfondir divers points importants de la science, et de remplir avec plus de succès que je n'aurais pu le faire sans cela, le cadre étendu que je me suis tracé. Néanmoins l'*Exposition du Système du Monde*, la *Mécanique céleste*, les ouvrages de Delambre, les Mémoires de Legendre sur plusieurs questions de haute Géodésie, ceux de Poisson sur la théorie du pendule composé, etc., m'ont procuré les matériaux les plus précieux et facilité les moyens de réunir en corps de doctrine, et sous un point de vue nouveau, tout ce qui constitue la partie la plus essentielle de la science de l'Ingénieur-Géographe et doit être la base d'un cadastre général.

En faisant presque exclusivement usage de l'analyse dans la recherche des formules géodésiques et astronomiques, j'ai tâché de l'appliquer avec simplicité et élégance, et de la délivrer du reproche qu'elle s'attire quelquefois de prendre les choses de trop haut. Enfin, pour guider le calculateur qui pourrait n'être pas familiarisé avec l'emploi des logarithmes et l'application des formules algébriques, ou qui aurait oublié la théorie, je me suis principalement attaché à présenter avec clarté les types de toutes les opérations les plus impor-

---

(*) Opinion de M. Laplace sur le projet de loi relatif aux finances, séance de la Chambre des Pairs du 21 mars 1817.

tantes et les plus usuelles, et à les accompagner de Tables qui abrégent considérablement les calculs.

Cet ouvrage est divisé en six livres: le premier renferme des notions de la sphère et du mouvement des corps célestes, et sert d'introduction à ceux des livres suivants qui ont pour objet l'application de l'Astronomie à la Géodésie.

Le second livre rappelle les principes généraux de la résolution des triangles rectilignes et des triangles sphériques, et fait connaître les moyens de substituer, dans quelques cas particuliers, aux formules rigoureuses et finies, des séries convergentes et quelquefois régulières, à l'aide desquelles les résultats numériques deviennent plus indépendants de l'erreur des Tables de logarithmes, qui n'ont, comme on sait, qu'une exactitude limitée.

Le troisième livre concerne les opérations et calculs géodésiques, c'est-à-dire la mesure des angles et des bases; l'évaluation des distances ou des côtés d'un réseau de triangles; la détermination des latitudes, longitudes et azimuts de leurs sommets; celle des différences de niveau de ces mêmes points et de leurs hauteurs au-dessus du niveau moyen des mers; la rectification des arcs de méridiens et de parallèles, et l'évaluation des grandes surfaces. Tous ces calculs sont fondés sur ce que la théorie et l'expérience m'ont offert à la fois de plus exact et de plus simple. Quant à la théorie des projections des cartes et à l'usage des instruments de réflexion, je me suis décidé, comme de coutume, à n'en parler que dans le *Traité de Topographie, d'Arpentage et de nivellement.*

Les quatrième et cinquième livres sont consacrés à l'exposition des méthodes d'observation et de calculs astronomiques en usage en Géodésie. Ils comprennent la mesure du temps, celle des latitudes géographiques, l'orientation des triangles, et la détermination des longitudes terrestres par les formules analytiques que Lagrange avait proposées pour calculer les éclipses de Soleil et les occultations d'étoiles par la Lune; mais ce n'est qu'après leur avoir fait subir des transformations qui les rendent beaucoup plus propres aux opérations numériques, que je suis parvenu le premier à les appliquer facilement à des exemples. Néanmoins je ne me suis pas cru dispensé d'expliquer les méthodes élémentaires par lesquelles on arrive au même but, sinon avec plus de promptitude, du moins avec le même degré de précision.

Enfin le sixième livre contient l'analyse des triangles sphéroïdiques, que j'ai simplifiée à certains égards, et la recherche de la véritable figure de la Terre, soit par les mesures géodésiques les plus accréditées, soit au moyen des longueurs du pendule à secondes qui inspirent le plus de confiance. J'y ai inséré, avec de nouveaux développements, le *Supplément* publié en 1827, et donnant deux méthodes fort simples, l'une pour déterminer les dimensions de l'ellipsoïde osculateur en un point quelconque de la surface du globe, au moyen de ses deux lignes de courbure, l'autre pour démêler dans les discordances qui se manifestent entre les résultats géodésiques et astronomiques correspondants, ce qui peut être dû aux inégalités de cette surface. Ce livre est terminé par la mesure des hauteurs à l'aide du baromètre.

Parmi les nombreuses additions que j'ai faites à cet ouvrage, pour suppléer à ce qui manquait dans la 2e édition, les plus notables ont rapport aux applications du calcul des probabilités aux opérations géodésiques; à une nouvelle évaluation numérique de la longueur de l'arc du méridien mesuré par MM. Biot et Arago, et compris entre les parallèles de Montjouy et de Formentera; à la recherche de l'expression théorique du coefficient de la réfraction terrestre; au calcul des hauteurs relatives déduites de distances zénithales et de mesures barométriques contemporaines; à la détermination des longitudes par les observations des passages de la Lune à différents méridiens, et par la méthode des feux successifs; enfin aux corrections et réductions à appliquer aux longueurs du pendule invariable avant de les employer à la vérification de la loi du décroissement de la pesanteur à la surface de la Terre.

Telles sont les principales matières que renferme cette *troisième édition*, et qui ont été, pour la plupart, le sujet de mes cours au Dépôt de la Guerre : elles montrent à quel degré j'y avais porté l'enseignement de la Géodésie, science dont le corps des Ingénieurs-Géographes, durant sa trop courte existence, a fait de si belles et utiles applications, qui est admise dans les *Programmes* de l'École Polytechnique, et dont l'étude particulière est devenue un des besoins de l'époque actuelle.

TABLE DES CHAPITRES

DU TOME PREMIER.

LIVRE PREMIER.

NOTIONS DE LA SPHÈRE ET DU MOUVEMENT DES CORPS CÉLESTES.

LIVRE II.

ANALYSE DES DEUX TRIGONOMÉTRIES.

LIVRE III.

OPÉRATIONS ET CALCULS GÉODÉSIQUES.

FIN DE LA TABLE DES CHAPITRES DU TOME PREMIER.

ERRATA.

Page 22, ligne 5 en remontant; de la Terre, *lisez* du Soleil vu de la Terre
Page 138, ligne 8 en remontant; 1810, *lisez* 1819
Page 148, ligne 1 en remontant; au second membre, μ, *lisez* k
Page 296, ligne 13; et sa diminution, *lisez* et sa diminution verticale
Page 361, ligne 10, log H', *lisez* log cos H'
Page 362, ligne 10, azimut de, *lisez* azimut du
Page 396, ligne 14; H'+, *lisez* P'+
Page 399, ligne 14; au dénominateur, sin H', *lisez* cos H'
Page 403, lignes 9 et 10; changez les S en K
Page 448, ligne 7; $15^d,5$, *lisez* $11^d,5$.

TRAITÉ DE GÉODÉSIE.

LIVRE PREMIER.

NOTIONS DE LA SPHÈRE ET DU MOUVEMENT DES CORPS CÉLESTES.

CHAPITRE PREMIER.

DU MOUVEMENT DIURNE DE LA SPHÈRE CÉLESTE.

1. Lorsqu'un observateur, pendant une belle nuit, contemple le ciel borné par un vaste horizon, il conçoit tous les astres qui s'offrent successivement à ses regards à la surface d'une sphère immense, et à l'extrémité des rayons qui partent de son œil pris pour centre de cette sphère; et à cause de la petitesse du rayon de notre globe à l'égard de celui de la sphère céleste, il se suppose au centre même de la Terre, autour duquel tous les astres lui paraissent tourner. Enfin, pour mieux déterminer leur position respective, il les rapporte à différents cercles qu'il imagine dans le ciel : voici ceux qu'il importe d'abord de connaître.

L'*horizon sensible* ou apparent est le plan tangent à la surface de la Terre supposée sphérique, et le point de contact est le lieu même de l'observateur.

L'*horizon rationnel* ou *mathématique* est le plan qui, passant par le centre de la Terre, est parallèle à l'horizon sensible. La ligne tirée du lieu de l'observateur au centre de la Terre, et prolongée de part et d'autre dans le ciel, est la *verticale* de ce lieu; enfin le point de cette ligne qui répond au-dessus de l'observateur, est le *zénith*, et le point opposé est le *nadir*.

Les astres se lèvent lorsqu'ils commencent à paraître à l'horizon, et ils se couchent lorsqu'ils passent au-dessous du plan de ce cercle.

Pour expliquer le mouvement commun et diurne des astres, il suffit d'attribuer à la sphère céleste un mouvement de rotation d'orient en occident, autour d'une ligne dont les extrémités sont les *pôles du monde* : cette ligne, qui passe par le centre de la Terre ou de la sphère céleste, se nomme l'*axe du monde*.

Le pôle élevé sur notre horizon est le *pôle boréal* ou *septentrional*, ou *nord*; et le pôle opposé, qu'on imagine au-dessous de ce même horizon, est le *pôle austral*, ou *méridional*, ou *sud*.

Le grand cercle passant par le zénith d'un lieu de la Terre et par les pôles, se nomme le *méridien* de ce lieu.

2. Les étoiles qui paraissent conserver entre elles la même situation, se nomment *fixes*. Les astres, au contraire, qui changent de position les uns à l'égard des autres s'appellent *planètes* ou *étoiles errantes*; tels sont *Mercure*, *Vénus*, *Mars*, *Jupiter* et *Saturne*, connus depuis un temps immémorial, parce qu'on les aperçoit à la vue simple; mais vers la fin du siècle dernier et au commencement de celui-ci, les astronomes, aidés de télescopes, en ont découvert cinq autres, qui sont *Uranus*, *Cérès*, *Pallas*, *Junon* et *Vesta*.

On remarque parfois aussi une troisième espèce d'astres : ce sont les *comètes* ou astres chevelus, qui ne se montrent que pendant un certain temps, et qui changent visiblement de place à l'égard des fixes.

Lorsque les astronomes eurent acquis une connaissance exacte des mouvements des corps célestes, ils appelèrent simplement *planètes* les astres qui font leur révolution autour du Soleil, et désignèrent par le nom de *satellites* ceux qui accompagnent les planètes dans leur course, en tournant autour d'elles. La Lune, par exemple, est le satellite de la Terre qui, en tournant réellement sur elle-même, fait sa révolu-

tion autour du Soleil. Nous expliquerons plus loin le système planétaire.

Quant aux étoiles fixes, dont le nombre est immense, on en a formé différents groupes, afin de les mieux reconnaître. Chaque groupe se nomme *constellation.*

3. Les étoiles dispersées dans l'espace, et supposées toutes aux confins de la sphère céleste, décrivent donc chaque jour des cercles d'autant plus petits qu'elles sont plus près des pôles du monde. Le plus grand de ces cercles est évidemment celui dont tous les points sont également distants des deux pôles: on le nomme *équateur*. Quant aux cercles parallèles à celui-ci, on les désigne simplement sous le nom de *parallèles*. Les pôles du monde sont les pôles même de l'équateur et de tous les parallèles.

L'équateur partage la surface de la sphère en deux parties égales; l'une forme l'hémisphère septentrional, l'autre l'hémisphère méridional.

Des deux points où l'équateur coupe l'horizon, l'un se nomme *orient,* c'est celui où se lève une étoile qui décrit le premier cercle; l'autre se nomme *occident,* c'est le point où la même étoile se couche.

Le méridien du lieu de l'observateur coupe aussi l'horizon en deux points; l'un s'appelle *sud,* parce qu'il est du côté où se trouve le Soleil à midi par rapport à nous; l'autre, qui lui est opposé, se nomme *nord:* ces quatre points se désignent sous le nom commun de *points cardinaux*. Lorsqu'un astre, qui se lève et se couche, est dans le méridien de l'observateur, il est à son point culminant, ou à sa plus grande hauteur au-dessus de l'horizon : ce point se nomme aussi *médiation.*

4. A l'aide d'un grand quart de cercle à lunette, placé solidement dans le plan du méridien, et d'une excellente pendule, on s'assure de l'existence des étoiles réellement fixes, et de l'uniformité du mouvement périodique du ciel. En effet, si chaque fois qu'une étoile passe à la même partie du méridien, l'on mesure sa hauteur angulaire audessus de l'horizon, et si cette hauteur est toujours constante, on doit en conclure que l'étoile est fixe. En comptant dans ce cas, l'heure, la minute et la seconde marquées par la pendule à l'instant de chaque

passage au méridien, l'on s'apercevra que l'intervalle de temps entre deux passages consécutifs ne varie jamais; et en répétant cette observation sur toute autre étoile fixe, on verra que le nombre d'heures, de minutes et de secondes écoulées depuis son passage au méridien jusqu'à son retour au même point, n'a nullement changé. Mais il n'est pas nécessaire que la lunette soit précisément dans le plan du méridien; elle peut être placée dans un plan vertical quelconque; l'intervalle de temps entre deux passages au fil de la lunette sera toujours le même. Ainsi, il est constant que le mouvement de la sphère céleste ou du *premier mobile* est uniforme; et que les étoiles fixes décrivent journellement des cercles de la sphère dont les plans sont perpendiculaires à l'axe du monde.

Tous les astronomes partagent en 24 heures le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs d'une étoile à la même partie du méridien: cette durée se nomme, pour cette raison, *jour sidéral;* et la 24[e] partie de ce temps s'appelle *heure sidérale.* L'heure se divise en 60 minutes, la minute en 60 secondes, et ainsi de suite.

Il résulte de ce qui vient d'être dit, que tous les jours sidéraux sont égaux, et que pour reconnaître si une pendule suit le temps sidéral, il faut qu'en lui faisant marquer une certaine heure à l'instant où une étoile passe au méridien, elle indique précisément la même heure lorsque cette étoile y revient plusieurs jours de suite.

Quelle que soit l'inclinaison de l'axe du monde sur l'horizon, la durée de la présence d'une étoile qui décrit l'équateur, est la même au-dessus de l'horizon qu'au-dessous; mais une étoile qui décrit un parallèle, est visible d'autant plus long-temps que ce parallèle est plus près du pôle élevé, et que l'angle que l'axe du monde fait avec l'horizon diffère moins de l'angle droit. Ainsi près du pôle élevé, les étoiles ne se lèvent ni ne se couchent jamais: c'est ce qui a lieu aussi pour celles qui étant plus éloignées du pôle, décrivent des parallèles dont le plan n'est point coupé par l'horizon; telles sont pour nous les étoiles de la *grande Ourse*, la *Polaire*, etc. Dans ce cas, l'on voit les étoiles passer deux fois au méridien pendant un jour sidéral; par exemple, la première fois au *méridien supérieur,* c'est-à-dire du côté du zénith, et la seconde fois au *méridien inférieur,* c'est-à-dire entre le pôle et l'horizon. Ces étoiles se nomment, pour cette raison, *circompolaires*, et

les observations d'un astre quelques moments avant et après sa culmination, sont dites *circomméridiennes*.

Si l'on jette un coup d'œil sur la *figure* 1, on reconnaîtra tout de suite cette vérité. En effet, soient P, P′ les pôles du monde, C le centre de la Terre, Z le zénith, N le nadir, OH l'horizon rationnel, EQ l'équateur, et AB, A′B′, DF, D′F′ des cercles qui lui soient parallèles. Il est évident que pour un observateur dont le zénith est en Z, et le pôle élevé en P, l'étoile qui décrit le cercle D′F′ est toujours invisible; que celle qui décrit le cercle DF, au contraire, ne se couche jamais. Quant à l'étoile qui décrit l'équateur, elle paraît 12 heures au-dessus de l'horizon et reste 12 heures invisible, parce que les arcs *semi-diurne* et *semi-nocturne* EM, QM sont égaux. Enfin, des deux étoiles qui décrivent l'une le cercle AB, l'autre le cercle A′B′, la première reste plus longtemps au-dessus de l'horizon qu'au-dessous, et la seconde disparaît pendant plus de 12 heures; parce que dans le premier cas l'arc semi-diurne $An > Bn$, et que dans le second cas l'on a $A'n' < B'n'$.

Les cercles horaires sont des grands cercles de la sphère qui passent par l'axe du monde et qui sont par conséquent perpendiculaires à l'équateur céleste; ainsi le méridien d'un lieu fait essentiellement partie de ces cercles, et à chaque instant le cercle horaire, sur la circonférence duquel se trouve une étoile, fait avec ce méridien un angle que l'on nomme *angle horaire* de l'étoile. Si donc cet angle est oriental et de 15 degrés, l'étoile mettra une heure sidérale pour arriver au méridien; il y aura au contraire une heure qu'elle s'en sera éloignée si ce même angle est occidental.

CHAPITRE II.

DU MOUVEMENT PROPRE DU SOLEIL, DES SIGNES DU ZODIAQUE, ET DE LA POSITION DES ASTRES PAR RAPPORT A L'ÉQUATEUR, A L'ÉCLIPTIQUE ET A L'HORIZON.

5. Le Soleil, comme toutes les étoiles fixes, semble emporté d'orient en occident par le mouvement périodique du ciel. Cependant on s'aperçoit bientôt, en le soumettant à l'épreuve indiquée précédemment, qu'il ne conserve pas la même position par rapport aux étoiles, et qu'il paraît doué d'un mouvement propre d'occident en orient. En effet, après une longue suite d'observations exactes de sa hauteur méridienne, et de l'intervalle de temps qui s'écoule entre son passage et celui des étoiles au méridien, l'on a reconnu qu'il se meut dans un orbe plan incliné à l'équateur de $23^{\circ}\,28'$ environ, et dont la forme est celle d'une ellipse peu *excentrique* ou peu allongée, à l'un des foyers de laquelle se trouve la Terre. Mais considérons, quant à présent, cet orbe, qu'on nomme *écliptique*, comme un grand cercle de la sphère céleste, et concevons-le divisé en douze parties égales, à partir du point où le Soleil se trouve au commencement du printemps, c'est-à-dire à l'un des points d'intersection de l'écliptique et de l'équateur, points qu'on nomme *équinoxes*. Chacune de ces parties comprendra évidemment 30°, puisque la circonférence entière en contient 360 : ce sont ces parties auxquelles on a donné le nom de *signes*.

6. Toutes les planètes anciennes s'éloignent plus ou moins de la route du Soleil ou de l'écliptique, tantôt vers un pôle de ce grand cercle, tantôt vers l'autre. Les anciens avaient remarqué que les orbites des planètes se trouvent comprises dans une zone de 16 à 18°, partagée

en deux parties égales par l'écliptique; c'est cette zone qu'ils désignèrent sous le nom de *zodiaque*.

Les douze signes du zodiaque et les caractères qui les distinguent sont :

Sign.			Degr.	Sign.			Degr.
0	♈	le Bélier	0	6	♎	la Balance	180
1	♉	le Taureau	30	7	♏	le Scorpion	210
2	♊	les Gémeaux	60	8	♐	le Sagittaire	240
3	♋	l'Écrevisse	90	9	♑	le Capricorne	270
4	♌	le Lion	120	10	♒	le Verseau	300
5	♍	la Vierge	150	11	♓	les Poissons	330

Afin d'aider la mémoire à les retenir, on les a exprimés par ces deux vers latins :

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.

Il y a aussi douze constellations qui portent les mêmes noms, et qui forment les constellations zodiacales, mais qu'il ne faut pas confondre avec les signes précédents. En effet, à l'époque inconnue de l'invention du zodiaque, ces constellations coïncidaient avec les signes de même dénomination; mais il n'en est plus de même aujourd'hui.

L'ordre de ces signes a lieu d'occident en orient, qui est le sens du mouvement propre du Soleil. Lorsqu'un astre se meut suivant cet ordre, on dit que son mouvement est *direct;* lorsqu'au contraire il paraît aller dans une direction opposée, son mouvement est *rétrograde;* enfin, si pendant un certain temps l'astre semble fixe, on le dit *stationnaire*. Ce dernier phénomène a lieu quand le mouvement, de direct qu'il était, devient rétrograde, et réciproquement. Les planètes, quoique tournant réellement autour du Soleil d'occident en orient, nous présentent ces diverses apparences.

La droite, qui est la commune section de l'équateur et de l'écliptique, se nomme *ligne des équinoxes* : elle est ainsi désignée, parce que, quand le Soleil se trouve à l'une de ses extrémités, les jours sont égaux aux nuits. On la nomme aussi *ligne des nœuds*.

L'écliptique étant partagée en deux parties égales par l'équateur, il

s'ensuit que les six premiers signes se trouvent dans l'hémisphère boréal, et les six autres dans l'hémisphère austral. Les signes septentrionaux sont donc le Bélier, le Taureau, les Gémeaux, le Cancer, le Lion, la Vierge; et les signes méridionaux, la Balance, le Scorpion, le Sagittaire, le Capricorne, le Verseau, les Poissons.

On entend aussi par *signes ascendants* ceux que le Soleil parcourt lorsqu'il s'approche de plus en plus du zénith; et par *signes descendants*, ceux par lesquels il passe en s'éloignant sans cesse de ce point : ainsi, le Capricorne, le Verseau, les Poissons, le Bélier, le Taureau et les Gémeaux sont les signes ascendants.

7. Pour fixer la position des astres, on les rapporte à l'équateur ou à l'écliptique. Relativement au premier cercle, leur position est connue par leur *ascension droite* et leur *déclinaison*.

La *déclinaison* d'un astre est sa distance à l'équateur, mesurée sur un grand cercle qui passe par son centre et par les pôles du monde; ce cercle de déclinaison, qui n'est autre qu'un cercle horaire, est donc perpendiculaire à l'équateur. La déclinaison ne se compte que depuis 0° jusqu'à 90°; il est donc indispensable d'énoncer si elle est boréale ou australe. La distance angulaire d'un astre au pôle se nomme *distance polaire :* celle-ci se compte depuis le pôle boréal jusqu'au pôle austral; elle est donc toujours comprise entre 0° et 180°.

L'*ascension droite* est la distance du point équinoxial du printemps au cercle de déclinaison, comptée sur l'équateur de l'ouest à l'est, et depuis 0° jusqu'à 360°.

On détermine aussi la position d'un astre par rapport à l'écliptique, c'est-à-dire au moyen de sa *longitude* et de sa *latitude*. Pour cet effet, l'on imagine des grands cercles passant par les pôles de cet orbe solaire : c'est sur ces *cercles de latitude* que se mesure la distance des astres à l'écliptique. La latitude est australe ou boréale selon que l'astre est entre le pôle austral de l'écliptique et ce cercle, ou entre l'écliptique et le pôle boréal.

La *longitude* se mesure sur l'écliptique, et se compte, dans le sens du mouvement propre du Soleil, à partir du point équinoxial du printemps, depuis 0° jusqu'à 360°; c'est-à-dire comme l'ascension droite, d'occident en orient.

8. Il est évident que la distance angulaire du pôle de l'équateur à celui de l'écliptique situé dans le même hémisphère, est la même que l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur : cette inclinaison se nomme *obliquité de l'écliptique*.

Les cercles polaires sont des petits cercles de la sphère céleste parallèles à l'équateur, et passant par les pôles de l'écliptique : il y a par conséquent deux cercles polaires, l'un *antarctique* ou au sud, l'autre *arctique* ou au nord ; et leur distance aux pôles du monde, qui mesure l'obliquité de l'écliptique, est de 23° 28′ environ.

La hauteur d'un astre est l'arc de grand cercle compris entre l'horizon et cet astre, et dont le plan passe par le zénith de l'observateur. L'angle que ce cercle de hauteur ou ce *vertical* fait avec le méridien, est dit l'*azimut* de l'astre. Le grand cercle qui passe par le zénith et par les points *est* et *ouest*, se nomme *premier vertical;* celui-ci est donc perpendiculaire au méridien du lieu.

Les cercles de la sphère parallèles à l'horizon se nomment *almicantarats;* ils ont pour pôles le zénith et le nadir. Tous les astres situés dans le plan d'un almicantarat sont donc à égale hauteur au-dessus de l'horizon.

L'*amplitude ortive* est l'arc de l'horizon compris entre l'équateur et le point où un astre se lève; l'*amplitude occasale* est un arc pareil correspondant au coucher de cet astre. Ainsi, d'après la *figure* 1, l'arc ZM est le premier vertical, et M*n* est l'amplitude ortive d'un astre qui décrit le parallèle A*n*B.

Les étoiles décrivant chacune perpétuellement le même parallèle, il s'ensuit que l'amplitude ortive et l'amplitude occasale restent constantes. Il n'en est pas de même pour le Soleil, puisque, par l'effet de son mouvement propre d'occident en orient, il ne demeure qu'un instant dans l'équateur.

On désigne quelquefois par le nom de *colure* les cercles de déclinaison, notamment ceux qui passent par les points équinoxiaux et solsticiaux : nous parlerons de ces derniers points dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III.

SUITE DU MOUVEMENT PROPRE DU SOLEIL; DE LA MESURE DU TEMPS ET DE LA DURÉE DES SAISONS, ETC.

9. En comparant, comme nous l'avons déjà dit, à l'aide d'une bonne pendule sidérale, les passages du Soleil au méridien à ceux d'une étoile fixe, on reconnaît que le Soleil y repasse la seconde fois 4 minutes plus tard environ que l'étoile, et que sa marche d'occident en orient est plus ou moins rapide.

Pour avoir une idée plus précise de l'irrégularité du mouvement de cet astre, soient A♈P♎ (*fig.* 2) l'écliptique, AP le grand axe de cette ellipse, C le centre, D☊ le petit axe, T la Terre placée au foyer; et supposons que ♈ soit le point o du Bélier, ou celui où se trouve le Soleil à l'équinoxe de printemps; alors ♎ sera le point o de la Balance, ou l'équinoxe d'automne, et les deux autres points ♋, ♑, qui se trouvent sur une droite perpendiculaire à la ligne des équinoxes, seront les *solstices* d'été et d'hiver.

L'extrémité P du grand axe de l'ellipse solaire se nomme le *périgée*, et l'autre extrémité A l'*apogée;* parce que quand le Soleil est en P, il est le plus près possible de la Terre; et quand il est en A, il se trouve à sa plus grande distance. L'axe AP se nomme la ligne des *apsides;* cette ligne partage évidemment l'écliptique en deux parties égales et symétriques : aussi le Soleil met-il le même temps pour parcourir ces deux parties de sa course annuelle, dans la supposition toutefois de l'immobilité de la ligne des apsides; mais avec cette différence que son mouvement se retarde de plus en plus en allant du périgée P au point A de l'apogée, et qu'il s'accélère suivant la même loi, en partant de ce dernier point pour retourner au périgée. La ligne tirée du centre de la Terre à

celui du Soleil, ou le *rayon vecteur* de cet astre, décrit, par le mouvement dont il s'agit, des aires qui sont constamment proportionnelles au temps, ainsi qu'on le démontre dans tous les Traités de Mécanique.

On a déterminé les variations du rayon vecteur en mesurant au micromètre, et à différentes époques de l'année, le diamètre apparent du Soleil; et pour connaître la position de cet astre sur son orbite, on a observé sa longitude; ou plutôt cette distance angulaire a été déduite de son ascension droite et de sa déclinaison, parce que ces deux coordonnées circulaires sont essentiellement liées à la longitude par une relation qui dépend de l'obliquité de l'écliptique, et que nous donnerons plus tard. En effet, il est évident que nous devons voir le diamètre du Soleil sous un angle d'autant plus grand ou plus petit, que cet astre est plus près ou plus éloigné de nous : aussi au solstice d'hiver le diamètre paraît-il sous l'angle de $32'\,34''$, et au solstice d'été sous l'angle de $31'\,32''$. C'est par des observations de ce genre qu'on a pu reconnaître la forme elliptique de l'orbe solaire, et la position de la ligne des apsides à l'égard de celle des équinoxes. A l'époque du 1er janvier 1830, la longitude du périgée, ou l'angle ♈AP, était de $9^s\,9^\circ\,0'$. Or, si à la ligne des équinoxes ♈♎, on élève dans le plan de l'écliptique, et par le centre T de la Terre, la perpendiculaire ♋♑; les points ♋, ♑ seront ceux où le Soleil arrivera aux solstices d'été et d'hiver. On voit, à l'inspection de la figure, et d'après la connaissance du mouvement elliptique, que les quatre arcs ♈♋, ♋♎, ♎♑, ♑♈, décrits successivement par le Soleil, sont inégaux; d'où résulte nécessairement une différence dans la durée des saisons.

En effet, la durée du printemps est de. . . . . $92^j\,21^h\,\frac{7}{10}$
celle de l'été, de. . . . . . . $93.13\,\frac{6}{10}$
celle de l'automne, de. . . . $89.16\,\frac{5}{10}$
celle de l'hiver, de. . . . . . $89.\ 2$.

10. Les *tropiques* sont des cercles parallèles à l'équateur, et passant par les deux points de l'écliptique les plus éloignés de cet équateur: l'un est le tropique du Cancer, décrit par le Soleil le premier jour du solstice d'été; l'autre est le tropique du Capricorne, décrit le premier jour du solstice d'hiver.

Il est aisé de comprendre que lorsque le Soleil se trouve à l'un des

tropiques, sa déclinaison est précisément égale à l'obliquité de l'écliptique, et la plus grande possible. Si donc l'on mesure à ces deux époques les hauteurs méridiennes du Soleil, leur demi-somme sera la *hauteur de l'équateur* sur l'horizon; et si de la plus grande hauteur solsticiale on retranche cette hauteur de l'équateur, le reste sera la déclinaison solsticiale ou l'*obliquité de l'écliptique*. A l'époque où le Soleil est au solstice d'été, sa longitude est évidemment de 3^s ou de 90°: elle est au contraire de 9^s ou de 270° lorsque le Soleil est au solstice d'hiver.

La hauteur de l'équateur étant connue, son complément à 90° est la *hauteur du pôle* sur l'horizon; car l'axe du monde est perpendiculaire au plan de l'équateur. (*Voyez* la *fig.* 1.)

11. Le jour solaire est le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du Soleil au méridien supérieur ou au méridien inférieur. Ce jour se divise en 24 heures: on le nomme aussi *jour astronomique* ou *jour vrai*, et on lui donne pour origine l'instant du midi. Si au contraire on prend l'instant du minuit pour origine du temps, on le nomme *jour civil*. Les astronomes ont adopté l'une et l'autre manière de désigner le temps, car l'usage n'a pu encore s'établir généralement parmi eux de compter les 24 heures solaires d'un minuit à l'autre. Dans la vie civile, le jour se divise en deux périodes de 12 heures chacune: l'une est celle du matin, l'autre est celle du soir. Par exemple, le 6 janvier à 9 heures du matin, *temps civil*, répond au 5 janvier à 21 heures, *temps astronomique*.

Les astronomes ont jugé convenable de choisir également pour origine du jour sidéral, l'instant où le point équinoxial du printemps passe à leur méridien supérieur: ainsi la pendule sidérale doit toujours marquer $0^h 0^m 0^s$ ou 12 heures, lorsqu'une étoile qui a zéro d'ascension droite se trouve dans le méridien. En général elle doit marquer l'ascension droite d'une étoile quelconque, convertie en temps, à raison de 15° pour une heure, au moment où l'étoile traverse le méridien supérieur.

Les jours astronomiques ne sont pas tous égaux entre eux comme les jours sidéraux; ils sont plus longs que ceux-ci de plusieurs minutes, comme nous l'avons déjà fait observer; car lorsqu'une étoile

et le Soleil se trouvent en même temps au méridien un certain jour, le lendemain le Soleil, en vertu de son mouvement propre d'occident en orient, passe au méridien plus tard que l'étoile, et après avoir décrit environ 59′ 8″,33 de degré de son orbite. Par conséquent, dans l'espace d'une année, le Soleil traverse le méridien une fois de moins que l'étoile.

Nous venons de dire que les jours astronomiques ne sont pas égaux; leurs différences résultent à la fois de l'obliquité de l'écliptique, et de ce que le mouvement propre ou apparent du Soleil n'est pas uniforme; car d'une part il est visible que si, par plusieurs points équidistants de l'écliptique, on fait passer des cercles de déclinaison, les arcs de l'équateur compris entre ces cercles, ou les différences d'ascension droite seront en général inégales entre elles. Ainsi l'inégalité des jours solaires aurait lieu, quand même le Soleil décrirait uniformément l'écliptique: mais d'autre part cet astre a un mouvement irrégulier dans son orbite; donc les jours vrais astronomiques ne peuvent être égaux.

Concluons de là que les oscillations du pendule ou balancier d'une bonne horloge étant *isochrones* ou d'égale durée, peuvent bien être réglées sur le mouvement diurne des étoiles, mais non pas sur la marche réelle du Soleil. Cependant en faisant abstraction des inégalités de cette marche, ou pour mieux dire, en supposant qu'un autre Soleil décrive uniformément l'équateur en vertu d'un moyen mouvement propre d'occident en orient; l'intervalle de temps entre deux retours consécutifs au méridien supérieur ou inférieur formera un *jour moyen astronomique* entre tous les jours vrais ou apparents, et l'horloge qui suivra exactement le mouvement uniforme de ce Soleil fictif sera réglée sur le *temps moyen*.

Le jour moyen astronomique ou civil se divise en 24 heures: tous les jours moyens sont donc égaux.

12. Pour parvenir au but que l'on vient d'indiquer, les astronomes ont d'abord supposé qu'un second Soleil décrivait uniformément une écliptique circulaire circonscrite à la véritable orbite, et cela dans le même temps que le vrai Soleil décrivait cette orbite. Ils ont en outre supposé que ces deux Soleils partaient ensemble du périgée. Enfin ils

ont imaginé qu'un troisième Soleil partait d'un des points équinoxiaux, à l'instant même où le second Soleil y arrivait; et qu'il décrivait uniformément l'équateur d'occident en orient, dans le même temps que le second Soleil parcourait son cercle. On conçoit, d'après cette hypothèse, que l'ascension droite du troisième Soleil, qu'on nomme *ascension droite moyenne*, est toujours égale à la longitude du second Soleil ou à la *longitude moyenne*; et que l'un de ces astres est sans déclinaison comme l'autre est sans latitude. La longitude moyenne croît donc proportionnellement au temps. C'est d'après ce principe que les tables du Soleil, calculées par Delambre, donnent les longitudes moyennes pour tous les jours de l'année, à minuit moyen.

La distance angulaire du périgée au vrai Soleil se nomme *anomalie vraie*; elle est mesurée par l'angle que le rayon vecteur solaire fait avec la ligne des apsides. La distance angulaire du périgée au second Soleil s'appelle *anomalie moyenne*, et enfin la différence de ces deux anomalies est l'*équation du centre*. La longitude vraie du Soleil est donc égale à la longitude du périgée augmentée de l'anomalie vraie, et la longitude moyenne est égale à la longitude du périgée plus l'anomalie moyenne. On voit en outre que la longitude vraie du Soleil est égale à la longitude moyenne, plus ou moins l'équation du centre ou de l'orbite.

13. Nous avons dit précédemment que le nombre des retours au méridien, du Soleil fictif situé sur l'équateur, mesure le temps moyen, et que le nombre pareil des retours du vrai Soleil mesure le temps vrai. L'arc de l'équateur compris entre deux méridiens menés par les centres de ces deux Soleils, est ce qu'on nomme l'*équation du temps*. Cette équation est toujours évaluée en fraction de jour moyen; elle est nulle quatre fois dans l'année, et se trouve toute calculée pour chaque jour dans les éphémérides: par exemple, on la trouve pour tous les jours du mois, et sous le titre de *temps moyen au midi vrai*, dans la *Connaissance des Temps* et dans l'*Annuaire* que le Bureau des Longitudes publie chaque année: elle sert à faire connaître si une pendule à secondes est bien réglée sur le temps moyen; car il faut pour cela qu'elle marque précisément le temps moyen indiqué dans l'éphéméride, à l'instant où le centre du Soleil vrai se trouve dans le méridien.

Le second Soleil dont nous venons de parler, détermine, par ses retours à l'équateur et aux tropiques, les équinoxes et solstices moyens: La durée de ses retours au même équinoxe ou au même solstice forme l'*année tropique,* laquelle, selon les calculs les plus exacts, est de $365^{j},242218124 = 365^{j}\,5^{h}\,48^{m}\,47^{s},6459$ temps moyen, pour 1830.

14. Depuis la plus haute antiquité les astronomes ont reconnu que la ligne des équinoxes n'est pas fixe dans le ciel à l'égard des étoiles, qu'elle a au contraire un mouvement angulaire rétrograde ou contraire au mouvement propre du Soleil; mais cette rétrogradation, évaluée de nos jours à environ $50'',1$ par an, n'est pas exactement la même dans tous les siècles, et c'est ce qui fait que les années tropiques sont un peu inégales. Ainsi le Soleil, pour revenir aux étoiles d'où il était parti, met un peu plus de temps que pour revenir au même équinoxe. L'*année sidérale* étant l'intervalle compris entre deux retours consécutifs aux mêmes étoiles, il s'ensuit qu'elle est plus longue que l'année tropique de $20^{m}\,23^{s}$; sa valeur est de $365^{j},256374417 = 365^{j}\,6^{h}\,9^{m}\,10^{s},7496$. Enfin l'on a remarqué que le point du périgée a un mouvement direct de $12''$ par an dans le plan de l'orbe solaire; et la théorie de l'attraction universelle a appris que l'excentricité de cet orbe diminue peu à peu. L'*année anomalistique* étant l'intervalle compris entre deux passages consécutifs au périgée, est donc elle-même un peu plus longue que l'année sidérale. Sa valeur est de $365^{j},25966046 = 365^{j}\,6^{h}\,13^{m}\,54^{s},665$.

On doit conclure de là que la ligne des apsides coïncidera un jour avec celle des équinoxes, ou lui sera perpendiculaire; puisque le périgée a, par rapport au point o d'*Aries* ou au point vernal, un mouvement relatif et annuel de $62''$. Ainsi les durées des saisons, telles qu'elles sont données à l'art. **9**, éprouveront à la longue des changements sensibles.

C'est encore l'observation qui a constaté un fait remarquable; savoir, que l'orbe solaire se rapproche peu à peu de l'équateur, ou, ce qui est de même, que l'obliquité de l'écliptique diminue insensiblement. Cette diminution, qui s'arrêtera un jour pour se changer en augmentation, est à très peu près de $48''$ par siècle; mais la théorie montre que l'écliptique et l'équateur ne se confondront jamais. Indépendamment de ces variations fort lentes, et qu'on nomme pour cette raison

variations séculaires, il en est d'autres qui ont une période beaucoup plus courte, et dont nous parlerons par la suite. Toutes ces variations ou inégalités qui troublent le mouvement elliptique du Soleil, sont connues en Astronomie sous le nom de *perturbations planétaires*, parce qu'elles résultent de l'action que les planètes exercent sur le Soleil en vertu de la gravitation universelle. Il faut nécessairement y avoir égard pour déterminer le lieu vrai de cet astre avec toute la précision possible; or elles s'évaluent aisément à l'aide des nouvelles tables solaires dont nous ferons connaître l'usage plus tard, et qui sont fondées sur les théories de la Mécanique céleste.

En remontant aux valeurs ci-dessus de l'année moyenne et de l'année sidérale, on trouve (le *jour moyen astronomique* étant pris pour unité de temps) que la durée du jour sidéral est de $23^h\,56^m\,4^s,09055$; d'où il suit que l'accélération diurne des étoiles est de $3^m\,55^s,9094$ par rapport au moyen mouvement du Soleil.

En prenant au contraire le jour sidéral pour unité, le jour moyen solaire est exprimé par $24^h\,3^m\,56^s,555348$; ainsi lorsqu'on aura des heures moyennes solaires à convertir en heures sidérales, ce qui se pratique très souvent en Astronomie, il faudra augmenter les premières de $9^s,856473$ ou simplement de 10^s, si l'on juge cette exactitude suffisante. Réciproquement, pour convertir des heures sidérales en heures moyennes, on retranchera $9^s,82956$ de chacune des premières.

Il résulte de là que le Soleil moyen achève sa révolution entière, ou parcourt 360° en $24^h\,3^m\,56^s,555348$ de temps sidéral; et que dans le même temps le mouvement de la sphère étoilée est de 360° 59′ 8″,33; ainsi les jours moyens sont aux jours sidéraux dans le rapport de $\frac{360^\circ\,59'\,8'',33}{360}$. Dans une heure solaire moyenne, une étoile fixe décrit par conséquent un arc de 15° 2′ 27″,847; ainsi dans une seconde de temps moyen elle parcourt 15″,04107 de degré.

Il s'ensuit en outre que, dans un jour moyen, le mouvement propre du Soleil moyen est de 59′ 8″,33, et que ce Soleil ne parcourt que 359° 59′ 9″,9 dans une année tropique; puisque la rétrogradation des points équinoxiaux est de 50″,1.

DE L'ANNÉE CIVILE ET DU CALENDRIER GRÉGORIEN.

15. C'est sur l'année tropique que se règle l'année civile : celle-ci est tantôt de 365 jours, tantôt de 366, et commence au minuit qui sert d'origine au premier janvier; quoiqu'il eût été à desirer que les peuples de notre hémisphère eussent pris pour époque, soit l'équinoxe du printemps, soit le solstice d'hiver. Pour concevoir pourquoi la durée de l'année civile est variable, il suffit de remarquer que si elle était constamment de 365 jours, son commencement devancerait sans cesse celui de la véritable année tropique, et parcourrait par conséquent les différentes saisons en rétrogradant. Cet inconvénient, qui ferait évidemment perdre au calendrier un de ses principaux avantages, celui de fixer les mois et les fêtes aux mêmes saisons, et d'en faire de cette manière des époques remarquables pour l'agriculture, s'élude à l'aide de l'intercalation suivante, adoptée dans le calendrier grégorien, qui est celui dont la plupart des peuples de l'Europe font usage.

Sous le règne de Jules César, en l'an 45 de notre ère, il fut décidé que, pour rétablir l'accord entre les années solaires et civiles, les années seraient bissextiles tous les quatre ans, c'est-à-dire de 366 jours. Alors l'année tropique, supposée de 365 jours un quart seulement, fut nommée l'*année julienne;* et il fallut, par suite de cette décision, que l'année 44 fût augmentée d'un certain nombre de jours; ce qui fit qu'on l'appela l'*année de confusion*. Le temps qui s'écoule pendant cent années juliennes forme la durée d'un siècle, la plus longue des périodes usitées dans la Chronologie. Mais cette intercalation d'un jour tous les quatre ans, dans le but de compenser l'erreur résultant de la suppression d'un quart de jour dans les années communes ou de 365 jours, ne pouvait remédier à l'inconvénient qu'on voulait éviter, car on reconnut plus tard que l'année tropique était plus exactement de $365^j,242264$ ou à fort peu près; il fallut donc, pour empêcher le déplacement de l'origine de l'année civile, tenir compte de $0^j,007736$ dont l'année tropique était augmentée par ce mode régulier d'intercalation. Or, en 1582, sous le pontificat de Grégoire XIII, l'on y parvint en convenant de supprimer la bissextile à la fin de chaque siècle, pour la rétablir à la fin du quatrième, et en arrêtant que le 5 octobre

compterait pour le 15. Dans ces derniers temps, Delambre a proposé de supprimer cette bissextile tous les quatre mille ans. De là ces deux règles pour savoir si une année grégorienne est bissextile ou non : 1° si le nombre qui exprime l'année est divisible exactement par 4, cette année est bissextile; mais si la division ne se fait pas sans reste, l'année est commune : ainsi l'année 1837 a été commune, et l'année 1840 bissextile; 2° quant aux années séculaires, supprimez les deux zéros du nombre qui les exprime, et si ce nombre ainsi réduit est exactement divisible par 4, ces années ont été ou seront bissextiles. Par exemple, les années séculaires 1700 et 1800 ont été communes, il en sera de même de l'année 1900; mais l'année 2000 sera bissextile: toutefois l'année 4000 sera commune par la raison donnée ci-dessus. (*Voyez*, pour de plus amples explications, le *Traité de la Sphère et du Calendrier*, par Rivard, 8e édition.)

Les Russes et les chrétiens du rite grec s'en tiennent toujours à la réforme julienne ou au *vieux style;* aussi comptent-ils maintenant 12 jours de moins que nous. Quant aux Turcs, ils règlent leur année sur le mouvement de la Lune. Dans leur calendrier, les mois commençant à la néoménie sont alternativement de 30 et 29 jours; et comme alors leur année est seulement de 354 jours, son origine parcourt successivement toutes les saisons en rétrogradant.

CHAPITRE IV.

DE LA FIGURE DE LA TERRE, DE SON ATMOSPHÈRE, ET DE LA RÉFRACTION ASTRONOMIQUE.

16. Les premiers voyageurs durent s'apercevoir bientôt que la surface de la Terre n'est pas ce qu'elle semble d'abord, un plan sur lequel le ciel s'appuie sous la forme d'une voûte surbaissée; qu'elle est au contraire, comme nous l'avons supposé, un corps à très peu près sphérique que le ciel enveloppe de toutes parts. En effet, à mesure que l'on s'avance vers le midi ou vers le nord, des étoiles qui demeuraient constamment sous l'horizon se lèvent et se couchent alternativement, tandis que d'autres qui étaient visibles disparaissent pour toujours. Il est vraisemblable en outre que les dimensions de la Terre ont été connues dès la plus haute antiquité en Égypte et dans l'Asie; car il existe entre plusieurs mesures de ces temps reculés et la longueur de la circonférence terrestre, des rapports qui ne peuvent pas être dus au hasard. Mais quoique la connaissance de la sphéricité et de la grandeur de la Terre date d'une époque très ancienne, il faut cependant arriver aux temps modernes pour en trouver une mesure assez précise, et c'est celle que l'astronome Picard exécuta en France vers la fin du XVIIe siècle. Néanmoins la question délicate de la véritable figure de notre globe fut agitée de nouveau parmi les géomètres, vers le milieu du XVIIIe siècle; et c'était pour en avoir une solution indépendante de toute hypothèse physique que des mesures d'arcs de méridiens furent entreprises au cap de Bonne-Espérance par Lacaille, à l'équateur par Bouguer et Lacondamine, en France par Cassini, en Laponie par Clairaut et Maupertuis, etc. Elles ont prouvé, comme Newton l'avait démontré par la théorie de l'attraction, que généralement les degrés vont en croissant de l'équateur aux pôles, et que par conséquent la Terre, abstraction faite des aspérités de sa surface, affecte à très peu

près la forme d'un ellipsoïde de révolution. Quant à présent, il suffit de dire que sa circonférence est de 40 millions de mètres et son rayon de 6 366 198 mètres, en la supposant sphérique.

17. Un fluide élastique, rare et transparent, qu'on nomme l'*air*, entoure le globe terrestre de tous côtés, et s'élève à une grande hauteur. Son poids fait équilibre à celui du mercure dans le baromètre. Tout ce fluide. éminemment nécessaire à notre existence, forme l'atmosphère : il a la propriété de se condenser par le froid et de se dilater par la chaleur. A mesure que l'on se transporte dans les régions élevées de l'atmosphère, l'air devient plus rare; et à cause de sa compressibilité, ses couches inférieures sont plus denses que ses couches supérieures dont elles supportent le poids. A une température constante sa densité est proportionnelle au poids qui le comprime, et par conséquent à la hauteur du baromètre. De cette propriété résulte la possibilité de mesurer les hauteurs par les observations barométriques.

Nous ne voyons donc les astres qu'à travers un fluide. Souvent même nous les voyons ailleurs que là où ils sont réellement, par suite de la déviation qu'éprouvent leurs rayons lumineux en traversant l'atmosphère; car il est de fait qu'un de ces rayons, en passant obliquement d'un milieu dans un autre dont la densité est différente, change de direction, en s'approchant de la perpendiculaire à leur surface commune, élevée au point où il entre dans le milieu le plus dense. C'est cet effet qu'on nomme *réfraction*. Le rayon direct et le rayon réfracté forment, avec cette perpendiculaire, deux angles, dont l'un est l'angle d'incidence et l'autre l'angle de réfraction : or, les sinus de ces deux angles sont toujours dans un rapport constant. L'expérience prouve aussi que la réfraction des rayons sur une même surface croît avec leur obliquité, et que la force réfringente de l'air est proportionnelle à sa densité mesurée par la pression qu'il éprouve ou par la hauteur du baromètre. Enfin lorsqu'un rayon lumineux passe du vide dans l'air à la température de la glace fondante et sous la pression barométrique de $0^{m},76$, le sinus de réfraction est au sinus d'incidence comme l'unité est à 1,000294321.

La densité des couches d'air augmentant progressivement depuis les limites de l'atmosphère jusqu'à la surface de la Terre, il s'ensuit qu'un rayon lumineux qui traverse obliquement toutes ces couches suppo-

sées sphériques, concentriques, en équilibre et d'une épaisseur infiniment petite, arrive à nous en suivant une courbe concave vers la surface terrestre; mais comme nous supposons toujours les objets sur la direction même des rayons que nous en recevons, nous rapportons les astres au point du ciel qui se trouve sur la tangente à la courbe ou *trajectoire* décrite par le rayon lumineux, au point où nous sommes. L'angle que cette tangente fait avec la droite menée de notre œil au lieu réel de l'astre est donc la réfraction qui affecte la hauteur observée de l'astre au-dessus de l'horizon.

18. On conçoit, par l'explication succincte de ce phénomène, lequel paraît être dû à l'action que les corps exercent sur la lumière, que la réfraction astronomique ou plutôt *atmosphérique* est la plus grande possible, lorsque les astres sont à l'horizon; qu'elle diminue à mesure qu'ils s'élèvent au-dessus de ce plan, et qu'elle est nulle lorsque les astres passent au zénith.

L'effet de la réfraction est donc de faire paraître les astres plus élevés qu'ils ne le sont effectivement, et n'a lieu que dans le sens vertical. Ainsi, la hauteur angulaire d'un astre observé de la surface de la Terre, est une hauteur *apparente* qu'il faut diminuer de la réfraction pour avoir la *hauteur vraie*.

Il résulte de là que la valeur de la réfraction dépend de la hauteur apparente d'un astre, ou, comme l'on dit, a pour *argument* cette hauteur apparente.

La réfraction au-dessus de 10 degrés de hauteur, toutes choses d'ailleurs égales, ne dépend sensiblement que de l'état du baromètre et du thermomètre dans le lieu de l'observation. Plusieurs géomètres ont cherché à en assigner les lois, et Laplace, particulièrement, est parvenu, par une savante analyse, à la déduire de formules qui satisfont complétement aux observations, et qui sont fondées sur l'hypothèse que la loi de densité des couches aériennes tient à peu près le milieu entre une progression géométrique et une progression arithmétique. Mais à une hauteur plus petite que 10 degrés, à l'horizon surtout, la réfraction éprouve souvent des variations si irrégulières, qu'elle se refuse à toute théorie mathématique.

CHAPITRE V.

DU MOUVEMENT DE LA TERRE AUTOUR DU SOLEIL; DES LONGITUDES ET LATITUDES GÉOGRAPHIQUES, ET DES DIFFÉRENTES PARALLAXES DES ASTRES.

19. Dans tout ce qui précède sur le spectacle de l'univers, le Soleil est supposé en mouvement autour de la Terre; mais il est très probable que ce mouvement n'est qu'apparent, et n'est dû qu'à une illusion d'optique semblable à celle qu'éprouve un voyageur lorsque, étant entraîné par le courant d'un fleuve, il en fixe les rivages, et leur attribue un mouvement contraire à celui par lequel il est emporté réellement. En effet l'hypothèse la plus simple est d'admettre que la Terre tourne sur elle-même d'occident en orient en 24 heures sidérales, et autour du Soleil dans l'espace d'un an, en décrivant une orbite dont le centre du Soleil occupe un des foyers; mais, dans l'une comme dans l'autre supposition, les apparences des mouvements célestes sont les mêmes.

La Terre décrit donc l'écliptique dans le sens même du mouvement apparent du Soleil, c'est-à-dire d'occident en orient, et son axe de rotation est emporté dans l'espace parallèlement à lui-même. Ainsi, quand le Soleil nous paraît, par exemple, au point équinoxial du printemps, la Terre est réellement au point opposé, ou à celui d'automne. Cela posé, si, par le centre S du Soleil (*fig.* 3), on conçoit à la ligne des équinoxes T♈ une parallèle S♈′, le point ♈′ sera celui d'où l'on comptera la longitude ♈′S′ de la Terre; tandis que l'angle ♈′AT sera la longitude de la Terre vue du Soleil, puisqu'un observateur en T rapporte le dernier astre en un point S′ de l'orbite terrestre. Ainsi la longitude *héliocentrique* de la Terre, ou mesurée du Soleil, est de 180° plus grande que la longitude *géocentrique* du Soleil, ou mesurée de la

Terre; ce qui s'exprime ainsi:

$$\text{long. } ♁ = \text{long. } \odot + 180^{\circ},$$

c'est-à-dire longitude de la Terre = longitude de Soleil + 180°.

On entend par *périhélie* le point où la Terre est le plus près du Soleil, et par *aphélie* celui où elle en est le plus éloignée. Ces deux points, qui forment les extrémités du grand axe de l'orbite terrestre, sont respectivement P, A. Si donc ϖ et Π sont, l'un la longitude du périhélie, l'autre celle du périgée, l'on aura, d'après ce qui vient d'être dit,

$$\varpi = \Pi + 180^{\circ}.$$

20. En considérant toujours la Terre comme une sphère, tous les points de sa surface, dans leur mouvement diurne autour de l'axe du monde, décrivent des cercles parallèles entre eux, lesquels, comme dans la sphère céleste, sont nommés simplement *parallèles*, lorsqu'ils sont inégalement éloignés des pôles. L'équateur terrestre est donc le cercle dont le plan coïncide avec celui de l'équateur céleste et partage la surface du globe en deux hémisphères, qui ont pour centre l'un le pôle boréal, l'autre le pôle austral. Ces deux pôles sont nécessairement situés sur l'axe du monde, et correspondent par conséquent à ceux de la sphère céleste.

Le méridien d'un lieu est de même le cercle qui passe par ce lieu et par les pôles de la Terre. Le premier méridien est celui auquel on est convenu de rapporter tous les autres. Anciennement, et depuis Ptolémée, les géographes prenaient pour premier méridien celui qui passe par l'île de Fer, l'une des plus occidentales des îles Canaries. Cet usage s'introduisit en France sous le règne de Louis XIII; mais plus tard les géographes français se décidèrent, à l'instar de l'Académie des Sciences de Paris, à compter les longitudes du méridien de l'Observatoire royal de cette ville.

L'angle de deux méridiens est mesuré par l'arc de l'équateur qu'ils interceptent. Cet arc se nomme *longitude terrestre* ou *différence des méridiens*, en tant que l'un des méridiens est ou n'est pas considéré comme le premier. La longitude se compte sur l'équateur, de part et

d'autre du méridien, et peut par conséquent être orientale ou occidentale; elle se compte aussi dans le sens du mouvement de rotation de la Terre, c'est-à-dire d'occident en orient, et depuis 0° jusqu'à 360°; cela est indifférent pourvu qu'on en avertisse.

Il suit de là, et de ce qui a été dit (art. **11**), que lorsqu'il est midi vrai au méridien de Paris, par exemple, il n'est que 11^h, temps vrai, au méridien d'un autre lieu dont la longitude occidentale, par rapport à cette ville, est de 15°. Au contraire, il est une heure après-midi dans un lieu situé à l'orient de Paris, et dont la longitude orientale est de même de 15°. Ce que nous disons du temps vrai doit s'entendre aussi du temps moyen et du temps sidéral.

21. Sur la Terre sphérique, la plus courte distance de deux points est déterminée par l'arc de grand cercle qui passe par ces deux points, et la distance d'un lieu à l'équateur est l'arc du méridien de ce lieu, compris entre son parallèle et la ligne équinoxiale ou l'équateur terrestre; c'est cette dernière distance que l'on nomme *latitude géographique*, ou simplement *latitude*: il est nécessaire d'indiquer si elle est australe ou boréale.

La latitude d'un lieu est égale à la hauteur du pôle sur l'horizon du même lieu; car la latitude et la hauteur du pôle ont l'un et l'autre pour complément au quart du méridien, la distance de ce lieu au pôle élevé. On entend par *colatitude* le complément de la hauteur du pôle.

Quelle que soit la figure de la Terre, la latitude géographique d'un lieu, ou la *hauteur apparente* du pôle, est l'angle que la normale à la surface terrestre en ce lieu fait avec le plan de l'équateur. La surface de la Terre diffère peu de celle d'un ellipsoïde de révolution, dont l'axe de rotation représente celui des pôles, comme on le verra par la suite. Ainsi, la latitude géographique du point A (*fig.* 4), situé entre le pôle P et le point E de l'équateur, a pour mesure l'angle ALE que la normale AN à l'ellipse génératrice PAE, ou au méridien de A, fait avec le rayon CE de l'équateur. Cette normale, prolongée dans le ciel, détermine le zénith Z apparent, tandis que le rayon terrestre CA prolongé également, détermine le zénith vrai Z', ou le zénith géocentrique. Dans la nature, l'angle de la verticale ou normale AN, avec le rayon

AC, est toujours très petit; néanmoins il est des cas où il faut en tenir compte. Cet angle est évidemment la différence entre la latitude apparente ALE et la latitude géocentrique ACE; puisque, par la propriété de l'angle extérieur au triangle CLA, l'on a angle ALE = angle ACE + angle CAL.

De même qu'un point est donné sur un plan par ses distances à deux droites fixes, de même la position d'un lieu sur la Terre est déterminée par sa longitude et sa latitude. La Géographie mathématique est toute fondée sur la détermination de ces deux coordonnées. Il est même d'usage, maintenant, d'ajouter pour troisième coordonnée d'un point sa hauteur au-dessus du niveau des mers, et de la désigner par *altitude;* parce qu'un objet terrestre n'est complétement connu de position qu'au moyen de ses trois coordonnées géographiques.

22. Les plans des cercles polaires de la sphère céleste déterminent, par leurs intersections avec la surface de la Terre, deux cercles correspondants de même dénomination: il en est ainsi des tropiques. La zone comprise sur la Terre entre les deux tropiques, forme la *zone torride;* parce que les peuples qui l'habitent, ayant pendant deux fois l'an le Soleil d'aplomb sur leurs têtes, éprouvent une chaleur excessive. Les deux zones comprises entre les tropiques et les cercles polaires, forment les *zones tempérées* ou plus douces; et enfin les deux parties restantes de la surface terrestre composent les *zones glaciales*.

Les peuples situés à l'équateur ont la *sphère droite,* parce que l'axe du monde étant alors dans le plan de leur horizon, toutes les étoiles décrivent des cercles perpendiculaires à ce plan; mais entre l'équateur et le pôle élevé, ils ont la *sphère oblique,* comme le représente la *fig.* 1. Ceux qui seraient aux pôles mêmes auraient la *sphère parallèle,* parce que l'équateur serait parallèle à l'horizon des pôles: dans ce cas, les étoiles ne se lèvent ni ne se couchent jamais, puisqu'elles décrivent toutes des cercles parallèles à cet horizon.

Il est bien aisé de se rendre compte des différentes longueurs des jours et des nuits à diverses époques de l'année, eu égard à ces trois positions de la sphère. Nous entendons ici, par jour et par nuit, le temps de la présence et de l'absence du Soleil sur l'horizon de l'observateur.

23. La distance qui nous sépare des étoiles est si grande, que les droites menées de l'une d'elles aux centres de la Terre et du Soleil, ne feraient aucun angle sensible; c'est cet angle que les astronomes désignent sous le nom de *parallaxe annuelle* ou du grand orbe : les étoiles, même les plus brillantes, n'ont pas de parallaxe appréciable. Il n'en est pas ainsi des planètes, et l'on s'est même assuré que l'angle sous lequel on verrait de leur centre le demi-diamètre terrestre, est de plusieurs secondes.

Supposons, par exemple, un observateur en A (*fig.* 5), sur la surface de la Terre sphérique, et considérons le Soleil S à l'horizon sensible AS : la *parallaxe horizontale* de cet astre sera ASC; mais si le Soleil est élevé sur l'horizon, comme en S', l'angle AS'C sera la *parallaxe* de hauteur, laquelle est évidemment plus petite que la première, en supposant que SS' fasse partie de l'arc diurne, ou de celui que le Soleil décrit pendant sa présence sur l'horizon. Ainsi, la parallaxe de hauteur décroît progressivement depuis l'horizon où elle est à son *maximum*, jusqu'au zénith où elle est nulle. Son effet est tout entier dans un plan vertical et contraire à celui de la réfraction (art. **18**), puisque nous voyons un astre moins élevé que si nous étions au centre de la Terre, et cela d'une quantité égale à la parallaxe.

La Terre s'éloignant ou se rapprochant continuellement du Soleil, il est évident que la parallaxe horizontale solaire n'a pas une valeur constante; sa valeur moyenne est de 8'',58. La parallaxe de la Lune est bien plus grande, puisqu'elle est quelquefois de plus d'un degré.

24. Dans le cas de la Terre elliptique, il ne faut pas toujours confondre la parallaxe horizontale avec la plus grande parallaxe de hauteur, comme cela était permis dans l'hypothèse précédente. En effet, pour un observateur en A (*fig.* 6) sur le méridien elliptique PA, la parallaxe horizontale de l'astre S est l'angle S du triangle obliquangle ASC formé par l'horizontale ou tangente AS, le rayon CA de la Terre au point A et la distance CS. Or, en supposant l'astre en S' au-dessous de l'horizon, et à l'extrémité de la droite AS' perpendiculaire au rayon AC, l'angle S' sera la plus grande parallaxe de hauteur, relativement à une sphère du rayon dont il s'agit : l'angle S est donc en général plus petit que S'. Cependant il est des astronomes qui, en parlant dans leurs

écrits de la parallaxe horizontale, veulent désigner l'angle S'. Lorsque le lieu A de l'observateur est sur l'équateur même, la parallaxe horizontale, qui est aussi la plus grande parallaxe de hauteur, se nomme *parallaxe équatoriale*.

25. Indépendamment des parallaxes dont nous venons de parler, il en est d'autres qu'il est utile de connaître; ce sont les parallaxes d'ascension droite et de déclinaison, celles de longitude et de latitude : celles-ci n'existeraient pas, si la plus grande parallaxe de hauteur était nulle. Toutes résultent de ce que le rayon terrestre est comparable à la distance de la Terre à l'astre, ou, ce qui revient au même, de ce que deux observateurs, l'un placé au centre C de notre globe (*fig.* 7), l'autre à la surface A, ne rapporteraient pas un astre, la Lune L par exemple, au même point du ciel. Le lieu L″ d'un astre L vu du centre C de la Terre s'appelle le *lieu vrai*, et le lieu L′ vu de la surface terrestre, se nomme le *lieu apparent*.

Il résulte de là que ces deux lieux étant distincts sur la sphère céleste, l'ascension droite et la déclinaison vraies, ou la longitude et la latitude vraies diffèrent en général de l'ascension droite et de la déclinaison apparentes.

La parallaxe de déclinaison est la différence entre la déclinaison vraie et la déclinaison apparente; il en est de même de la parallaxe d'ascension droite ou d'*angle horaire*, et des autres parallaxes. En effet, soit ♈ le point équinoxial du Bélier, ♈$l''l'$ l'équateur et P le pôle. Si, par le lieu vrai L″ et le lieu apparent L′ de l'astre L, on conçoit deux cercles de déclinaison PL″l'', PL′l', l'arc ♈l'' de l'équateur sera l'ascension vraie, et l'arc ♈l' l'ascension droite apparente; et d'après la définition ci-dessus, $l''l'$, mesure de l'angle sphérique l''Pl', sera la parallaxe d'ascension droite ou d'angle horaire. De même, l'arc l''L″ représentant la déclinaison vraie, tandis que l'L′ représente la déclinaison apparente, il suit de là que la différence de ces deux arcs sera la parallaxe de déclinaison. Enfin, Z étant le zénith du lieu A, et l'arc ZL″L′ le vertical de l'astre L, l'angle L′LL″ sera la parallaxe de hauteur, et l'angle PZL″ l'azimut de l'astre dont il s'agit, puisque ZP est le méridien du lieu A.

26. Maintenant, si l'on considère l'arc céleste ♈$l''l'$ comme l'éclip-

tique, et P comme le pôle de ce cercle, la plupart des dénominations précédentes changeront nécessairement; car on voit bien que les ascensions droites seront des longitudes, et les déclinaisons des latitudes: ainsi la parallaxe d'ascension droite prendra le nom de *parallaxe de longitude*, et la parallaxe de déclinaison le nom de *parallaxe de latitude*. Les étoiles sont dépourvues de toutes ces espèces de parallaxes.

27. A la rigueur, le rayon terrestre CA prolongé dans le ciel, ne se confondant pas toujours avec la verticale du point A, il existe aussi pour cette raison deux sortes d'azimut: l'un est l'azimut vrai, qui est relatif au zénith géocentrique indiqué par le rayon de la Terre; l'autre l'azimut apparent, qui se rapporte au zénith de même dénomination, et qui est le seul qu'on observe; mais nous n'aurons par la suite aucune occasion d'avoir égard à la *parallaxe d'azimut*.

CHAPITRE VI.

DU MOUVEMENT ET DES PHASES DE LA LUNE; DE SES PRINCIPALES INÉGALITÉS ET DE SON ACTION SUR LES EAUX DES MERS.

28. La Terre, en décrivant son orbe autour du Soleil, est accompagnée de son satellite, c'est-à-dire de la Lune, qui, par son mouvement propre d'occident en orient, décrit elle-même une ellipse dont le centre de la Terre occupe un des foyers. L'orbe lunaire est incliné sur l'écliptique de 5° 9′ environ, et rencontre cette courbe en deux points opposés qu'on appelle *nœuds* de la Lune; ainsi la ligne des nœuds est la droite qui joint ces deux points. On entend par *nœud ascendant* ☊ celui que traverse la Lune pour entrer dans l'hémisphère boréal ou supérieur; l'autre est le *nœud descendant* ☋.

La Lune n'est point lumineuse par elle-même; elle n'est visible que parce que sa surface a la propriété de réfléchir la lumière qu'elle reçoit directement du Soleil, puisqu'elle s'éclipse quand la Terre est interposée entre elle et cet astre. L'observation répétée des taches fixes et nombreuses qui sont répandues sur son disque, a fait connaître qu'elle nous présente à peu près le même hémisphère; mais les taches qui en avoisinent le bord, tantôt s'en approchent, tantôt s'en éloignent. Ce balancement, qui n'est qu'apparent, se désigne sous le nom très expressif de *libration:* il résulte de ce que la Lune, en parcourant son orbite dans l'espace de $27^j \frac{1}{3}$, ne tourne pas sur elle-même exactement dans le même temps. Ce mouvement de rotation a lieu, comme celui de la Terre, d'occident en orient.

Les astronomes ont reconnu en outre que la Lune n'a pas d'atmosphère sensible; ainsi elle ne peut être habitée par des êtres de notre nature.

29. Les *phases* de la Lune sont les différents aspects sous lesquels elle se présente à nous. Par exemple, elle est *pleine* quand son disque est totalement éclairé; *nouvelle* quand son disque est privé de lumière, et dans ses *quartiers* lorsqu'elle paraît en demi-cercle. L'explication de ces diverses apparences ne présente aucune difficulté, si l'on fait attention que la révolution de la Lune, qui a lieu d'occident en orient, s'effectue en beaucoup moins de temps que celle du Soleil dans le même sens; car, en supposant la Terre immobile, le Soleil décrit son orbe en $365^{j}\frac{1}{4}$ environ, et la Lune au contraire décrit le sien en $27^{j}\frac{1}{3}$. Il suit de là que si un certain jour la Lune est entre la Terre et le Soleil, c'est-à-dire en conjonction, elle paraîtra bientôt après à l'orient, par rapport à cet astre. Dans sa position primitive, elle répond au même point du ciel que le Soleil, et sa partie éclairée est invisible pour nous; alors elle est nouvelle. Un jour ou deux après la conjonction ☌, la Lune paraît en forme de croissant dont les pointes ou cornes sont tournées vers l'orient. Peu à peu ce croissant s'élargit, parce que la distance angulaire de la Lune au Soleil, ou son *élongation*, augmente de plus en plus. Lorsque cette distance est de 90°, la Lune est dans son premier quartier; et lorsque la Lune se trouve en opposition ☍ avec le Soleil, ou éloignée de lui de 180°, elle est pleine. Ensuite les mêmes phases reparaissent, mais dans un ordre inverse; c'est-à-dire que quand la Lune est, par exemple, éloignée de 270° du Soleil, elle est dans son dernier quartier, et pour lors la partie éclairée de son disque est à l'orient. Ces quatre principales phases se succèdent tous les sept à huit jours, et prouvent que la Lune est un corps sensiblement sphérique.

Les points de conjonction et d'opposition se nomment *syzygies*, et les autres points par lesquels passe la Lune, et qui sont à égale distance des syzygies, se nomment *quadratures* □. Quant aux points également distants des syzygies et des quadratures, on les appelle *octans*.

La partie de cet astre qui est privée de la lumière directe du Soleil, n'est pas cependant tout-à-fait invisible, parce qu'elle est un peu éclairée par les rayons solaires que la Terre réfléchit: c'est cette faible lueur qu'on nomme *lumière cendrée*.

Il ne faut pas croire pourtant, d'après ce qui précède, qu'il y ait éclipse de Soleil à chaque conjonction, et éclipse de Lune à chaque op-

position; car le premier phénomène ne peut arriver que quand la Lune se trouve précisément entre la Terre et le Soleil, et le second phénomène, que quand la Terre est précisément entre le Soleil et la Lune, auquel cas celle-ci est plongée en tout ou en partie dans l'ombre de la Terre.

30. Nous avons dit ci-dessus que la Lune, après 27 jours $\frac{1}{3}$ environ, revenait au même cercle de latitude où elle se trouvait à son départ; mais pour qu'elle rejoigne le Soleil il lui faut au moins deux jours de plus. Ainsi il s'écoule 29 jours $\frac{1}{2}$ d'une conjonction à l'autre; c'est là ce qui constitue le *mois synodique* ou une lunaison. Plus exactement ce mois, qui est l'intervalle moyen entre deux nouvelles ou deux pleines Lunes, $= 29^{j}\,12^{h}\,44^{m}\,3^{s}$. Le temps que la Lune emploie pour faire sa révolution sidérale d'occident en orient est de $27^{j}\,7^{h}\,43^{m}\,12^{s}$; mais elle met 7^{s} de moins pour revenir au même équinoxe: c'est ce qu'on nomme le *mois tropique* ou *périodique*. Dans l'usage civil on compte les mois synodiques alternativement de 29 et 30 jours; or, une année lunaire étant composée de 12 lunaisons, se trouve être de 11 jours plus courte qu'une année solaire commune.

31. La Lune a un mouvement très irrégulier dans son orbite; cela tient à ce que son mouvement elliptique est sans cesse troublé par l'action du Soleil et des planètes environnantes. Les géomètres et les astronomes ont constamment réuni leurs efforts pour tâcher d'en compléter la théorie; et ceux-ci ont remarqué, depuis un temps immémorial, que les nœuds de l'orbite lunaire ont un mouvement rétrograde irrégulier et tellement rapide, qu'ils parcourent l'écliptique en 18 ans $\frac{1}{2}$ environ.

32. On conçoit bien que pour connaître exactement le lieu de la Lune, c'est-à-dire sa véritable position dans son orbite, il faut d'abord, comme pour le Soleil, considérer son mouvement purement elliptique, et ensuite avoir égard à toutes les inégalités périodiques et séculaires qui affectent ce mouvement. La plus considérable des inégalités périodiques est l'*évection*, qui diminue l'équation du centre dans les syzygies et l'augmente dans les quadratures; elle est proportionnelle au sinus du double de la distance angulaire de la Lune au Soleil,

moins l'anomalie moyenne de la Lune; et la période est environ de $31^{j}\frac{8}{10}$. Une autre inégalité assez grande se manifeste dans les syzygies et les quadratures, et est proportionnelle au sinus du double de l'élongation; elle se nomme *variation :* sa durée est d'une demi-révolution synodique. Enfin le mouvement angulaire de la Lune s'accélère ou se ralentit annuellement, quand le Soleil s'éloigne ou se rapproche de la Terre; ce qui forme une troisième inégalité désignée sous le nom d'*équation annuelle*, laquelle a pour argument l'anomalie moyenne du Soleil : sa période est d'une année solaire anomalistique (art. **14**).

A ces trois inégalités très sensibles se joignent beaucoup d'autres, mais très petites, que les tables lunaires donnent le moyen d'apprécier; alors, en les réunissant toutes à la longitude moyenne, on obtient la longitude vraie. En Astronomie, les petites quantités qu'on ajoute aux valeurs moyennes, pour avoir les valeurs vraies, se nomment *équations*.

Pour plus de clarté, soient ♈N l'écliptique (*fig.* 8), P le pôle boréal de ce cercle, ♈ le point équinoxial du printemps, NL l'orbite de la Lune, L son lieu vrai, et T la Terre. On aura par les tables, la longitude ♈N du nœud ☊, la distance de ce nœud au périgée p, l'anomalie vraie pL, l'inclinaison LNL′ de l'orbite, et par suite la longitude ♈L′, la latitude LL′ et le rayon vecteur TL.

Nous ne pouvons citer toutes les inégalités qui affectent les éléments de l'orbe lunaire, parce qu'il n'entre pas dans notre plan de traiter cette matière avec tous les détails dont elle est susceptible : nous ferons cependant remarquer encore, à cet égard, que le périgée de la Lune a un mouvement direct et irrégulier, et qu'il fait le tour du ciel en 9 ans; que le mouvement des nœuds, dont nous avons déjà parlé, est assujetti à une inégalité semblable à celle qui affecte le périgée; enfin que le mouvement du périgée et le mouvement des nœuds de l'orbite lunaire se ralentissent tandis que celui de la Lune s'accélère.

L'analyse seule a pu faire découvrir les lois de ces inégalités et de celles qui affectent la distance de la Lune à la Terre, sa latitude, l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite lunaire. (*Voyez*, pour de plus amples éclaircissements, l'*Exposition du système du Monde* de Laplace, et la *Mécanique céleste* de ce grand géomètre.)

DES MARÉES.

33. En vertu de la gravitation universelle, la Lune agit sur la masse entière de notre globe dont les parties fluides, pour céder à cette action plus ou moins forte, et même à celle du Soleil, produisent dans le vaste Océan des oscillations continuelles désignées sous les noms de *flux* et *reflux* ou sous celui de *marées*. En ne considérant ce phénomène que relativement au Soleil, son effet est le plus grand aux équinoxes. La marée lunaire est aussi la plus forte quand la Lune est dans l'équateur. En général le Soleil et la Lune exercent leur puissance attractive avec d'autant plus d'énergie que ces deux astres sont plus près de nous, et les phénomènes qui en résultent sont d'autant plus sensibles qu'une mer a plus d'étendue. De là vient que la marée solaire est agrandie au 1er janvier et que celle de la Lune l'est également lorsque cet astre est au périgée. Aux époques des équinoxes, les marées sont donc les plus fortes si la Lune est périgée et dans son nœud sur l'équateur, et elles sont les plus faibles quand la Lune est apogée et qu'elle a une grande déclinaison. Il faut qu'il s'écoule un certain temps pour que le phénomène de la marée, annoncé par le calcul, se réalise complétement; ainsi la marée d'une syzygie n'est à son *maximum* d'intensité que 36 heures après la nouvelle ou la pleine Lune. Les causes constantes qui donnent lieu à ce qu'on appelle l'*établissement du port* sont ce retard de 36 heures après l'action des deux astres attirants, et celui qui est dû aux circonstances des localités. La *Connaissance des Temps* et l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* indiquent chaque année les époques des plus grandes marées, calculées par les formules de la *Mécanique céleste*, et les hauteurs auxquelles ces marées parviennent relativement au niveau *moyen* de la mer; c'est-à-dire à celui qui existerait sans l'action luni-solaire, ou qui, à l'époque des équinoxes, tient le milieu entre les plus hautes et les plus basses eaux.

CHAPITRE VII.

DE LA PRÉCESSION DES ÉQUINOXES, DE LA NUTATION, DE L'ABERRATION, ET DU DÉPLACEMENT DE L'ÉCLIPTIQUE.

34. Suivant ce que nous avons déjà fait observer (art. **14**), les points équinoxiaux se déplacent dans le ciel, et leur mouvement a lieu contre l'ordre des signes. Il résulte de là que les longitudes des étoiles augmentent progressivement de la même quantité dans le même intervalle de temps, par exemple, de 50″,1 par an environ, tandis que leurs latitudes restent constantes; il s'ensuit en outre que le Soleil arrive un peu plus tôt aux équinoxes que si ces points étaient fixes. Or, les douze signes du zodiaque, qu'il ne faut pas confondre, comme nous l'avons déjà dit, avec ses douze constellations, et qui ne sont, à proprement parler, que des points équidistants de l'écliptique, participent nécessairement du mouvement des points équinoxiaux, et s'avancent comme eux d'orient en occident d'une quantité angulaire de 50″,1 par an. C'est ce mouvement qu'on nomme *précession des équinoxes*. A l'époque ignorée de l'invention du zodiaque, l'équinoxe du printemps se trouvait dans la constellation du Bélier, et celui d'automne dans la constellation de la Balance; mais maintenant, par l'effet du mouvement rétrograde de ces points, le Soleil se trouve au commencement du printemps dans la constellation des Poissons. Selon les calculs les plus exacts des astronomes, les signes coïncidaient avec les constellations zodiacales en l'an 417 avant l'ère chrétienne.

En considérant l'obliquité de l'écliptique comme invariable et l'équateur céleste comme un plan mobile, la ligne des équinoxes, par son déplacement, fait évidemment décrire à celle des pôles de l'équateur la surface courbe d'un cône droit, puisque ces deux lignes doivent toujours être perpendiculaires entre elles. Les pôles dont il s'agit dé-

crivent donc chacun en 25 868 ans environ, des cercles parallèles à l'écliptique: c'est la période de la précession.

Dans l'hypothèse de l'immobilité absolue des points équinoxiaux, il faudrait admettre que toutes les étoiles ont un mouvement commun et direct de 50",1 par an, puisque telle est la quantité moyenne dont s'accroissent annuellement leurs longitudes; mais la raison se refuse à croire à la réalité d'un pareil mouvement. La précession des équinoxes n'affecte donc pas la latitude; cependant son effet se porte sur l'ascension droite et sur la déclinaison, ainsi qu'il est aisé de le voir. Nous aurons, par la suite, à évaluer les variations qu'éprouvent ces deux dernières coordonnées, en vertu d'un changement survenu dans la longitude pendant un intervalle de temps donné: c'est en cela que consiste le calcul des positions moyennes des étoiles.

35. Nous venons de considérer l'écliptique comme fixe dans le ciel; mais elle se déplace réellement peu à peu, et la diminution séculaire de son obliquité, constatée par l'observation et la théorie de l'attraction universelle, est d'environ 48". De là la nécessité de rapporter l'écliptique apparente ou mobile à un plan fixe, pour connaître dans tous les temps sa position dans l'espace. Ainsi prenant, par exemple, l'écliptique ♈E de 1750 (*fig.* 9) pour ce plan fixe, et ♈Q pour l'équateur; au bout d'un certain laps de temps l'écliptique aura pris la position NE', et l'équateur celle ♈'Q', en sorte que l'intersection de ces deux grands cercles sera ♈". Alors l'obliquité primitive $\omega = 23^\circ 28' 18''$, c'est-à-dire celle qui avait lieu à l'époque de 1750, ne sera plus que $\omega - d\omega$, en désignant par $d\omega$ la diminution de cet angle, pour l'intervalle de temps compris entre 1750 et l'époque choisie; mais l'angle E♈'Q' sera, à la seconde époque, $\omega + d\omega'$. Dans le même intervalle l'arc ♈♈' mesurera la précession qu'on nomme *luni-solaire*, parce qu'elle est produite par l'action combinée de la Lune et du Soleil sur le sphéroïde terrestre; sa valeur annuelle est, suivant la théorie de Laplace et les observations les plus récentes de M. Bessel, de 50",375. Mais l'écliptique, par suite des perturbations des autres planètes, ayant pris la position NE', la précession que les astronomes observent réellement est mesurée par l'arc ♈,♈", le point ♈, étant celui où se trouvait l'équinoxe ♈ en 1750. Cette seconde précession, qui est annuelle-

ment de 50″,1 valeur moyenne, ou, selon M. Bessel, de 50″,211, forme ce que l'on nomme la *précession générale* ou *totale*. Il résulte de là que le mouvement annuel et direct du point équinoxial en longitude est de 50″,375 — 50″,211 = 0″,164; tandis que le mouvement direct du même point en ascension droite est de (0″,164): cos ω = 0,17879 dans le même temps, à compter de 1750. Nous reviendrons, par la suite, sur ce sujet.

36. La précession des équinoxes et l'obliquité de l'écliptique sont en outre sujettes à varier périodiquement: cette variation ou inégalité se désigne sous le nom de *nutation*, parce que l'on a remarqué que l'axe de la Terre ou du monde est doué d'une espèce de mouvement oscillatoire qui augmente et diminue alternativement de 9″,6, dans l'espace de 18 ans et demi environ, l'*obliquité moyenne* de l'écliptique. On entend par obliquité moyenne celle qui aurait lieu sans ce phénomène, et qui ne serait alors affectée que de la diminution séculaire de 48″. Il faut donc distinguer cette obliquité de l'obliquité apparente, comme il faut établir une différence entre la précession moyenne et la précession vraie, qui se compose de la première corrigée de la nutation.

Cette nutation résulte de l'influence que la Lune exerce sur le sphéroïde terrestre; et comme elle déplace l'équateur, il s'ensuit qu'en général les ascensions droites et les déclinaisons moyennes des astres éprouvent de petites variations périodiques; il est donc nécessaire de les évaluer pour connaître les ascensions droites et déclinaisons vraies.

La période de la nutation étant précisément celle du mouvement des nœuds de la Lune (art. **31**), il était naturel de penser, avant d'approfondir la théorie de ces deux phénomènes, qu'ils sont nécessairement liés l'un à l'autre. Mais l'analyse seule a pu faire découvrir que la nutation a pour argument la longitude moyenne du nœud ascendant.

37. On peut, par une construction géométrique, représenter le double effet de la précession et de la nutation lunaire sur la position des astres rapportée à l'équateur. Soient, par exemple (*fig.* 10), ♈E l'écliptique, P′ son pôle nord, C son centre, *p* le pôle *moyen* de l'é-

quateur ♈Q; alors l'angle pCP' sera égal à l'obliquité moyenne ω. Soient en outre pR le cercle que le pôle moyen p décrit en vertu de la précession, et $a\pi b\pi'$ une petite ellipse tangente à la sphère céleste, dont le grand axe ab soutendant un arc de 18″,8 soit dans le plan du cercle de latitude P′E, ayant son centre en p, et dont le petit axe $\pi'\pi'' = 18'',8 \frac{\cos 2\omega}{\cos \omega}$, ainsi qu'il résulte de la théorie. Cela posé, tandis que le pôle moyen p décrit en 25868 ans le cercle de précession pR, le pôle vrai π de l'équateur, ou son correspondant, celui de la Terre, parcourt, contre l'ordre des signes et conformément à la loi que l'observation indique, l'ellipse de nutation $\pi\pi'b$. L'obliquité vraie ou apparente de l'écliptique, qui sera à tout moment représentée par l'angle $\pi CP'$, variera par conséquent depuis $\omega + 9'',4$ jusqu'à $\omega - 9'',4$. Ainsi quand le pôle vrai occupera l'une des extrémités du petit axe $\pi'\pi''$, l'obliquité sera seulement ω, et la nutation en déclinaison sera nulle : au contraire, quand le pôle vrai arrivera à l'une des extrémités ab du grand axe, la nutation en déclinaison sera, abstraction faite du signe, de 9″,4; tandis que la nutation en ascension droite sera nulle. Il résulte de là que l'équinoxe moyen est l'intersection de l'équateur moyen ♈Q♎ et de l'écliptique ♈E♎, et que l'équinoxe vrai est l'intersection de cette écliptique et de l'équateur dont π est le pôle.

Le Soleil produit lui-même un phénomène tout semblable, mais dont les effets sont beaucoup plus faibles; cependant, pour avoir le lieu vrai d'un astre avec toute la précision possible, il est indispensable d'avoir égard à cette nutation solaire, comme on le verra par la suite.

38. Un autre phénomène non moins remarquable est celui de l'*aberration;* il est tel, que toutes les étoiles paraissent décrire annuellement de petites ellipses plus ou moins excentriques, et ne pas conserver exactement leurs positions respectives. On l'explique aisément, en l'attribuant à la sensation que le mouvement de la Terre autour du Soleil et celui de la lumière des astres produisent en même temps sur l'organe de la vue; car la transmission de ce fluide n'est point instantanée comme on l'a cru pendant longtemps. En effet, l'on a re-

connu, par une longue suite d'observations des éclipses des satellites de Jupiter, que la lumière met 8′ 13″,2 à parcourir le demi grand axe de l'orbe terrestre.

Pour concevoir la raison de ce fait, soient S le Soleil (*fig.* 11), TT′ l'orbite de la Terre, JJ′ celle de Jupiter. Quand la Terre est en T et Jupiter en J, cette planete est en opposition et plus près de la Terre que si elle était en conjonction, c'est-à-dire que si, se trouvant toujours en J, la Terre était en T′. Dans cet état de choses, lorsqu'un satellite L sort du cône d'ombre que Jupiter projette derrière lui par rapport au Soleil, la lumière qu'il réfléchit alors et qui arrive jusqu'à nous, a parcouru, à l'époque de la conjonction, tout le diamètre de l'orbe terrestre de plus qu'à l'époque de l'opposition. Or, d'après la connaissance exacte que l'on a des mouvements célestes, on peut prédire l'instant physique du commencement ou de la fin d'une éclipse de cette espèce. Mais ce phénomène paraît toujours arriver 16′ 26″,4 plus tard lors de la conjonction que vers l'opposition. La vitesse de la lumière est donc alors appréciable à nos sens; et puisqu'il est naturel de la supposer uniforme, il s'ensuit que la lumière parcourt réellement le demi grand axe de l'orbe terrestre en 493ˢ,2 de temps.

Cela posé, si la Terre et un astre lumineux étaient en repos dans l'espace, il est évident que nous verrions cet astre dans la direction même du rayon qui, dans le système de l'émission de la lumière, nous en apporte l'image; mais si au contraire la Terre parcourt l'écliptique dans une année sidérale, et par conséquent un arc moyen de 20″,25 dans 493ˢ,2 de temps, sa vitesse sera comparable à celle de la lumière: alors, en même temps qu'une molécule lumineuse lancée d'un astre supposé immobile, d'une étoile par exemple, frappera la rétine, elle sera repoussée dans le sens du mouvement de la Terre, c'est-à-dire suivant la tangente à son orbite; et l'œil éprouvera une sensation composée qui sera représentée par la résultante des deux vitesses dont il s'agit, et qui fera paraître l'astre dans la direction même de cette résultante. Il suit de là que nous ne voyons pas les astres dans le lieu qu'ils occupent réellement. L'angle que la résultante de la vitesse de la Terre et de la vitesse de la lumière fait avec celle-ci, mesure l'effet total de l'aberration. Le plan de cet angle décrit donc annuellement une circonférence entière autour de la droite qui joint la

Terre et l'astre; c'est là le phénomène observé. Dans le cas actuel, la *position apparente* d'un astre n'est autre que sa position vraie affectée de l'aberration, comme la position vraie n'est autre que la position moyenne corrigée de la nutation. Toutefois il ne faut pas confondre la position apparente produite par la parallaxe (art. **25**) avec la position apparente résultant de l'aberration, ni avec celle à laquelle la réfraction donne lieu.

39. Indépendamment de ces mouvements généraux, l'on a reconnu dans quelques-unes des étoiles les plus brillantes des mouvements particuliers très lents, mais que la suite des temps et de bonnes observations rendront plus sensibles. On est porté à croire, par analogie, que toutes les étoiles ont des mouvements semblables qui se dévoileront dans les siècles futurs; que le Soleil lui-même se meut dans l'espace en entraînant tout notre système planétaire. Pour se rendre raison de la manière dont les astronomes s'assurent de l'existence de ces mouvements propres, il suffit de savoir que quand ils ont observé la position apparente d'une étoile, par exemple son ascension droite et sa déclinaison apparentes, ils la dépouillent de l'aberration et de la nutation dont elle se trouve affectée, afin de connaître l'ascension droite et la déclinaison moyennes de cette étoile pour la même époque. Or, une observation et une réduction semblables étant faites pour une autre époque éloignée de la première, de 50 ans par exemple, ils connaissent de même pour cette seconde époque l'ascension droite moyenne et la déclinaison moyenne de l'étoile. Alors si en calculant la position moyenne de l'astre, à l'aide de la précession moyenne bien connue, les deux résultats ne sont pas identiques, leur différence, en la supposant assez sensible pour ne pas être uniquement attribuée aux erreurs d'observation, est le mouvement propre de l'étoile. Ce mouvement, tant en ascension droite qu'en déclinaison, et dont la loi est absolument inconnue, étant divisé par 50, exprime par approximation le mouvement propre annuel. Ordinairement on le confond avec celui qui est dû à la précession; ainsi dans les catalogues d'étoiles, comme dans celui que renferme la *Connaissance des Temps*, le mouvement annuel, soit en ascension droite, soit en déclinaison, se compose de la

précession et du mouvement propre s'il y a lieu. On juge par là comment, en Astronomie, les observations sont rendues comparables entre elles, lorsqu'elles sont relatives à des époques différentes; c'est ce que l'on verra par la suite.

Les horloges ou pendules astronomiques réglées exactement sur le temps sidéral, marquent les ascensions droites *apparentes* des étoiles, à l'instant de leur culmination ou de leur passage au méridien supérieur (art. **11**).

CHAPITRE VIII.

EXPOSITION ABRÉGÉE DU SYSTÈME PLANÉTAIRE.

40. A mesure que les découvertes se multiplièrent en Astronomie, l'on sentit davantage la nécessité de renoncer à l'hypothèse de l'immobilité de la Terre, pour expliquer les diverses apparences des mouvements des astres; aussi le système de Copernic a-t-il fini par triompher de toutes les futiles objections des partisans de cette immobilité. Ce système est appuyé sur un des faits les plus remarquables du mécanisme de la nature, savoir : que la Terre accompagnée de la Lune, ainsi que toutes les autres planètes, tournent d'occident en orient autour du Soleil, dans des orbes à peu près circulaires. Or il est prouvé en Mécanique qu'un corps, en vertu de son inertie, ne peut se donner du mouvement, ni se priver de celui qu'il a reçu : il faut donc qu'une impulsion primitive ait lancé les planètes dans l'espace, et que de plus il existe une force qui agisse sur elles, pour les ramener sans cesse vers le centre du Soleil; sans quoi leur mouvement serait perpétuellement rectiligne. Mais l'impulsion donnée, quelle qu'ait pu en être la cause, n'ayant pas sans doute été dirigée par le centre de gravité de ces corps, ils ont dû prendre en outre un mouvement de rotation, comme il arrive à un ballon lancé dans l'air. En effet, l'on est parvenu à constater l'existence de ce dernier mouvement dans plusieurs des planètes et dans le Soleil même, par l'observation des taches adhérentes à leur surface; et ce qu'il y a de bien remarquable, c'est que ce mouvement de rotation a également lieu d'occident en orient. A l'égard de la Terre, sa révolution diurne est de 24 heures sidérales (art. 4).

L'astronome Képler, cherchant à connaître les lois des mouvements planétaires, trouva qu'il en existe trois : ces lois, plutôt vérifiées que

démontrées d'abord, sont essentiellement liées à un principe général de la nature, dont l'importante découverte est due à Newton, savoir : *que tous les corps se comportent entre eux comme s'ils s'attiraient mutuellement en raison directe de leurs masses, et réciproquement aux carrés de leurs distances respectives* : tel est le fondement de toutes les théories astronomiques.

Quoique les lois de Képler se trouvent énoncées dans la plupart des éléments de Mécanique, cependant nous les rappellerons ici en faveur de quelques lecteurs.

1°. *Le mouvement de la Terre, et celui de toutes les autres planètes, s'opère dans des ellipses ayant un foyer commun occupé par le centre du Soleil;*

2°. *Les aires décrites autour du Soleil par le rayon vecteur des planètes, sont proportionnelles aux temps employés à les décrire;*

3°. *Les carrés des temps des révolutions des planètes autour du Soleil, sont entre eux comme les cubes de leurs moyennes distances à cet astre.*

La situation d'une planète, ou son lieu dans l'espace pour un instant quelconque, dépend de sept quantités qu'on nomme *éléments du mouvement elliptique*. Deux de ces éléments déterminent la position de l'orbite de la planète : c'est d'une part la *longitude des nœuds* de cette orbite, ou de ses points d'intersection avec l'écliptique, et de l'autre l'*inclinaison de l'orbite* sur ce plan. Les cinq autres éléments se rapportent au mouvement de la planète, et sont : 1° *la durée de la révolution sidérale;* 2° *le demi grand axe de l'orbite*, ou la moyenne distance de la planète au Soleil; 3° *l'excentricité de l'orbite;* 4° *la longitude du périhélie* à une époque donnée; 5° *la longitude héliocentrique de la planète*, ou son lieu dans l'orbite à la même époque.

41. Si les planètes étaient assez éloignées les unes des autres, ou que leurs masses fussent assez petites pour que leur attraction réciproque fût insensible, leur mouvement elliptique autour du Soleil serait parfaitement d'accord avec les lois énoncées précédemment; mais l'écart entre l'observation et la théorie, que l'on remarque à l'égard de certaines planètes, prouve que l'action des astres qui les avoisinent trouble plus ou moins leur mouvement. L'effet de cette action, que

l'Astronomie moderne sait mesurer, se désigne sous le nom de *perturbation du mouvement elliptique*, comme nous l'avons déjà dit. Les périodes de ces perturbations sont plus ou moins longues.

C'est aussi par suite de la gravitation universelle que les orbes planétaires éprouvent divers changements dévoilés par des observations suivies et faites avec le plus grand soin; tels sont ceux qui se manifestent dans leurs excentricités, leurs inclinaisons sur l'écliptique, ainsi que dans la position de leurs nœuds et de leurs périhélies, leurs grands axes seuls exceptés. Ces variations se nomment *inégalités séculaires*, parce qu'elles ne deviennent bien sensibles qu'après un laps de temps assez considérable.

42. Les planètes connues de tous temps, parce qu'on les aperçoit à la vue simple, sont: *Mercure* ☿, *Vénus* ♀, *Mars* ♂, *Jupiter* ♃, *Saturne* ♄; mais l'on doit au télescope la découverte récente d'*Uranus* ♅, *Cérès* ⚳, *Pallas* ⚴, *Junon* ⚵, *Vesta* ⚶. C'est aussi à l'aide de ce précieux instrument qu'on a observé les satellites de quelques-unes de ces planètes. Jupiter en a quatre, Saturne sept, et de plus cette planète est entourée d'un anneau mince et presque plat, qui n'est lui-même visible que parce qu'il réfléchit la lumière du Soleil; c'est ce que prouve en effet l'ombre de cet anneau sur le disque de la planète, et celle de la planète sur la partie postérieure de l'anneau relativement au Soleil. Enfin Uranus possède six satellites. Tous les satellites tournent d'occident en orient autour de leurs planètes respectives.

Les lois de Képler, auxquelles est soumis le mouvement des planètes autour du Soleil, se manifestent dans chaque système de satellites; cependant elles sont loin, pour la Lune, de représenter les observations, parce que ce satellite éprouve des perturbations de la part du Soleil, ainsi que le démontre la théorie de l'attraction. Il est aussi des faits qui ne peuvent être constatés ou découverts que par l'analyse la plus savante. Par exemple, l'illustre auteur de la *Mécanique céleste* a démontré que *le moyen mouvement angulaire du premier satellite de Jupiter, plus deux fois celui du troisième, est et sera toujours égal à trois fois celui du second.*

C'est encore M. Laplace qui est parvenu à cet autre résultat très singulier, savoir: que *la longitude moyenne du premier satellite de*

cette même planète, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est exactement égale à deux angles droits. On tire de là, entre autres conséquences, que les trois premiers satellites de Jupiter ne pourront jamais être éclipsés à la fois.

Les satellites, reconnus pour être des corps opaques, sont éclipsés quand ils se trouvent dans le cône d'ombre que leur planète projette derrière elle, par rapport au Soleil.

La perfection donnée aux tables des deux premiers satellites de Jupiter, permet de faire servir utilement les observations de leurs éclipses à la détermination des longitudes terrestres; parce que les *immersions* et les *émersions* de ces corps célestes sont des phénomènes subits qui, à l'aide de bonnes lunettes et de bons yeux, se remarquent au même instant physique en différents lieux de la Terre.

43. Les orbites de Mercure et de Vénus sont renfermées dans celle de la Terre; ces deux planètes se nomment, pour cette raison, *planètes inférieures:* elles présentent des phases semblables à celles de la Lune. Mercure est difficile à voir, parce qu'il est très près du Soleil, et souvent plongé dans ses rayons. Mais Vénus, surpassant par son éclat et sa blancheur toutes les autres planètes, s'observe beaucoup mieux, et ses phases, vues au télescope, sont bien plus distinctes. Cette planète s'éloigne du Soleil jusqu'à environ 48°; elle est connue vulgairement sous le nom d'*étoile du jour* ou d'*étoile du soir,* selon qu'elle précède le lever du Soleil, ou qu'elle paraît après le coucher de cet astre: on la voit quelquefois en plein jour à la vue simple.

Les passages de Mercure et de Vénus sur le disque du Soleil, dont les durées sont sensiblement différentes en divers points de la Terre, à cause de la parallaxe, ont servi à déterminer celle du Soleil, et par suite la distance de cet astre à nous. On présume que ces trois corps célestes ont chacun une atmosphère.

Toutes les autres planètes sont dites *supérieures,* parce que leurs orbites embrassent celle de la Terre, et que par conséquent elles s'éloignent du Soleil à toutes les distances angulaires possibles. Mars est le plus près de nous; Jupiter vient ensuite. On aperçoit au télescope, sur les disques de ces deux planètes, et surtout sur Jupiter, diverses bandes obscures, parallèles et changeantes, ainsi que des taches qui

deviennent plus ou moins apparentes. Ces changements supposent une grande agitation à la surface de ces corps ou dans leur atmosphère, puisque, malgré l'énorme distance à laquelle ils se produisent par rapport à nous, ils sont encore sensibles.

Mars est d'une couleur rougeâtre; il présente aussi des phases, mais sous forme oblongue: celles de Jupiter sont insensibles, à cause de son grand éloignement du Soleil et de la Terre. On a en outre observé dans Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne, un mouvement de rotation d'occident en orient, et à peu près dans le plan de leurs orbites.

Saturne, bien moins brillant que Jupiter, était, avant la découverte d'Uranus, aux confins du système planétaire. Il est surtout remarquable par son anneau, dont il est entièrement détaché: son disque paraît toujours rond; mais l'anneau situé dans le plan de l'équateur de la planète, et qui, à cause de son obliquité, paraît ordinairement elliptique, cesse d'être visible quand il se présente à nous de profil, ou du moins on ne l'aperçoit alors, à l'aide d'une forte lunette, que comme un filet lumineux: on croit même que cet anneau est composé de deux couronnes isolées.

La rotation de l'anneau et celle de la planète sont de même durée, et ont lieu d'occident en orient.

La planète Uranus, découverte par Herschel en 1781, a pu être prise souvent pour une étoile, à cause de son peu d'éclat, de sa petitesse et de la lenteur de son mouvement. Elle décrit en 84 ans un orbe qui comprend ceux de toutes les autres planètes. L'analogie porte à croire qu'elle est opaque, et qu'elle tourne aussi sur elle-même; mais jusqu'à présent l'on n'a pu en acquérir la preuve certaine.

Les autres planètes découvertes plus récemment encore, sont, comme nous l'avons déjà dit, *Cérès, Pallas, Junon* et *Vesta*. On ne les aperçoit, même très difficilement, qu'avec une très bonne lunette, et c'est pour cette raison qu'elles ne peuvent intéresser que les astronomes. Leurs orbites sont comprises entre celles de Mars et de Jupiter.

Quoique Mercure et Vénus paraissent se mouvoir tantôt d'occident en orient, tantôt en sens contraire; que quelquefois même ces deux planètes semblent stationnaires (art. 6), cependant elles ont réellement un mouvement direct comme la Terre. Ce phénomène de la rétrogradation apparente, qui a lieu aussi pour les planètes supérieures, tient à

ce que les mouvements angulaires de ces astres et de la Terre sont inégaux, comme on peut le voir par le tableau suivant, qui donne, outre la durée des révolutions de toutes les planètes, leurs distances au Soleil, les excentricités de leurs orbites et leurs grosseurs relatives.

NOMS DES PLANÈTES.	DURÉES de leurs révolutions sidérales.	DISTANCES moyennes au Soleil.	EXCENTRICITÉS des orbites en 1801.
☿ Mercure	87j,969	0,387	0,20551
♀ Vénus	224,701	0,723	0,00686
♁ La Terre	365,256	1,000	0,01685
♂ Mars	686,980	1,524	0,09331
♃ Jupiter	4332,585	5,201	0,04816
♄ Saturne	10759,220	9,538	0,05615
♅ Uranus	30686,821	19,183	0,04661
⚳ Cérès	1681,393	2,767	....
⚴ Pallas	1686,539	2,773	....
⚵ Junon	1592,661	2,669	....
⚶ Vesta	1325,743	2,368	....
☾ La Lune	27,322	.....	0,05484
DIAMÈTRES PLANÉTAIRES, celui de la Terre étant 1.	**VOLUMES, celui de la Terre étant 1.**	**DURÉES des rotations des planètes.**	**DENSITÉS.**
Le Soleil ☉ 109,93	1326480,0	25j,500	0,2543
Mercure 0,39	0,1	1,004	2,7810
Vénus 0,97	0,9	0.973	0,9434
La Terre 1,00	1,0	0,997	1,0000
Mars 0,56	0,2	1,027	0,1293
Jupiter 11,56	1470,2	0,414	0,2589
Saturne 9,61	887,3	0,428	0,1016
Uranus 4,26	77,5	.....	0,2797
La Lune ☾ 0,27	$\frac{1}{49}$	27,322	0,6150

On se rappellera que les mouvements autour du Soleil, et ceux de rotation, s'effectuent d'occident en orient; et que dans ce tableau l'unité de temps est le jour moyen (art. **14**).

Voici un autre tableau des satellites connus :

SATELLITE DE LA TERRE.		
DISTANCES MOYENNES, le demi-diamètre de la planète = 1.		DURÉE des révolutions.
Lune ☾	59,9643	27j,32158
SATELLITES DE JUPITER.		
1er satellite.	6,0485	1j,7691
2e.	9,6235	3,5513
3e.	15,3502	7,1546
4e.	26,9983	16,6888
SATELLITES DE SATURNE.		
1er satellite.	3,351	0j,943
2e.	4,300	1,370
3e.	5,284	1,888
4e.	6,819	2,739
5e.	9,524	4,517
6e.	22,081	15,945
7e.	64,359	79,330
SATELLITES D'URANUS. (Le 2e et le 4e ont été seuls revus.)		
1er satellite.	13,120	5j,8926
2e.	17,022	8,7068
3e.	19,845	10,9611
4e.	22,752	13,4559
5e.	45,507	38,0750
6e.	91,008	107,6944

On voit par la troisième colonne du premier tableau ci-dessus, que la distance moyenne de la Terre au Soleil est prise pour unité; cette distance est égale au demi grand axe de l'orbite de la Terre. On exprimera en rayons terrestres les distances renfermées dans cette colonne, en les multipliant par 23984, puisque telle est à très peu près la distance moyenne de la Terre au Soleil; et si l'on multiplie en outre ces produits par la valeur du rayon de la Terre, supposé de 6 366 198 mètres, on aura approximativement ces mêmes distances en mètres.

DES COMÈTES.

44. Les comètes sont des astres dont l'apparition est de peu de durée: elles traversent dans toutes les directions possibles notre système planétaire, et se meuvent toutes, sinon dans des orbites elliptiques très allongées, du moins dans des sections coniques dont le Soleil est au foyer commun. Leur mouvement de translation, comme celui des planètes, est soumis aux lois de Képler, mais singulièrement troublé, quand elles entrent dans la sphère d'activité de notre système planétaire.

La nébulosité qui enveloppe le noyau de la comète et le rend confus, paraît être son atmosphère. A mesure que cet astre s'approche du Soleil, la matière qui compose sa nébulosité se volatilise probablement de plus en plus par l'action de la chaleur solaire, et forme cette traînée de vapeur lumineuse et transparente, connue sous le nom de *queue*, laquelle est toujours opposée au Soleil. Mais ce n'est pas là le caractère distinctif des comètes, car il en est qui se sont montrées sans ce phénomène.

La comète de 1680 est celle qui s'est approchée le plus du Soleil. A son périhélie elle en fut 166 fois plus proche que nous; il est donc naturel de penser que la chaleur qu'elle éprouva fut 27556 fois plus forte que celle qui est transmise à la Terre, dans l'hypothèse que son action s'exerce en raison inverse du carré des distances. S'il en est ainsi, les substances évaporables d'une comète diminuent à chacun de ses retours au périhélie.

Dans les temps d'ignorance et de superstition, les comètes, ainsi que les éclipses de Soleil et de Lune, étaient regardées comme les signes des plus grandes calamités. En 1773, la France même, saisie d'une vaine frayeur, crut à la fin prochaine du monde, parce que Lalande, dans un Mémoire qu'il venait de publier, indiquait celles des comètes

observées qui peuvent le plus approcher de la Terre. Il pensait en outre que, par l'effet des perturbations planétaires, quelques-unes pourraient bien, à leur retour, la rencontrer et produire une terrible catastrophe. Cependant, la comète de 1770 qui, à cause de sa grande proximité de nous, devait être la plus redoutable, n'a plus reparu, quoique les astronomes lui eussent assigné une période de 5 ans et demi environ; ainsi, à moins que quelque cause ne l'ait fait disparaître pour nous, les perturbations qu'elle a dû éprouver ont changé considérablement les dimensions de son orbite; mais fût-elle revenue plus près de la Terre, il y aurait eu un très-haut degré de probabilité contre tout événement funeste.

La difficulté de prédire d'une manière certaine le retour d'une comète tient à celle de déterminer rigoureusement les éléments de son orbite. La comète observée par Halley, en 1682, et qui avait été aperçue en 1531 et 1607, est la première qui ne laisse aucun doute à cet égard; aussi a-t-elle reparu en 1835; sa période est de 76 ans environ. Lorsqu'elle passa à son périhélie en 1607, son noyau, de la grandeur d'un œil de bœuf, dit Delambre, avait l'éclat d'une étoile fixe, et sa queue, de couleur d'or, soutendait un angle de 60°. Ce beau spectacle se reproduisit en 1682; mais nous en avons été privés en 1835, car cette comète était loin d'être aussi remarquable que celle de 1811. L'ellipse que cette comète décrit est fort excentrique; en effet son grand axe est 35 fois $\frac{9}{10}$ la moyenne distance du Soleil à la Terre, et sa distance périhélie est seulement les $\frac{58}{100}$ de celle-ci.

Deux autres comètes dont la science sait prédire les retours sont à courte période: l'une revient au périhélie après 1208 jours, l'autre après 6 ans et 8 mois environ; mais elles n'offrent de l'intérêt qu'aux astronomes.

Nous terminerons ici ces notions d'Astronomie, parce qu'elles sont plus que suffisantes pour faire comprendre les méthodes d'observation et de calcul que nous aurons occasion d'exposer. Mais ceux qui voudront acquérir des connaissances plus vastes sur cette matière, et approfondir les théories dont nous n'avons pu donner qu'une faible idée, devront particulièrement étudier l'*Exposition du Système du Monde*, ou le *Traité élémentaire d'Astronomie physique*.

LIVRE DEUXIÈME.

ANALYSE DES DEUX TRIGONOMÉTRIES.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

45. Nous supposons dans cet ouvrage que le lecteur possède des connaissances assez étendues sur toutes les parties des Mathématiques élémentaires; néanmoins nous croyons utile de rappeler les principes généraux de la résolution des triangles rectilignes et sphériques, parce qu'ils servent de fondement aux théories et aux méthodes de calcul qui seront exposées par la suite. Nous donnerons même plusieurs formules trigonométriques nouvelles ou peu connues; mais avant d'entrer en matière nous allons présenter le tableau des principales fonctions circulaires qui s'emploient fréquemment dans les calculs trigonométriques, pour y effectuer diverses transformations que les circonstances exigent.

Soient p et q deux arcs quelconques d'un cercle dont le rayon est pris pour unité; on aura les formules connues

$$\sin(p \pm q) = \sin p \cos q \pm \cos p \sin q,$$
$$\cos(p \pm q) = \cos p \cos q \mp \sin p \sin q,$$

desquelles on tire aisément celles-ci :

$$\sin^2 p + \cos^2 p = 1;$$

$$\begin{aligned}
2\sin p\cos q &= \sin(p+q) + \sin(p-q),\\
2\cos p\sin q &= \sin(p+q) - \sin(p-q),\\
2\cos p\cos q &= \cos(p+q) + \cos(p-q),\\
2\sin p\sin q &= \cos(p-q) - \cos(p+q),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\sin p\cos mp &= \sin(m+1)p - \sin(m-1)p,\\
2\cos p\sin mp &= \sin(m+1)p + \sin(m-1)p,\\
2\cos p\cos mp &= \cos(m+1)p + \cos(m-1)p,\\
2\sin p\sin mp &= \cos(m-1)p - \cos(m+1)p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin p + \sin q &= 2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q),\\
\sin p - \sin q &= 2\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\sin\tfrac{1}{2}(p-q),\\
\cos p + \cos q &= 2\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q),\\
\cos p - \cos q &= -2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\sin\tfrac{1}{2}(p-q),
\end{aligned}$$

$$\sin 2p = 2\sin p\cos p, \qquad 1 - \cos p = 2\sin^2\tfrac{1}{2}p,$$
$$\cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p, \qquad 1 + \cos p = 2\cos^2\tfrac{1}{2}p,$$

$$\sin^2 p - \sin^2 q = \cos^2 q - \cos^2 p = \sin(p+q)\sin(p-q)$$
$$\cos^2 p - \sin^2 q = \cos(p+q)\cos(p-q),$$
$$\cos p\cos q = \cos^2\tfrac{1}{2}(p-q) - \sin^2\tfrac{1}{2}(p+q),$$

$$\operatorname{tang} p = \frac{\sin p}{\cos p}, \qquad \cot p = \frac{1}{\operatorname{tang} p} = \frac{\cos p}{\sin p},$$

$$\text{séc}\, p = \frac{1}{\cos p}, \qquad \text{coséc}\, p = \frac{1}{\sin p},$$

$$\operatorname{tang}(p \pm q) = \frac{\sin(p\pm q)}{\cos(p\pm q)} = \frac{\operatorname{tang} p \pm \operatorname{tang} q}{1 \mp \operatorname{tang} p \operatorname{tang} q},$$

$$\operatorname{tang} p + \operatorname{tang} q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}, \qquad \cot p + \cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q},$$

$$\operatorname{tang} p - \operatorname{tang} q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}, \qquad \cot p - \cot q = -\frac{\sin(p-q)}{\sin p\sin q},$$

$$\operatorname{tang}^2 p - \operatorname{tang}^2 q = \frac{\sin(p+q)\sin(p-q)}{\cos^2 p\cos^2 q}, \qquad \cot^2 p - \cot^2 q = -\frac{\sin(p+q)\sin(p-q)}{\sin^2 p\sin^2 q};$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(p+q)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(p-q)}, \qquad \frac{\cos p + \cos q}{\cos p - \cos q} = -\frac{\cot\frac{1}{2}(p-q)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(p+q)} = -\frac{\text{séc}\,p + \text{séc}\,q}{\text{séc}\,p - \text{séc}\,q},$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(p+q), \qquad \frac{\sin p + \sin q}{\cos p - \cos q} = -\cot\tfrac{1}{2}(p-q),$$

$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(p-q), \qquad \frac{\sin p - \sin q}{\cos p - \cos q} = -\cot\tfrac{1}{2}(p+q),$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}p = \frac{\sin p}{1+\cos p}, \qquad \cot\tfrac{1}{2}p = \frac{\sin p}{1-\cos p},$$

$$\sin p = \frac{\text{tang}\,p}{\sqrt{1+\text{tang}^2 p}}, \qquad \cos p = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2 p}}.$$

Soit 1^Q le quadrant; on a, suivant la division du cercle en 360 degrés sexagésimaux,

$$1^Q = 90^\circ,$$

et suivant la division du cercle en 400 grades ou degrés décimaux,

$$1^Q = 100^g;$$

on a en outre

$$\sin 1^Q = 1,\ \cos 1^Q = 0;\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}^Q = \text{tang}\,45^\circ = \text{tang}\,50^g = 1,$$
$$\text{tang}\,1^Q = \text{tang}\,90^\circ = \text{tang}\,100^g = \infty = \text{l'infini};\ \cot 1^Q = 0,$$
$$\text{séc}\,1^Q = \tfrac{1}{0} = \infty,\quad \text{coséc}\,1^Q = 1 = \text{rayon}.$$

En général,

$$\sin(1^Q \pm p) = +\cos p, \quad \cos(1^Q \pm p) = \mp \sin p,$$
$$\sin(2^Q \pm p) = \pm \sin p, \quad \cos(2^Q \pm p) = -\cos p,$$
$$\sin(3^Q \pm p) = -\cos p, \quad \cos(3^Q \pm p) = \pm \sin p,$$
$$\sin(4^Q \pm p) = \pm \sin p, \quad \cos(4^Q \pm p) = +\cos p,$$

46. Voici les énoncés des règles des signes qu'il importe d'observer dans l'emploi des valeurs trigonométriques.

1°. Le produit de deux quantités est positif ou négatif, selon que ces quantités sont affectées du même signe ou de signes différents. Même règle pour le signe du quotient de deux quantités.

2°. Le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente d'un angle moindre qu'un droit, sont positifs. Généralement, la sécante a le même signe que le cosinus, et la cosécante le même signe que le sinus, puisque

$$\text{séc}\, p = \frac{1}{\cos p}, \text{ et coséc}\, p = \frac{1}{\sin p}.$$

3°. Si un angle est compris entre 1 et 2 droits, son sinus et sa cosécante sont positifs; toutes ses autres lignes trigonométriques sont négatives.

4°. Tout angle compris entre 2 et 3 droits a son sinus et son cosinus négatifs, mais sa tangente et sa cotangente sont positives; en effet l'on a

$$\text{tang}\, p = \frac{\sin p}{\cos p}, \text{ et } \cot p = \frac{\cos p}{\sin p}.$$

5°. Lorsqu'un angle est compris entre 3 et 4 droits, son cosinus et sa sécante sont positifs; ses autres lignes trigonométriques sont négatives.

6°. Enfin, le sinus d'un angle négatif, et compris entre o et 2 droits, est lui-même négatif, et le cosinus est positif ou négatif selon que cet angle est aigu ou obtus. Quant aux signes des autres lignes trigonométriques, ils dépendent évidemment de ceux du sinus et du cosinus.

Remarquez que la plupart des formules précédentes ne sont pas homogènes, parce que le rayon des tables y est censé représenté par l'unité; mais, si l'on veut, il sera facile de rétablir l'homogénéité, en désignant ce rayon par R, et l'introduisant comme facteur, ainsi que ses puissances, dans tous les termes où le nombre de dimensions est moindre. Par exemple, la première du tableau s'écrirait ainsi :

$$\mathrm{R} \sin (p \pm q) = \sin p \cos q \pm \cos p \sin q,$$

et la troisième deviendrait

$$\sin^2 p + \cos^2 p = \mathrm{R}^2;$$

cela est évident.

Le rayon des tables pris pour unité, fait que les logarithmes de sinus et cosinus sont ceux de nombres fractionnaires. Dans cette hypothèse on a

$$\begin{aligned}
\log 0{,}1 &= 9{,}0000000 = \log \sin 5^\circ 44' 21'', 02,\\
\log 0{,}01 &= 8{,}0000000 = \log \sin 0.34.22, 69,\\
\log 0{,}001 &= 7{,}0000000 = \log \sin 0.\ 3.26, 26,\\
\log 0{,}0001 &= 6{,}0000000 = \log \sin 0.\ 0.20, 63,
\end{aligned}$$

etc.

C'est ainsi qu'à l'avenir nous considérerons les logarithmes des fractions plus petites que l'unité, quoique quelques auteurs emploient à cet égard des caractéristiques négatives, ou des logarithmes entièrement négatifs; *voyez* l'explication qui précède les Tables de logarithmes.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES.

47. Avant de considérer en particulier les triangles rectangles, cherchons les relations qui existent entre les côtés et les angles d'un triangle rectiligne quelconque, et, pour cet effet, partons de ces deux propriétés connuès, savoir :

Dans tout triangle rectangle, 1° *le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

2°. *Le cosinus d'un des angles aigus est égal au côté adjacent divisé par l'hypoténuse, en supposant le rayon des tables égal à l'unité.*

Soient désignés par a, b, c les trois côtés d'un triangle rectiligne quelconque (*fig.* 12); par A, B, C les angles qui leur sont respectivement opposés; par x le segment AD, formé par la perpendiculaire CD, et par y cette perpendiculaire; on aura évidemment

$$y^2 = b^2 - x^2, \quad y^2 = a^2 - (c - x)^2,$$

et par conséquent en égalant ces deux valeurs,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx,$$

ou

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

à cause de $x = b \cos A$. Il résulte de là que *le carré d'un des côtés d'un triangle rectiligne quelconque est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, diminuée du double produit de ces mêmes côtés multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils forment entre eux*, en supposant toutefois le rayon des tables égal à l'unité et l'angle A aigu.

Les trois équations cherchées sont donc

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C; \end{array}\right\} \text{(A)}$$

ainsi, lorsque parmi les six parties d'un triangle trois seront connues, savoir les trois côtés, ou deux côtés et un angle, ou bien deux angles et un côté, on pourra déterminer les trois autres parties.

Lorsque le triangle ABC est rectangle, ces équations se simplifient beaucoup; en effet, soit $A = 1^q$, on aura $\cos A = 0$, et partant

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2, \\ c - a \cos B = 0, \\ b - a \cos C = 0. \end{array}\right\} \text{(B)}$$

On retombe donc sur les deux théorèmes desquels on est parti, ce qui doit être; mais alors $\cos B = \sin C$. Ainsi de ces deux dernières équations l'on tire

$$\sin C = \frac{c}{a}, \quad \cos C = \frac{b}{a};$$

ensuite en divisant l'une par l'autre,

$$\operatorname{tang} C = \frac{c}{b};$$

donc, *dans un triangle rectangle*, 1° *le sinus d'un des angles aigus est égal au côté opposé divisé par l'hypoténuse;*

2°. La *tangente d'un de ces mêmes angles aigus est égale au côté opposé divisé par le côté adjacent.*

D'ailleurs, à cause de $\sin C = \frac{c}{a}$ et $\sin B = \frac{b}{a}$, on a

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}, \text{ ou } \sin B : \sin C :: b : c;$$

ainsi, *dans tout triangle rectangle, les sinus des angles aigus sont proportionnels aux côtés opposés à ces angles.*

De la relation $c = a \cos B$, on tire

$$a - c = a(1 - \cos B);$$

mais $1 - \cos B = 2 \sin^2 \frac{1}{2} B$; donc

$$a - c = 2a \sin^2 \tfrac{1}{2} B.$$

On a aussi

$$a - c = a \frac{(1 - \cos B)}{\sin B} \sin B;$$

et à cause de $\frac{1 - \cos B}{\sin B} = \tang \frac{1}{2} B$, il en résulte que

$$a - c = b \tang \tfrac{1}{2} B;$$

donc *l'excès de l'hypoténuse sur un des côtés de l'angle droit est égal au double du produit de cette ligne par le carré du sinus de la moitié de l'angle aigu adjacent à ce côté*, ou bien *est égal au produit d'un des côtés de l'angle droit par la tangente de la moitié de l'angle opposé.*

RÉSOLUTION DES TRIANGLES OBLIQUANGLES.

Le théorème fondamental représenté par l'équation

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

sert à faire connaître directement le troisième côté d'un triangle rectiligne, par le moyen de deux côtés et de l'angle compris; mais pour rendre plus facile l'opération par les logarithmes, on met, au lieu de

cos A sa valeur $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}$ A, et alors il vient

$$\begin{aligned} a^2 &= (b-c)^2 + 4bc \sin^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{A} \\ &= (b-c)^2 \left[1 + \frac{4bc \sin^2 \frac{1}{2}\mathrm{A}}{(b-c)^2} \right]. \end{aligned}$$

La fraction $\frac{4bc\sin^2 \frac{1}{2}\mathrm{A}}{(b-c)^2}$ pouvant en général être plus grande que le carré de l'unité, supposons-la égale à $\operatorname{tang}^2 \theta$; dans ce cas on a

$$a = (b-c)[1 + \operatorname{tang}^2 \theta]^{\frac{1}{2}} = \frac{b-c}{\cos\theta}.$$

Toutefois, la solution numérique ne sera rigoureusement exacte que lorsque la différence $b - c$ sera grande; si cette différence au contraire était très-petite, il faudrait substituer dans l'équation fondamentale, pour cos A sa valeur $2\cos^2 \frac{1}{2}\mathrm{A} - 1$, parce qu'il viendrait

$$a^2 = (b+c)^2 \left[1 - \frac{4bc\cos^2 \frac{1}{2}\mathrm{A}}{(b+c)^2} \right];$$

mais dans cette circonstance on doit avoir $\frac{4bc\cos^2 \frac{1}{2}\mathrm{A}}{(b+c)^2} < 1$, sans quoi la racine de a serait imaginaire; nous pouvons donc supposer

$$\frac{4bc\cos^2 \frac{1}{2}\mathrm{A}}{(b+c)^2} = \sin^2 \theta;$$

ainsi

$$a = (b+c)\cos\theta.$$

48. Pour trouver d'autres formules qui conviennent aux différents cas des triangles obliquangles, tirons d'abord de la première relation (A), cette valeur

$$\cos \mathrm{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

et substituons-la dans l'équation $\sin^2 \mathrm{A} = 1 - \cos^2 \mathrm{A}$; il viendra, après les opérations convenables,

$$\sin^2 \mathrm{A} = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2},$$

d'où l'on tirera, après avoir extrait la racine carrée de part et d'autre, et multiplié le second membre haut et bas par a,

$$\sin A = a \times \frac{\sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}{2abc};$$

mais si, pour abréger, l'on désigne par M toute la fraction qui multiplie a, on aura

$$\sin A = aM;$$

or, la quantité M étant une fonction symétrique des trois côtés du triangle, et par conséquent invariable, on en conclura pareillement

$$\sin B = bM, \quad \sin C = cM;$$

donc

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}, \quad \text{ou} \quad \sin A : \sin B :: a : b;$$

donc enfin, *dans tout triangle rectiligne, les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés.*

49. La proportion précédente, pouvant être écrite ainsi

$$a : b :: \sin(B + C) : \sin B,$$

puisque le sinus d'un angle d'un triangle rectiligne est égal à celui de la somme des deux autres, on a

$$a \sin B = b \sin(B + C);$$

or, en développant le second membre par la première formule de l'art. **45**, divisant de part et d'autre par sin B, et faisant attention que

$$\cos C = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} C, \quad \text{et} \quad \sin C = 2 \sin \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2} C,$$

on a

$$\cot B = \frac{a - b}{b \sin C} + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C,$$

formule qui donne directement l'angle B, mais en passant des logarithmes aux nombres, et des nombres aux logarithmes.

De la même proportion ci-dessus, l'on tire sur-le-champ cette autre

$$\sin A + \sin B : \sin A - \sin B :: a + b : a - b,$$

d'où

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B};$$

mais, par le tableau des fonctions circulaires (art. 45), on a

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\tang \frac{1}{2}(A+B)}{\tang \frac{1}{2}(A-B)}:$$

ainsi

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tang \frac{1}{2}(A+B)}{\tang \frac{1}{2}(A-B)},$$

ou

$$a + b : a - b :: \tang \tfrac{1}{2}(A+B) : \tang \tfrac{1}{2}(A-B);$$

et en langage ordinaire :

La somme de deux côtés quelconques d'un triangle rectiligne est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces mêmes côtés est à la tangente de leur demi-différence.

De là on tire, à cause de $\frac{A+B}{2} = 1^{q} - \frac{C}{2}$,

$$\tang\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b} \tang\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b} \cot \tfrac{1}{2} C.$$

Cette formule se rapporte, comme la précédente, au cas où l'on connaît deux côtés a, b et l'angle compris C ; c'est-à-dire qu'elle donne le moyen de trouver la demi-différence des deux angles inconnus A, B : et comme on a d'avance leur demi-somme, puisque $\frac{1}{2}(A+B) = 1^{q} - \frac{1}{2}C$, on a tout ce qu'il faut pour déterminer ces angles; en effet

$$\text{le plus grand angle} = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2},$$

$$\text{le plus petit angle} = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}.$$

Si les deux côtés a, b sont connus par leurs logarithmes, ainsi qu'il

arrive fréquemment dans la pratique, on pourra se dispenser de chercher les deux nombres correspondants pour calculer la formule précédente: voici alors comment il faudra opérer.

On considérera a, b comme les côtés d'un triangle rectangle, et en désignant par φ l'angle opposé au côté a, on aura

$$\tang \varphi = \frac{a}{b};$$

cet angle sera plus grand qu'un demi-quadrant, puisque l'on suppose $a > b$, et voilà pourquoi nous égalons à une tangente la quantité fractionnaire $\frac{a}{b}$; donc, à cause de $\tang(\varphi - 50^g) = \frac{\tang \varphi - \tang 50^g}{1 + \tang \varphi \tang 50^g}$, et de $\tang 50^g = 1$, on aura

$$\tang(\varphi - 50^g) = \frac{a-b}{a+b};$$

mais, par ce qui précède,

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tang\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cot\frac{1}{2}C};$$

donc

$$\tang\left(\frac{A-B}{2}\right) = \cot\tfrac{1}{2}C \tang(\varphi - 50^g),$$

formule qui donnera de même la valeur de $\frac{A-B}{2}$.

50. Maintenant si dans l'équation

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

qui fait connaître un angle au moyen des trois côtés, l'on met, au lieu de $\cos A$, sa valeur $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}A$, on aura, en changeant les signes de tous les termes, et en laissant seulement $\sin^2\frac{1}{2}A$ dans le premier membre,

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{4bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}.$$

Le numérateur du second membre étant le produit des deux facteurs $(a+b-c)$, $(a-b+c)$, on donnera à cette équation la forme

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)}{bc};$$

mais

$$\frac{a+c-b}{2} = \frac{a+b+c}{2} - b, \text{ et } \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - c:$$

si donc on désigne $a+b+c$ par $2p$, on aura, après avoir extrait la racine carrée,

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

formule qui peut être calculée facilement par les logarithmes, et qui donne très-promptement un angle d'un triangle dont on connaît les trois côtés. Si l'on y restitue l'homogénéité, et qu'on l'énonce en proportion, il en résultera que *dans tout triangle rectiligne, le produit de deux côtés quelconques est au produit des différences de ces mêmes côtés au demi-périmètre, comme le carré du rayon des tables est au carré du sinus de la moitié de l'angle que ces côtés comprennent.*

On peut exprimer d'une manière analogue le cosinus et la tangente de $\frac{1}{2}A$: en effet, puisque $1 + \cos A = 2\cos^2 \frac{1}{2} A$, on aura, en mettant ici pour $\cos A$ sa valeur en fonction des trois côtés,

$$1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} A,$$

d'où

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc};$$

puis procédant comme ci-dessus, il viendra

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{p\cdot(p-a)}{bc}};$$

et à cause de $\frac{\sin \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} A} = \tang \frac{1}{2} A$, il s'ensuit que l'on aura

$$\tang \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

51. S'il était nécessaire de connaître les segments formés par la perpendiculaire CD du triangle ABC (*fig.* 12), on y parviendrait de la manière suivante:

De la formule primitivement obtenue (art. **47**), savoir,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx,$$

et qui peut s'écrire ainsi

$$(a+b)(a-b) = c(c-2x),$$

on tire cette proportion facile à graver dans la mémoire,

$$c : a+b :: a-b : c-2x.$$

C'est-à-dire que quand la perpendiculaire CD tombe dans l'intérieur du triangle, *la base ou la somme des deux segments est à la somme des deux autres côtés, comme la différence de ces mêmes côtés est à la différence des segments.*

Soit donc d cette dernière différence; on aura

$$\text{le plus grand segment} = \frac{c+d}{2},$$
$$\text{le plus petit segment} = \frac{c-d}{2}.$$

52. On s'assure bien aisément, par l'analyse, que la seule connaissance des trois angles d'un triangle rectiligne ne suffit pas pour en déterminer les côtés; car si dans les trois équations (A) l'on considère a, b, c comme les inconnues du problème, et que l'on ajoute la première équation à la seconde, la première à la troisième, et la seconde à cette dernière; ensuite que l'on divise respectivement ces trois sommes

par $2c$, $2b$, $2a$, on aura les équations suivantes du premier degré :

$$\left.\begin{aligned} c - b\cos A - a\cos B &= 0,\\ b - c\cos A - a\cos C &= 0,\\ a - c\cos B - b\cos C &= 0. \end{aligned}\right\} \text{(C)}$$

Mais parce que celles-ci ne renferment aucun terme tout connu, les valeurs de a, b, c qu'elles fourniraient seraient nécessairement indéterminées; et l'on aurait pour le dénominateur commun de ces valeurs

$$1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C = 0 :$$

c'est en même temps la relation qui doit exister entre les trois angles d'un triangle rectiligne, pour que leur somme soit égale à deux droits. (*Application de l'Algèbre à la Géométrie*, par M. Lacroix, p. 141.)

DIVERSES EXPRESSIONS DE L'AIRE D'UN TRIANGLE RECTILIGNE.

53. Soit S l'aire du triangle rectiligne ABC (*fig.* 12), et y sa hauteur; on aura

$$S = \frac{AB \times CD}{2} = \frac{cy}{2};$$

mais $y = b \sin A$; donc

$$S = \tfrac{1}{2} bc \sin A. \qquad (1)$$

D'ailleurs, à cause de $\sin C : \sin B :: c : b$, on a $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$, et

$$S = \frac{c^2}{2} \frac{\sin A \sin B}{\sin(A+B)}. \qquad (2)$$

Telles sont les deux formules qui donnent l'aire d'un triangle rectiligne, connaissant deux côtés et l'angle compris, ou bien un côté et les deux angles adjacents. D'un autre côté, à cause de

$$a^2 : b^2 : c^2 :: \sin^2 A : \sin^2 B : \sin^2 (A+B),$$

on a cette autre proportion

$$a^2 - b^2 : c^2 :: \sin^2 A - \sin^2 B : \sin^2 (A+B);$$

ainsi, en définitive, la valeur précédente de S devient, en y mettant celle de c^2 tirée de cette dernière proportion,

$$S = \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin(A - B)}; \quad (3)$$

expression qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ lorsque $a = b$; mais alors l'équation (2) donne

$$S = \frac{c^2}{4} \operatorname{tang} A.$$

Il est utile en outre d'avoir la valeur de S en fonction des trois côtés: or, si dans la formule (1) l'on met d'abord pour sin A sa valeur $2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$, on aura

$$S = bc \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A.$$

Ensuite, si pour $\sin \frac{1}{2} A$ et $\cos \frac{1}{2} A$ on substitue leurs valeurs trouvées à l'art. **50**, on obtiendra sur-le-champ

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (4)$$

De cette dernière expression de S ressort naturellement la vérité de ce théorème, savoir: *Entre tous les triangles isopérimètres et de même base, le triangle isoscèle est le plus grand.*

En effet la somme des deux facteurs variables et inégaux $p - a$, $p - b$, étant constamment égale à c pris pour base, leur produit sera toujours moindre que le carré de la moitié de cette ligne; si donc $a = b$, le triangle sera isoscèle et sa surface un *maximum*.

Tous les théorèmes précédents peuvent sans doute se déduire de la simple Géométrie, et plusieurs même dérivent de constructions fort élégantes; aussi n'avons-nous adopté dans cette circonstance la méthode analytique qu'à cause de sa fécondité, et que parce qu'elle fournit de la manière la plus simple toutes les formules trigonométriques connues.

CHAPITRE II.

DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Théorème fondamental.

54. Les principes pour la résolution des triangles sphériques dérivent d'une seule équation que l'on déduit naturellement d'une propriété des triangles rectilignes, représentée par l'une des équations (A) (art. 47).

Soient (*fig.* 13) AD la tangente et OD la sécante de l'arc AB ;

Soient de même AE la tangente et OE la sécante de l'arc AC.

Si l'on désigne, comme à l'ordinaire, par A, B, C les angles, et par a, b, c les côtés opposés du triangle sphérique ABC construit sur la surface d'une sphère du rayon 1, et dont le centre est en O, le triangle rectiligne ADE donnera, en faisant DE $= x$,

$$x^2 = \text{tang}^2 b + \text{tang}^2 c - 2 \,\text{tang}\, b \,\text{tang}\, c \cos A\,;$$

le triangle ODE donnera de même

$$x^2 = \text{séc}^2 b + \text{séc}^2 c - 2 \,\text{séc}\, b \,\text{séc}\, c \cos a :$$

soustrayant de cette équation la première, et faisant attention que $\text{séc}^2 b - \text{tang}^2 b = 1$, on aura, réduction faite,

$$1 + \frac{\sin b \sin c}{\cos b \cos c} \cos A - \frac{\cos a}{\cos b \cos c} = 0,$$

et par conséquent après avoir chassé le dénominateur,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Telle est l'équation fondamentale qu'il fallait trouver, et qui ferait connaître le troisième côté d'un triangle sphérique, si les deux autres côtés et l'angle qu'ils comprennent étaient donnés: elle est facile à retenir. La démonstration que nous venons d'en donner est due à De Gua, qui l'a publiée dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* (année 1783). Lagrange et d'autres géomètres célèbres l'ont depuis adoptée dans leurs Traités de Trigonométrie: on en verra une nouvelle dans le livre IV, au chapitre des parallaxes.

Une simple permutation de lettres fournit deux autres équations toutes pareilles; ainsi l'on a

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \cos b\ \cos c + \sin b\ \sin c\ \cos A,\\ \cos b &= \cos a\ \cos c + \sin a\ \sin c\ \cos B,\\ \cos c &= \cos a\ \cos b + \sin a\ \sin b\ \cos C.\end{aligned}\right\}\ (\alpha).$$

Il ne s'agit plus que de combiner convenablement ces trois équations, pour parvenir aux relations qui offrent le moyen de résoudre tous les cas possibles des triangles sphériques.

55. Si de la première équation l'on tire la valeur de cos A, et qu'on l'introduise dans la relation $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$, on aura

$$\sin^2 A = 1 - \frac{\cos^2 a + \cos^2 b \cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c};$$

réduisant les termes du second membre au même dénominateur, multipliant haut et bas par $\sin^2 a$ et extrayant la racine, on obtiendra

$$\sin A = \sin a . \frac{\sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c)}}{\sin a \sin b \sin c};$$

désignant par M toute la fraction qui multiplie $\sin a$, on pourra écrire plus simplement

$$\sin A = M \sin a;$$

et puisque M est une fonction symétrique ou invariable, quel que soit l'angle dont on cherche le sinus, il est évident que l'on aura

pareillement

$$\sin B = M \sin b,$$
$$\sin C = M \sin c :$$

de là

$$\sin A : \sin B : \sin C :: \sin a : \sin b : \sin c,$$

ou bien

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b}, \quad \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin c};$$

ainsi *les sinus des angles d'un triangle sphérique sont proportionnels au sinus des côtés qui leur sont opposés*. C'est en cela que consiste la proportion dite des quatre sinus.

Mais pour procéder du simple au composé, examinons d'abord les propriétés des triangles sphériques rectangles, quoique celles-ci ne soient que des cas particuliers des propriétés des triangles sphériques quelconques.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES RECTANGLES.

36. Lorsque l'angle A est droit, le côté opposé a se nomme *l'hypoténuse*, et les relations (α) deviennent

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{aligned}\right\} (\alpha')$$

Il suit de la première relation que *dans tout triangle sphérique rectangle, le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cosinus des côtés qui comprennent l'angle droit*.

Éliminant $\cos a$ des deux dernières, on trouve

$$\cos b = \cos b \cos^2 c + \sin a \sin c \cos B = \cos b(1 - \sin^2 c) + \sin a \sin c \cos B,$$
$$\cos c = \cos c \cos^2 b + \sin a \sin b \cos C = \cos c(1 - \sin^2 b) + \sin a \sin b \cos C;$$

réduisant et divisant tout par $\sin c$, on a ces deux relations entre les

trois côtés et un angle oblique :

$$\left.\begin{aligned} \sin c \cos b &= \sin a \cos B, \\ \sin b \cos c &= \sin a \cos C; \end{aligned}\right\} (\alpha'')$$

mais à cause de $\sin a = \operatorname{tang} a \cos a$ et de $\cos a = \cos b \cos c$, ces nouvelles relations se changent en celles-ci :

$$\begin{aligned} \sin c \cos b &= \operatorname{tang} a \cos b \cos c \cos B, \\ \sin b \cos c &= \operatorname{tang} a \cos b \cos c \cos C; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} c &= \operatorname{tang} a \cos B, \\ \operatorname{tang} b &= \operatorname{tang} a \cos C; \end{aligned}$$

c'est-à-dire, 1° *que dans un triangle sphérique rectangle, la tangente de l'un des côtés de l'angle droit, divisée par la tangente de l'hypoténuse, est égale au cosinus de l'angle oblique adjacent à ce côté;* 2°. *que les tangentes des deux côtés de l'angle droit sont réciproquement proportionnelles aux cosinus des angles qui leur sont opposés.*

57. Nous remarquerons en passant, que si, dans la pratique, il s'agissait de trouver l'angle B au moyen de l'hypoténuse a et du côté c adjacent, on aurait à résoudre l'équation

$$\cos B = \cot a \operatorname{tang} c;$$

mais dans le cas où l'angle B serait très-petit, les tables ne pourraient le donner exactement par son cosinus. En le déterminant au contraire par la tangente de sa moitié, on aura toute l'exactitude requise. Or, à cause de $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} B = \frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}$, on a, en substituant pour cos B sa valeur,

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{1 - \dfrac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a}}{1 + \dfrac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a}} = \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} c} = \frac{\sin(a - c)}{\sin(a + c)},$$

et

$$\tang \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin(a-c)}{\sin(a+c)}}.$$

Un angle d'un triangle sphérique étant toujours moindre que deux droits, $\frac{1}{2}$B sera nécessairement aigu; ainsi l'on devra rejetter la racine négative, puisqu'elle donnerait $\frac{1}{2}$B obtus.

58. Si l'on combine les deux équations (α'') par voie d'addition et de soustraction, on aura

$$\sin(b+c) = \sin a(\cos C + \cos B) = 2 \sin a \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{B-C}{2}\right),$$
$$\sin(b-c) = \sin a(\cos C - \cos B) = 2 \sin a \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \sin\left(\frac{B-C}{2}\right);$$

et si l'on divise maintenant ces deux résultats l'un par l'autre, il viendra cette autre relation remarquable

$$\tang\left(\frac{B+C}{2}\right) \tang\left(\frac{B-C}{2}\right) = \frac{\sin(b-c)}{\sin(b+c)},$$

laquelle nous apprend que quand la somme des deux côtés de l'angle droit est plus grande qu'une demi-circonférence, la demi-somme des deux angles opposés est nécessairement plus grande qu'un quadrant; car tang $\left(\frac{B-C}{2}\right)$ et $\sin(b-c)$ ayant toujours le même signe, tang $\frac{B+C}{2}$ est positive ou négative selon que $\sin(b+c)$ est positif ou négatif.

59. Pour trouver d'autres propriétés, élevons au carré les premières relations (α'), (α''); il viendra

$$\cos^2 b \cos^2 c = \cos^2 a,$$
$$\sin^2 c \cos^2 b = \sin^2 a \cos^2 B;$$

celles-ci étant ajoutées entre elles, on aura, en simplifiant,

$$\cos^2 b = \cos^2 a + \sin^2 a \cos^2 B = 1 - \sin^2 a \sin^2 B,$$

par conséquent

$$\sin^2 b = \sin^2 a \sin^2 B \quad \text{ou} \quad \sin b = \sin a \sin B;$$

c'est aussi ce qui résulte de la proportion des quatre sinus, démontrée à l'art. 55; ainsi *dans un triangle sphérique rectangle, le sinus d'un côté de l'angle droit est égal au sinus de l'angle opposé multiplié par le sinus de l'hypoténuse.*

60. En Trigonométrie l'on entend par *cas douteux* celui où l'inconnue est donnée par son sinus; parce qu'alors le problème est en général susceptible de deux solutions. Si, par exemple, dans le triangle sphérique rectangle on connaissait b et B, qui sont toujours de même espèce, et qu'on voulût déterminer l'hypoténuse a, on l'obtiendrait par la formule $\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}$; or, le sinus d'un arc moindre qu'un quadrant étant le même que celui d'un arc qui en est le supplément, on ne saurait pas si a est aigu ou obtus. Il existe donc deux triangles rectangles qui satisfont aux données du problème.

61. Puisque l'on a, par ce dernier principe,

$$\begin{aligned} \sin b &= \sin a \sin B, \\ \sin c &= \sin a \sin C, \end{aligned}$$

on obtiendra, en divisant ces deux équations respectivement par celles (α''),

$$\left.\begin{aligned} \tan B &= \frac{\tan b}{\sin c}, \\ \tan C &= \frac{\tan c}{\sin b}; \end{aligned}\right\} (\alpha''')$$

ainsi *dans un triangle sphérique rectangle, la tangente d'un angle oblique est égale à la tangente du côté opposé, divisée par le sinus du côté de l'angle droit adjacent.*

On sait de plus, par ce qui précède, que

$$\cos B = \frac{\tang c}{\tang a}, \qquad \cos C = \frac{\tang b}{\tang a},$$
$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin a}, \qquad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}.$$

Divisant les équations supérieures par celles inférieures, et faisant les réductions, il vient, à cause de la première relation (α'),

$$\frac{\cos B}{\sin C} = \frac{\tang c}{\tang a}\cdot\frac{\sin a}{\sin c} = \cos b, \quad \frac{\cos C}{\sin B} = \frac{\tang b}{\tang a}\cdot\frac{\sin a}{\sin b} = \cos c;$$

donc, *dans un triangle sphérique rectangle, le cosinus d'un des côtés de l'angle droit est égal au cosinus de l'angle opposé, divisé par le sinus de l'angle oblique adjacent.*

Enfin, multipliant l'une par l'autre les équations (a'''), on a pour produit

$$\tang B \tang C = \frac{1}{\cos b \cos c} = \frac{1}{\cos a},$$

ou bien

$$\cos a = \cot B \cot C.$$

De cette relation l'on conclut que *le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cotangentes des deux angles obliques.*

62. Considérant toujours le triangle ABC rectangle en A, on a d'une part

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}, \text{ et de l'autre, } \cos B = \frac{\tang c}{\tang a};$$

puis changeant les tangentes en sinus et cosinus, il vient

$$\sin c \cos a = \cos B \cos c \sin a = \cos B \cos c \frac{\sin b}{\sin B}.$$

Maintenant si l'on substitue pour $\sin a$ et $\sin c \cos a$ leurs valeurs dans la formule connue

$$\sin(a - c) = \sin a \cos c - \cos a \sin c,$$

on trouvera, à cause de $\frac{1-\cos B}{\sin B} = \tang \frac{B}{2}$,

$$\sin(a-c) = \sin b \cos c \tang \frac{B}{2},$$

résultat qui, en y mettant au lieu de cos c sa valeur $\frac{\cos a}{\cos b}$, deviendra

$$\sin(a-c) = \tang b \cos a \tang \frac{B}{2}.$$

Si l'on change les b en c et *vice versâ,* dans ces deux dernières formules, on aura sur-le-champ

$$\sin(a-b) = \sin c \cos b \tang \frac{C}{2},$$

$$\sin(a-b) = \tang c \cos a \tang \frac{C}{2};$$

ce qui fera connaître l'excès de l'hypoténuse sur un des côtés de l'angle droit. Ces formules ont été données pour la première fois par Prony, mais sans démonstration. En voici deux autres qui s'obtiennent par le même procédé:

$$\cos(a-c) = \cos b + \sin b \sin c \tang \tfrac{1}{2}B,$$

$$\tang(a-c) = \frac{\tang b \cos c \tang \frac{1}{2}B}{1 + \tang b \sin c \tang \frac{1}{2}B};$$

mais leur forme rend l'emploi des logarithmes moins commode.

63. Voilà tout ce qui concerne la résolution des triangles sphériques rectangles. En ayant égard dans les formules, aux signes qui doivent affecter les valeurs de sin, cos, tang, etc., d'un angle, on ne sera nullement embarrassé sur l'espèce de l'angle ou du côté cherché, dans tous les cas qui ne sont pas douteux de leur nature. L'équation $\cos a = \cos b \cos c$, par exemple, nous apprend que chacun des trois côtés d'un triangle sphérique rectangle est plus petit qu'un quadrant, ou que si deux côtés sont plus grands que 100^g, le troisième sera néces-

sairement plus petit; ou enfin que si les deux côtés de l'angle droit sont d'espèce différente, l'hypoténuse sera plus grande qu'un quadrant.

De même, par l'équation $\tang B = \frac{\tang b}{\sin c}$, nous voyons qu'un angle oblique est toujours de même espèce que le côté qui lui est opposé, puisque $\sin c$ est constamment positif.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES OBLIQUANGLES.

64. La recherche des formules pour la résolution des triangles sphériques en général, ne donne lieu à aucune difficulté d'analyse.

D'abord, des équations fondamentales (α) l'on tire

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}, \\ \cos C &= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}. \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

Chacune de ces équations fait connaître un angle d'un triangle sphérique, lorsque les trois côtés sont connus; mais comme elles ne se présentent pas sous une forme commode pour les logarithmes, il est nécessaire de leur faire subir les transformations suivantes.

D'abord remarquons qu'à cause de $1 - \cos A = 2\sin^2 \frac{1}{2}A$ et de $1 + \cos A = 2\cos^2 \frac{1}{2}A$, les relations ($\beta$) fournissent ces six autres:

$$\begin{aligned} 1 - \cos A &= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c} = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}A, \\ 1 - \cos B &= \frac{\cos(a-c) - \cos b}{\sin a \sin c} = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}B, \\ 1 - \cos C &= \frac{\cos(a-b) - \cos c}{\sin a \sin b} = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}C, \\ 1 + \cos A &= \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c} = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}A, \\ 1 + \cos B &= \frac{\cos b - \cos(a+c)}{\sin a \sin c} = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}B, \\ 1 + \cos C &= \frac{\cos c - \cos(a+b)}{\sin a \sin b} = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}C; \end{aligned}$$

puis décomposons en facteurs les numérateurs des seconds membres en vertu de la formule rappelée précédemment, il viendra

$$\left.\begin{aligned}
\sin^2\tfrac{1}{2}A &= \frac{\sin\left(\dfrac{a+b-c}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a+c-b}{2}\right)}{\sin b\sin c},\\
\sin^2\tfrac{1}{2}B &= \frac{\sin\left(\dfrac{a+b-c}{2}\right)\sin\left(\dfrac{b+c-a}{2}\right)}{\sin a\sin c},\\
\sin^2\tfrac{1}{2}C &= \frac{\sin\left(\dfrac{a+c-b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{b+c-a}{2}\right)}{\sin a\sin b},\\
\cos^2\tfrac{1}{2}A &= \frac{\sin\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\dfrac{b+c-a}{2}\right)}{\sin b\sin c},\\
\cos^2\tfrac{1}{2}B &= \frac{\sin\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a+c-b}{2}\right)}{\sin a\sin c},\\
\cos^2\tfrac{1}{2}C &= \frac{\sin\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a+b-c}{2}\right)}{\sin a\sin b}.
\end{aligned}\right\}(\gamma)$$

Ces six valeurs peuvent se combiner de plusieurs manières différentes. En divisant l'une par l'autre celles qui se correspondent, on trouve

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}A &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)},\\
\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}B &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)},\\
\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}C &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}.
\end{aligned}\right\}(\gamma')$$

Ainsi l'on pourra obtenir un angle d'un triangle sphérique en fonction des trois côtés, en calculant le sinus ou la tangente de la moitié de cet angle.

Maintenant, en multipliant deux à deux les relations (γ), on trouve

aisément, après avoir extrait la racine carrée,

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\sin\tfrac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c},\qquad \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B=\sin\tfrac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin c},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}C=\sin\tfrac{1}{2}B\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b},\qquad \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}C=\sin\tfrac{1}{2}B\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin b},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C=\sin\tfrac{1}{2}A\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin a},\qquad \cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C=\sin\tfrac{1}{2}A\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin a},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B=\cos\tfrac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin c},\qquad \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\cos\tfrac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin c},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}C=\cos\tfrac{1}{2}B\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b},\qquad \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}C=\cos\tfrac{1}{2}B\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C=\cos\tfrac{1}{2}A\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a},\qquad \cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C=\cos\tfrac{1}{2}A\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a}.$$

Remarquez que quand on a obtenu la première relation de chaque système, il suffit d'une simple permutation de lettres pour avoir les deux autres relations.

Afin de parvenir aux conséquences les plus utiles, nous tirerons d'abord de ces dernières relations les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(A+B)&=\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B+\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\cos\tfrac{1}{2}C\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},\\
\sin\tfrac{1}{2}(A-B)&=\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B-\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\cos\tfrac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c},\\
\cos\tfrac{1}{2}(A+B)&=\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B-\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\sin\tfrac{1}{2}C\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},\\
\cos\tfrac{1}{2}(A-B)&=\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B+\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\sin\tfrac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c},
\end{aligned}\right\}(\delta)$$

lesquelles s'obtiennent facilement, en ayant égard aux formules de l'art. **45**. Ces valeurs remarquables sont dues à Delambre, qui les a démontrées d'une autre manière. On en tire sur-le-champ, en divisant la première par la troisième, et la deuxième par la quatrième,

$$\tang\tfrac{1}{2}(A+B)=\cot\tfrac{1}{2}C\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(A-B)=\cot\tfrac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Puis divisant la quatrième par la troisième, et la deuxième par la première, on a

$$\tan \tfrac{1}{2}(a+b) = \tan \tfrac{1}{2} c \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(a-b) = \tan \tfrac{1}{2} c \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}.$$

Telles sont les quatre analogies de Néper. Les deux premières servent à trouver deux angles d'un triangle sphérique dans lequel on connaît les deux côtés opposés et l'angle compris; en effet, l'on a

$$\text{le plus grand angle } A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2},$$

et

$$\text{le plus petit angle } B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}.$$

Les deux autres analogies s'emploient pour trouver deux côtés lorsqu'on a deux angles et le côté adjacent.

On arrive à ces formules, aux deux premières par exemple, par une méthode plus simple, ainsi qu'il suit.

Il est d'abord à remarquer que, d'après l'art 45,

$$\tan \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B},$$

$$\text{et } \tan \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B};$$

ainsi il ne s'agit que de rendre les seconds membres de ces égalités fonctions de a, b et c. Or, si entre les première et troisième équations (α) l'on élimine $\cos c$, il viendra cette relation entre cinq parties d'un triangle,

$$\cos A \sin c + \cos C \sin a \cos b = \cos a \sin b;$$

par conséquent, changeant A en B et a en b, on aura

$$\cos A \sin c = \cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b,$$
$$\cos B \sin c = \cos b \sin a - \cos C \sin b \cos a,$$

et ajoutant ces deux équations, il en résultera, réduction faite,

$$\sin c\,(\cos A + \cos B) = (1 - \cos C)\sin(a+b). \qquad (m)$$

D'un autre côté, par la règle des quatre sinus (art. 55), on a

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C,$$
$$\sin c \sin B = \sin b \sin C;$$

ajoutant et soustrayant ces deux équations, il vient

$$\sin c\,(\sin A + \sin B) = \sin C\,(\sin a + \sin b),$$
$$\sin c\,(\sin A - \sin B) = \sin C\,(\sin a - \sin b);$$

divisant successivement celles-ci par la précédente (m), on a

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin C}{1 - \cos C}\left(\frac{\sin a + \sin b}{\sin(a+b)}\right),$$
$$\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin C}{1 - \cos C}\left(\frac{\sin a - \sin b}{\sin(a-b)}\right);$$

enfin transformant ces valeurs à l'aide des relations de l'art. 45, on trouve comme ci-dessus,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B) = \cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B) = \cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)},$$

et de là cette propriété remarquable,

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)}.$$

65. Lorsqu'on n'a pour but que de déterminer un des angles inconnus, l'angle A par exemple, on l'obtient directement de la manière suivante :

Mettant dans la relation

$$\cos A \sin c = \cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b,$$

trouvée précédemment, pour $\sin c$ sa valeur $\frac{\sin a \sin C}{\sin A}$, on a de suite

$$\cot A \sin C = \cot a \sin b - \cos C \cos b,$$

et par conséquent

$$\cot A = \frac{\cot a \sin b}{\sin C} - \cot C \cos b.$$

Cette formule donne donc immédiatement l'angle A, au moyen de deux côtés connus et de l'angle qu'ils comprennent. Changeant A en B, a en b, et réciproquement, on a de même

$$\cot B = \frac{\cot b \sin a}{\sin C} - \cot C \cos a.$$

66. Les relations (γ) nous ont procuré, par leurs combinaisons, plusieurs formules remarquables; on en déduit aisément encore d'autres: par exemple, en multipliant entre elles celles qui se trouvent sur la première ligne, puis prenant la racine carrée et doublant le produit, on a, en faisant d'ailleurs $a+b+c=2s$,

$$2 \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}A = \sin A = \frac{2[\sin(s)\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)]^{\frac{1}{2}}}{\sin b \sin c};$$

or, en rapprochant cette valeur de $\sin A$ de celle de l'art. 55, on voit évidemment que

$$\begin{gathered} 4\sin(s)\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c) \\ = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c. \end{gathered}$$

Il n'est pas plus difficile de reconnaître que les relations (γ) et (γ') donnent

$$\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin a \sin b \sin c},$$

et

$$\tang\tfrac{1}{2}A\,\tang\tfrac{1}{2}B\,\tang\tfrac{1}{2}C = \frac{\sqrt{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin(s)\sqrt{\sin(s)}}.$$

Si on les divisait deux à deux on aurait encore des relations très-remarquables.

Afin de varier les combinaisons, cherchons les expressions de

$\sin\frac{1}{2}(A+B-C)$, de $\cos\frac{1}{2}(A+B-C)$, et de $\tang\frac{1}{2}(A+B-C)$.

D'abord

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C - \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}C;$$

et à cause des équations (δ), il vient

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \frac{\cos^2\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a-b) - \sin^2\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b) - \sin^2\frac{1}{2}C[\cos\frac{1}{2}(a-b) + \cos\frac{1}{2}(a+b)]}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b + \cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

D'un autre côté

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C + \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}C$$

se change par le même procédé, en

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \frac{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C[\cos\frac{1}{2}(a+b) + \cos\frac{1}{2}(a-b)]}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}c};$$

partant,

$$\tang\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b + \cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C} = \frac{\tang\frac{1}{2}a\tang\frac{1}{2}b + \cos C}{\sin C}.$$

Pour exprimer $\tang\frac{1}{2}(A+B-C)$ en fonction des trois côtés seulement, multiplions et divisons à la fois sa valeur précédente par

$4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b$; il viendra, en faisant attention que $2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a=\sin a$,

$$\tang\tfrac{1}{2}(A+B-C)=\frac{4\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b+\sin a\sin b\cos C}{\sin a\sin b\sin C};$$

puis éliminons $\cos C$ au moyen de sa valeur (β), et remplaçons $4\sin^2\frac{1}{2}a\ \sin^2\frac{1}{2}b$ par le produit $(1-\cos a)\ (1-\cos b)$; alors nous aurons

$$\begin{aligned}\tang\tfrac{1}{2}(A+B-C)&=\frac{(1-\cos a)(1-\cos b)+\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b\sin C}\\&=\frac{1+\cos c-\cos a-\cos b}{\sin a\sin b\sin C};\end{aligned}$$

expression dans laquelle il ne s'agit plus que de substituer à la place de $\sin C$ sa valeur $\frac{\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin a\sin b}$, trouvée à l'art. 55. Soit donc M toute la quantité radicale, on aura

$$\begin{aligned}\tang\tfrac{1}{2}(A+B-C)&=\frac{1+\cos c-\cos a-\cos b}{M},\\\tang\tfrac{1}{2}(A+C-B)&=\frac{1+\cos b-\cos a-\cos c}{M},\\\tang\tfrac{1}{2}(B+C-A)&=\frac{1+\cos a-\cos b-\cos c}{M}.\end{aligned}$$

Ces formules élégantes, démontrées d'une toute autre manière par Legendre, ont servi à ce savant géomètre pour déterminer la position du pôle du cercle circonscrit à un triangle sphérique (*Géométrie*, note X). Soit, par exemple (*fig.* 14), O le pôle du cercle qui passe par les sommets des angles du triangle sphérique ABC; les arcs de grand cercle AO, OB, OC seront égaux, et les perpendiculaires abaissées du point O sur chacun des côtés, les partageront en deux parties égales. Si donc x désigne l'angle inconnu OAB, on aura, à cause des trois triangles isoscèles dont se compose le triangle proposé,

$$\begin{aligned}\text{angle ACO}&=A-x,\\\text{angle BCO}&=B-x,\end{aligned}$$

et partant,

$$C = (A - x) + (B - x),$$

ou bien

$$x = \frac{A + B - C}{2};$$

l'angle x pourra donc s'évaluer, si les trois côtés a, b, c sont connus. Quant à l'arc AO = R, on l'obtiendra par la formule

$$\text{tang}\, R = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}c}{\cos x} = \frac{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{M}.$$

Voyez d'ailleurs la note citée.

67. On sait qu'un triangle sphérique est déterminé de grandeur, quand on connaît le rayon de la sphère à laquelle il appartient, ainsi que deux de ses côtés et l'angle qu'ils forment entre eux; car par l'une des formules (α) l'on peut obtenir le troisième côté. Un triangle de cette espèce est aussi déterminé de grandeur, si, outre le rayon de la sphère, on connaît deux angles et le côté qui les joint. Cherchons les formules relatives à ce cas, et pour cet effet reprenons la relation

$$\cos A \sin c = \cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b.$$

On voit qu'en y mettant pour $\sin a$ et $\sin c$ leurs valeurs respectives $\frac{\sin A \sin b}{\sin B}$, $\frac{\sin C \sin b}{\sin B}$, elle devient

$$\cos A \sin C = \cos a \sin B - \sin A \cos C \cos b;$$

changeant A en B et a en b, *et vice versâ*, on a pareillement

$$\cos B \sin C = \cos b \sin A - \sin B \cos C \cos a;$$

puis éliminant $\cos b$ entre ces deux équations, il vient pour la relation cherchée,

$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C;$$

on a donc

$$\left.\begin{array}{l}\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C,\\ \cos B = \cos b \sin A \sin C - \cos A \cos C,\\ \cos C = \cos c \sin A \sin B - \cos A \cos B.\end{array}\right\}\quad (\varepsilon)$$

Ce système d'équations est analogue à celui que nous avons désigné par (α), et il est remarquable que l'un se déduit de l'autre, en écrivant ABC au lieu de *abc*, et réciproquement; les cosinus étant toutefois affectés du signe négatif. La propriété du *triangle polaire* ou *supplémentaire* donne lieu à la même conséquence; car si A′, B′, C′ sont les angles de ce triangle, et a', b' c' les côtés opposés, on a (*Géométrie* de Legendre, propos. IX, livre VII) ces relations:

$$\begin{array}{ll} a' = 200^g - A, & A' = 200^g - a,\\ b' = 200 \ \ - B, & B' = 200 \ \ - b,\\ c' = 200 \ \ - C, & C' = 200 \ \ - c;\end{array}$$

mais nous savons que

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A';$$

par conséquent

$$\cos(200 - A) = \cos(200 - B)\cos(200 - C) \\ + \sin(200 - B)\sin(200 - C)\cos(200 - a),$$

et enfin, comme ci-dessus,

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a.$$

68. On peut donc appliquer la règle que l'on vient d'énoncer à toutes les formules démontrées jusqu'à présent, ou bien traiter analytiquement les formules (ε), comme nous avons traité leurs analogues (α): de l'une ou de l'autre manière, l'on parviendra à de nouveaux systèmes d'équations qui compléteront la résolution de tous les cas de la Trigonométrie sphérique. Pour nous borner aux expressions

les plus utiles, nous remarquerons d'abord que l'on a

$$1 - \cos a = - \frac{\cos(B+C) + \cos A}{\sin B \sin C} = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a,$$

$$1 + \cos a = \frac{\cos A + \cos(B-C)}{\sin B \sin C} = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a;$$

mais en général

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

ainsi

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C) \cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B \sin C},$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C) \cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B \sin C},$$

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C) \cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C) \cos\frac{1}{2}(A+C-B)};$$

l'une de ces trois formules donnera un côté au moyen des trois angles; ainsi, par la première, on a

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C) \cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B \sin C}}.$$

Si la quantité qui est sous le signe radical était négative, comme elle le paraît d'abord, il serait impossible de déterminer la valeur de $\sin \frac{1}{2} a$: cette valeur est cependant toujours réelle, car en général $\sin(x - 1^{q}) = - \cos x$; donc

$$\sin\left(\frac{A+B+C}{2} - 1^{q}\right) = - \cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right),$$

quantité qui est toujours positive, parce que $A + B + C$ étant nécessairement compris entre 2^{q} et 6^{q}, on a

$$\frac{A+B+C}{2} - 1^{q} > 0 \text{ et } < 2^{q}.$$

D'ailleurs le côté d'un triangle sphérique étant plus petit que la

somme des deux autres, on a, par la propriété du triangle polaire, $2^q - A < 2^q - B + 2^q - C$, d'où $\frac{B + C - A}{2} < 1^q$; angle dont le cosinus est positif.

69. Nous pouvons maintenant tirer des conséquences semblables à celles des art. **55** et **66**, savoir, que

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C}{\sin^2 B \sin^2 C},$$
$$= \frac{-4\cos S \cos(S - A)\cos(S - B)\cos(S - C)}{\sin^2 B \sin^2 C},$$

2S désignant la somme des trois angles.

70. Si au lieu des formules

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a + b) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A - B)}{\cos\frac{1}{2}(A + B)},$$
$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a - b) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A - B)}{\sin\frac{1}{2}(A + B)},$$

qui, comme nous l'avons déjà dit, servent à trouver à la fois deux côtés d'un triangle sphérique, au moyen du troisième côté et des deux angles qui lui sont adjacents, on voulait obtenir directement l'un des côtés a, b, le côté a, par exemple, il faudrait avoir recours à l'équation

$$\cot a = \frac{\cot A \sin B}{\sin c} + \cot c \cos B,$$

que l'on trouve sur-le-champ en changeant dans l'équation analogue $\cot A = \frac{\cot a \sin b}{\sin C} - \cot C \cos b$ (art. **65**), les lettres majuscules en minuscules, *et vice versâ*, et affectant les cosinus et les cotangentes du signe négatif, comme nous l'avons déjà fait observer (art. **67**).

On a pareillement, par une simple permutation de lettres,

$$\cot b = \frac{\cot B \sin A}{\sin c} + \cot c \cos A,$$
$$\cot b = \frac{\cot B \sin C}{\sin a} + \cot a \cos C;$$

ce qui donne une relation entre deux angles et deux côtés. Pour en avoir une entre les trois côtés et deux angles, différente de celle de l'art. **65**, divisez l'une par l'autre les équations

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C};$$

il viendra de suite

$$\sin A \cot a = \sin C [\sin b \cos A + \cos b \cot c]:$$

la relation semblable entre les trois angles et deux côtés sera visiblement

$$\sin a \cot A = \sin c [\sin B \cos a - \cos B \cot C].$$

71. Toutes les formules que nous venons de démontrer suffisent pour les besoins ordinaires de l'Astronomie, et surtout de la Géodésie; cependant nous allons en donner encore d'autres qui pourront trouver leurs applications, ou du moins qui concourront, avec les précédentes, à faire connaître la fécondité de l'Analyse trigonométrique.

Si de la formule

$$\sin(a - c) = \sin a \cos c - \cos a \sin c,$$

on élimine $\sin a$ et $\sin c$, dont les valeurs respectives sont $\frac{\sin b \sin A}{\sin B}$ et $\frac{\sin b \sin C}{\sin B}$, on aura

$$\sin(a - c) = \frac{\sin b \cos c \sin A - \sin b \cos a \sin C}{\sin B};$$

mais à cause de la relation $\cos c \sin A = \cos C \sin B + \cos a \sin C \cos B$, donnée à l'art. **67**, il est évident que l'expression précédente se changera en celle-ci :

$$\sin(a - c) = \sin b \cos C - \cos a \sin b \sin C \left(\frac{1 - \cos B}{\sin B}\right);$$

de là

$$\sin(a-c) = \sin b \cos C - \cos a \sin b \sin C \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B,$$

formule donnée par Delambre et démontrée dans son Astronomie à l'aide d'une construction que nous avons voulu éviter ici, afin de rendre notre procédé purement analytique. Cette formule est une généralisation de celle de l'art. **62**.

Déterminons aussi $a - c$ par son cosinus et par sa tangente. D'abord la relation

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B,$$

en y mettant pour $\cos B$ sa valeur $1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} B$, devient

$$\cos b = \cos(a-c) - 2 \sin a \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2} B;$$

puis, à cause de $\sin c = \frac{\sin b \sin C}{\sin B} = \frac{\sin b \sin C}{2 \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} B}$, on a l'expression cherchée

$$\cos(a-c) = \cos b + \sin a \sin b \sin C \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B,$$

par conséquent

$$\operatorname{tang}(a-c) = \frac{\operatorname{tang} b \cos C - \cos a \operatorname{tang} b \sin C \operatorname{tang} \frac{1}{2} B}{1 + \sin a \operatorname{tang} b \sin C \operatorname{tang} \frac{1}{2} B};$$

formules nouvelles et qui rentrent évidemment dans celle de l'art. **62**, lorsque le triangle sphérique est rectangle.

72. Les relations (δ) de l'art. **64** procurent de suite une expression très-simple de $\sin(a-c)$; en effet l'on a, en y changeant B en C et b en c, *et vice versâ*,

$$\sin \tfrac{1}{2}(A + C) = \cos \tfrac{1}{2} B \frac{\cos \frac{1}{2}(a-c)}{\cos \frac{1}{2} b},$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(A - C) = \cos \tfrac{1}{2} B \frac{\sin \frac{1}{2}(a-c)}{\sin \frac{1}{2} b};$$

multipliant celles-ci l'une et l'autre et simplifiant, on a

$$\sin(a-c)=\frac{\sin b\sin\frac{1}{2}(A+C)\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\cos^2\frac{1}{2}B}=\sin b\,\frac{\cos C-\cos A}{2\cos^2\frac{1}{2}B}.$$

On trouverait aussi par une route toute semblable

$$\sin(a+c)=\frac{\sin b\cos\frac{1}{2}(A+C)\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\sin^2\frac{1}{2}B}=\sin b\,\frac{\cos C+\cos A}{2\sin^2\frac{1}{2}B},$$

expressions données par Delambre (*Astronomie*, t. I, p. 162), et qui, étant multipliées entre elles, procureraient une autre relation remarquable, mais que nous trouverons plus tard par une autre voie.

Si l'on rapproche les deux valeurs de sin $(a-c)$, on aura visiblement

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+C)\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\cos^2\frac{1}{2}B}=\cos C-\cos a\sin C\tang\frac{1}{2}B,$$

ou bien

$$2\sin\frac{1}{2}(A+C)\sin\frac{1}{2}(A-C)=2\cos^2\frac{1}{2}B\cos C-\cos a\sin B\sin C,$$

relation nouvelle entre les trois angles et un côté d'un triangle sphérique; mais on peut y arriver par une route beaucoup plus directe. En effet, les deux équations

$$\cos A=\cos a\sin B\sin C-\cos B\cos C,\quad \cos C=\cos C,$$

étant soustraites l'une de l'autre, puis ajoutées ensemble, donnent, apres quelques transformations faciles,

$$2\sin\frac{1}{2}(A+C)\sin\frac{1}{2}(A-C)=2\cos^2\frac{1}{2}B\cos C-\cos a\sin B\sin C,$$
$$2\cos\frac{1}{2}(A+C)\cos\frac{1}{2}(A-C)=2\sin^2\frac{1}{2}B\cos C+\cos a\sin B\sin C;$$

il suit de là que

$$\tang\frac{1}{2}(A+C)\tang\frac{1}{2}(A-C)=\frac{2\cos^2\frac{1}{2}B\cos C-\cos a\sin B\sin C}{2\sin^2\frac{1}{2}B\cos C+\cos a\sin B\sin C}.$$

Nous ne nous arrêterons pas à faire voir que le triangle supplémentaire

donnerait sur-le-champ des relations semblables entre les trois côtés et un angle.

73. On arrive très-simplement à diverses relations entre les six parties d'un triangle, ainsi qu'il suit.

En vertu des art. **64** et **67** on a

$$\cos A \sin c = \cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b,$$
$$\cos a \sin C = \cos A \sin B + \cos c \sin A \cos B;$$

divisant ces deux équations en croix, il vient

$$\frac{\cos A \sin B + \cos c \sin A \cos B}{\cos A \sin c} = \frac{\cos a \sin C}{\cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b},$$

et simplifiant, on a

$$\frac{\sin B + \cos c \operatorname{tang} A \cos B}{\sin c} = \frac{\sin C}{\sin b - \cos C \operatorname{tang} a \cos b};$$

divisant au contraire membre par membre les mêmes équations, et remarquant que $\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}$, on trouve

$$\frac{\cot A}{\cot a} = \frac{\cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b}{\cos A \sin B + \cos c \sin a \cos B}.$$

Si dans la première équation l'on changeait A en B, a en b, et réciproquement, et qu'on procédât comme il vient d'être dit en premier lieu, on tomberait sur la relation

$$\frac{\cos A \operatorname{tang} B + \sin A \cos c}{\sin c} = \frac{\sin C}{\cos b \operatorname{tang} a - \sin b \cos C},$$

donnée par Delambre.

Enfin si l'on multiplie par $\cos B$ les deux membres de l'équation

$$\cos B \sin C = \cos b \sin A - \sin B \cos C \cos a,$$

obtenue à l'art. 67, on aura

$$\sin C - \sin^2 B \sin C = \cos b \sin A \cos B - \sin B \cos B \cos C \cos a;$$

ou bien

$$\frac{\sin C - \cos b \sin A \cos B}{\sin B} = \sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a;$$

transportant cette relation dans le triangle polaire, on aura de même

$$\frac{\sin c - \cos B \sin a \cos b}{\sin b} = \sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A;$$

mais les premiers membres de ces deux dernières équations sont égaux, car

$$\frac{\sin C - \cos b \sin A \cos B}{\sin B} = \frac{\sin C}{\sin B}\left(1 - \cos b \cos B \frac{\sin A}{\sin C}\right),$$

et
$$\frac{\sin c - \cos B \sin a \cos b}{\sin b} = \frac{\sin c}{\sin b}\left(1 - \cos b \cos B \frac{\sin a}{\sin c}\right).$$

D'ailleurs

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin c}, \text{ et } \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin b};$$

on a donc cette autre relation symétrique entre les six parties d'un triangle,

$$\sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a = \sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A;$$

celle-ci a été trouvée par Cagnoli par un procédé analytique tout différent (*voyez* sa *Trigonométrie*, p. 326, 2e édition). Cet astronome en a fait usage dans la recherche des formules d'aberration.

FORMULES USUELLES POUR LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES EN GÉNÉRAL, ETC.

74. Le calcul des triangles sphériques ne comprend que six cas généraux.

1er Cas. *Étant donnés les trois côtés* a, b, c, *trouver un des angles.* Par exemple, veut-on l'angle A? on l'obtiendra par la formule

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}},$$

dans laquelle s exprime la demi-somme des trois côtés, ou par cette autre

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}},$$

qui évite une soustraction.

Si l'on voulait calculer directement l'angle A, il faudrait résoudre l'équation

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c};$$

mais alors pour n'employer que les logarithmes de lignes trigonométriques, on supposerait que $\cos b \cos c = \cos \alpha$, ce qui serait permis, puisque l'unité est la plus grande valeur que puisse acquérir un produit de cosinus: de cette manière on aurait

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos \alpha}{\sin b \sin c} = \frac{2 \sin\left(\frac{\alpha + a}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - a}{2}\right)}{\sin b \sin c}.$$

Le signe de $\cos A$ dépend nécessairement de celui de $\sin\left(\frac{\alpha - a}{2}\right)$; et remarquez que l'arc subsidiaire α est $<$ ou $>$ 1^q, selon que les côtés b, c sont de même espece ou d'espèces différentes (art. **63**).

75. 2e Cas. *Étant donnés les trois angles* A, B, C, *trouver un des côtés.*

On aura le côté a, par exemple, à l'aide de la formule

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}(A + B + C) \cos \frac{1}{2}(B + C - A)}{\sin B \sin C}};$$

on pourrait aussi obtenir $\frac{1}{2} a$ par son cosinus ou par sa tangente (art. 68).

76. 3e Cas. *Étant donnés deux côtés* a, b, *et l'angle compris* C, *trouver les autres parties du triangle.*

On aura le troisième côté c par la formule

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C;$$

mais son emploi immédiat exige que l'on fasse usage de la table des sinus et de celle des nombres. On remédie à cet inconvénient en décomposant en deux facteurs le second membre de la formule; mais cette opération ne peut se faire qu'à l'aide d'un arc auxiliaire. Soit donc φ cet arc, et de plus M un coefficient indéterminé, en sorte qu'on ait

$$\cos c = M \cos(a - \varphi);$$

développant cette expression, il vient

$$\cos c = M \cos a \cos \varphi + M \sin a \sin \varphi,$$

d'ailleurs

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C;$$

et comme ces deux valeurs doivent être identiques, on a, en les égalant terme à terme,

$$M \cos \varphi = \cos b, \qquad M \sin \varphi = \sin b \cos C,$$

d'où

$$\tan \varphi = \tan b \cos C, \quad M = \frac{\cos b}{\cos \varphi},$$

et par suite,

$$\cos c = \frac{\cos b}{\cos \varphi} \cos(a - \varphi).$$

Autrement l'on a

$$\cos c = \cos b\,[\cos a + \operatorname{tang} b \cos C \sin a],$$

et si l'on fait $\operatorname{tang} b \cos C = \operatorname{tang}\varphi$, on aura, comme ci-dessus,

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos b\,[\cos a + \operatorname{tang}\varphi \sin a]\\ &= \frac{\cos b}{\cos\varphi}[\cos a \cos\varphi + \sin\varphi \sin a]\\ &= \frac{\cos b}{\cos\varphi}\cos(a-\varphi).\end{aligned}$$

L'arc auxiliaire φ représente donc le côté de l'angle droit d'un triangle sphérique rectangle, dont b est l'hypoténuse et C l'angle oblique adjacent (art. **56**); en d'autres termes, c'est le segment adjacent à l'angle C, formé par la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle A sur la base a opposée. Lorsque $\operatorname{tang}\varphi$ sera négative, auquel cas le segment sera extérieur au triangle, on prendra φ négativement, et par conséquent l'on aura $\cos c = \frac{\cos b}{\cos\varphi}\cos(a+\varphi)$; du reste il faudra avoir égard aux signes des cosinus.

Quant au segment θ de l'angle A, opposé au segment φ de la base a, il est donné par la relation $\cot\theta = \cos b \operatorname{tang} C$, démontrée à l'art. **61**.

77. Si, dans l'expression de $\cos c$, on met pour $\cos C$ sa valeur $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}C$, il viendra d'abord

$$\cos c = \cos(a-b) - 2\sin a \sin b \sin^2\tfrac{1}{2}C;$$

puis si l'on change de même les autres cosinus, on trouvera, réduction faite,

$$\begin{aligned}\sin^2\tfrac{1}{2}c &= \sin^2\tfrac{1}{2}(a-b) + \sin a \sin b \sin^2\tfrac{1}{2}C\\ &= \sin^2\tfrac{1}{2}(a-b)\left[1 + \frac{\sin a \sin b \sin^2\frac{1}{2}C}{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}\right].\end{aligned}$$

Soit

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\sqrt{\sin a \sin b},$$

on aura évidemment

$$\sin \tfrac{1}{2} c = \sin \tfrac{1}{2}(a-b)\,(1 + \operatorname{tang}^2 \theta)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \theta},$$

solution analogue à celle de l'art. **47** : elle est surtout utile lorsque le côté c ne peut être déterminé rigoureusement par son cosinus, à cause de l'exactitude limitée des Tables de logarithmes. En effet, quand c est très petit, son cosinus diffère si peu de l'unité que le logarithme correspondant, qui ne renferme que 7 chiffres décimaux, appartient indifféremment à un arc plus grand ou plus petit. On ne tomberait pas dans cet inconvénient, si $\frac{1}{2}c$ était peu différent du quadrant, et qu'il fût donné par son cosinus.

Pour l'obtenir de cette manière, on remarquera qu'à cause de

$$\cos c = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} c - 1, \text{ et de } \cos(a-b) = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}(a-b) - 1,$$

on a

$$\begin{aligned} \cos^2 \tfrac{1}{2} c &= \cos^2 \tfrac{1}{2}(a-b) - \sin a \sin b \sin^2 \tfrac{1}{2} C \\ &= \cos^2 \tfrac{1}{2}(a-b) \left[1 - \frac{\sin a \sin b \sin^2 \frac{1}{2} C}{\cos^2 \frac{1}{2}(a-b)} \right]; \end{aligned}$$

or, ici l'on peut égaler au carré d'un sinus la quantité qui suit l'unité dans le second membre, parce que le problème n'est possible qu'autant que le facteur binome est positif.

Soit donc

$$\sin \theta = \frac{\sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(a-b)} \sqrt{\sin a \sin b},$$

on aura

$$\cos \tfrac{1}{2} c = \cos \tfrac{1}{2}(a-b) \cos \theta :$$

la seconde racine négative est inadmissible, puisque $\frac{1}{2}c < 1^q$. Lorsque $a - b$ est très-petit, il vaut mieux, pour l'exactitude de la solution numérique, changer $\cos C$ en $2\cos^2 \frac{1}{2} C - 1$, et l'on voit bien pourquoi, d'après une transformation analogue opérée à la fin de l'art. **47**.

78. Quant aux angles inconnus A, B, ils se déduiront tous deux

des analogies de Néper, qui donnent

$$\tang \tfrac{1}{2}(A + B) = \cot \tfrac{1}{2} C \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)},$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(A - B) = \cot \tfrac{1}{2} C \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)};$$

car ensuite on a

$$A = \tfrac{1}{2}(A + B) + \tfrac{1}{2}(A - B), \quad \text{et} \quad B = \tfrac{1}{2}(A + B) - \tfrac{1}{2}(A - B).$$

On aurait aussi directement

$$\cot A = \frac{\cot a \sin b - \cos C \cos b}{\sin C},$$

$$\cot B = \frac{\cot b \sin a - \cos C \cos a}{\sin C};$$

et pour réduire, si l'on veut, à un seul terme chacun des seconds membres, le premier, par exemple; soit comme ci-dessus φ un angle auxiliaire, et M un coefficient indéterminé, puis supposons que

$$\cot A = M \sin (b - \varphi),$$

on aura, en développant,

$$\cot A = M \sin b \cos \varphi - M \cos b \sin \varphi;$$

ensuite, en comparant cette valeur à la précédente, il viendra

$$M \cos \varphi = \frac{\cot a}{\sin C}, \quad M \sin \varphi = \cot C,$$

d'où

$$\tang \varphi = \tang a \cos C, \quad \text{et} \quad \cot A = \frac{\cot C}{\sin \varphi} \sin (b - \varphi);$$

ce qui revient à diviser le triangle proposé en deux triangles rectangles.

79. Les angles subsidiaires ont donc pour objet de transformer les expressions binomes en un seul terme, afin de les rendre plus faciles

à évaluer par les logarithmes. On s'en convaincra de nouveau en résolvant le problème suivant :

Étant donnés, comme ci-dessus, a, b, C, *déterminer directement l'arc de grand cercle perpendiculaire au côté inconnu* c, *et compris entre ce côté et le sommet de l'angle* C *opposé.*

Soit p cet arc ou la hauteur du triangle, on aura évidemment

$$\sin p = \sin b \sin \mathrm{A} = \frac{\sin a \sin b \sin \mathrm{C}}{\sin c};$$

d'ailleurs, par ce qui précède,

$$\begin{aligned}
\sin c &= \sqrt{1 - \cos^2 c} = \sqrt{(1 + \cos c)(1 - \cos c)} \\
&= \sqrt{[1 + \cos(a - b) - 2\sin a \sin b \sin^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{C}]} \\
&\quad \overline{[1 - \cos(a - b) + 2\sin a \sin b \sin^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{C}]} \\
&= 2\sqrt{[\cos^2 \tfrac{1}{2}(a - b) - \sin a \sin b \sin^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{C}]} \\
&\quad \overline{[\sin^2 \tfrac{1}{2}(a - b) + \sin a \sin b \sin^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{C}]}.
\end{aligned}$$

Substituant donc cette valeur dans l'expression précédente, on trouvera, après quelques transformations aisées,

$$\begin{aligned}
\sin p &= \frac{\sin a \sin b \sin \mathrm{C}}{\sqrt{(\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \mathrm{C})^2 + \sin^2 a \sin^2 \mathrm{C}}} \\
&= \frac{\cot \frac{1}{2}\mathrm{C}}{\sqrt{\left[\frac{\cos^2 \frac{1}{2}(a-b)}{\sin a \sin b \sin^2 \frac{1}{2}\mathrm{C}} - 1\right]\left[\frac{\sin^2 \frac{1}{2}(a-b)}{\sin a \sin b \sin^2 \frac{1}{2}\mathrm{C}} + 1\right]}}.
\end{aligned}$$

Soient maintenant

$$\frac{\cos^2 \frac{1}{2}(a-b)}{\sin a \sin b \sin^2 \frac{1}{2}\mathrm{C}} = \text{séc}^2 u, \quad \text{et} \quad \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(a-b)}{\sin a \sin b \sin^2 \frac{1}{2}\mathrm{C}} = \text{tang}^2 u';$$

alors l'expression précédente se changera en celle-ci :

$$\sin p = \cot u \cos u' \cot \tfrac{1}{2}\mathrm{C}.$$

La solution qui se présente naturellement est de chercher d'a-

bord le côté c par son cosinus, et de résoudre ensuite l'équation $\sin p = \frac{\sin a \sin b \sin C}{\sin c}$.

Voyons cependant si, en calculant directement la perpendiculaire p par sa tangente, il n'y aurait pas quelque chose à gagner du côté de la brièveté.

On a

$$\tang^2 p = \frac{\sin^2 p}{1 - \sin^2 p} = \frac{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C}{\sin^2 c - \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C};$$

substituant pour $\sin^2 c$ sa valeur $1 - (\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C)^2$, puis développant et réduisant, on trouvera

$$\tang^2 p = \frac{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C}{1 - \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b - 2 \sin a \cos a \sin b \cos b \cos C};$$

mettant dans le dénominateur, $\sin^2 a + \cos^2 a$ à la place de l'unité, et réduisant encore, on obtiendra facilement

$$\tang^2 p = \frac{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C}{\sin^2 a \cos^2 b + \cos^2 a \sin^2 b - 2 \sin a \cos a \sin b \cos b \cos C}$$

$$= \frac{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C}{\sin^2 (a - b) + 4 \sin a \cos a \sin b \cos b \sin^2 \frac{1}{2} C};$$

enfin, faisant

$$\frac{\sin 2a \sin 2b \sin^2 \frac{1}{2} C}{\sin^2 (a - b)} = \tang^2 \theta,$$

on aura

$$\tang p = \frac{\cos \theta \sin a \sin b \sin C}{\sin (a - b)},$$

solution plus courte que la première.

80. Il est facile de trouver d'autres expressions de l'arc perpendiculaire, lorsqu'on ne s'astreint pas à les rendre uniquement fonctions de deux côtés et de l'angle compris. Par exemple, si l'on élève au carré l'équation $\sin p = \sin b \sin A$, et qu'on fasse attention que $\sin b \sin A = \sin a \sin B$, on aura évidemment

$$\sin^2 p = \sin a \sin b \sin A \sin B, \quad \text{de là} \quad \cos^2 p = 1 - \sin a \sin b \sin A \sin B.$$

D'ailleurs, à cause de $\cos C = \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B$, on a

$$\sin A \sin B = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\cos c},$$

et par suite,

$$\cos^2 p = \frac{\cos c - \sin a \sin b \cos C - \sin a \sin b \cos A \cos B}{\cos c}$$
$$= \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b \cos A \cos B}{\cos c};$$

expression due à Delambre, et qui renferme trois côtés et deux angles. On peut aussi rendre $\sin p$ fonction des trois côtés seulement, en mettant dans l'équation $\sin p = \sin b \sin A$, pour $\sin A$ sa valeur donnée à l'art. **55**.

Mais aucune de nos solutions n'indique si la perpendiculaire p est plus petite ou plus grande qu'un quadrant. Pour lever le doute, il faudrait connaître les angles A et B; car s'ils sont de même espèce, la perpendiculaire tombera dans le triangle, et sera aussi de l'espèce de ces angles (art. **63**).

81. Nous avons vu plus haut que la 3ᵉ équation (α), art. **54**, prend cette forme

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} c = \sin^2 \tfrac{1}{2}(a - b) + \sin a \sin b \sin^2 \tfrac{1}{2} C;$$

son analogue (ε), art. **67**, devient, par le même procédé,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \cos^2 \tfrac{1}{2}(A + B) + \sin A \sin B \sin^2 \tfrac{1}{2} c;$$

or, si l'on élimine $\sin^2 \frac{1}{2} C$ entre ces deux résultats, on obtiendra

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(a - b) + \sin a \sin b \cos^2 \frac{1}{2}(A + B)}{1 - \sin a \sin b \sin A \sin B}.$$

Par une marche parfaitement semblable on trouverait

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} c = \cos^2 \tfrac{1}{2}(a + b) + \sin a \sin b \cos^2 \tfrac{1}{2} C,$$
$$\cos^2 \tfrac{1}{2} C = \sin^2 \tfrac{1}{2}(A - B) + \sin A \sin B \cos^2 \tfrac{1}{2} c,$$

par suite

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(a+b) + \sin a \sin b \sin^2 \frac{1}{2}(A-B)}{1 - \sin a \sin b \sin A \sin B},$$

et enfin

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(a-b) + \sin a \sin b \cos^2 \frac{1}{2}(A+B)}{\cos^2 \frac{1}{2}(a+b) + \sin a \sin b \sin^2 \frac{1}{2}(A-B)}.$$

C'est une des relations curieuses trouvées par Delambre (*Astronomie*, tome I, page 201). Il en existe une toute pareille entre les trois angles et deux côtés, et cela est une suite naturelle de la propriété du triangle polaire. Mais en veut-on une différente composée de ces mêmes quantités? Il n'y a qu'à multiplier l'une par l'autre les deux équations suivantes :

$$\cot A = \frac{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C}{\sin a \sin C} = \frac{\sin(a+b)\sin^2 \frac{1}{2} C - \sin(a-b)\cos^2 \frac{1}{2} C}{\sin a \sin C},$$

$$\cot B = \frac{\cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C}{\sin b \sin C} = \frac{\sin(a+b)\sin^2 \frac{1}{2} C + \sin(a-b)\cos^2 \frac{1}{2} C}{\sin b \sin C},$$

obtenues à l'art. 65, et l'on aura

$$\cot A \cot B = \frac{\sin^2(a+b)\sin^4 \frac{1}{2} C - \sin^2(a-b)\cos^4 \frac{1}{2} C}{\sin a \sin b \sin^2 C},$$

ou autrement, à cause de $\sin^2 C = 4 \sin^2 \frac{1}{2} C \cos^2 \frac{1}{2} C$, il viendra

$$4 \sin a \sin b \cot A \cot B = \sin^2(a+b) \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} C - \sin^2(a-b) \cot^2 \tfrac{1}{2} C;$$

relation qui nous paraît nouvelle et assez remarquable.

Si, au contraire, on ajoute les valeurs de $\sin a \cot A$ et $\sin b \cot B$, on aura de suite

$$\sin b \cot B + \sin a \cot A = \sin(a+b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C,$$

pareillement

$$\sin b \cot B - \sin a \cot A = \sin(a-b) \cot \tfrac{1}{2} C;$$

enfin multipliant, ensuite divisant ces deux résultats l'un par l'autre, il

viendra

$$\sin^2 b\ \cot^2 B - \sin^2 a \cot^2 A = \sin(a+b)\sin(a-b),$$

$$\frac{\sin b \cot B + \sin a \cot A}{\sin b \cot B - \sin a \cot A} = \frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} C.$$

Toutes ces relations fort simples pourraient servir, dans un calcul trigonométrique, à réduire en un seul terme des quantités complexes.

82. Avant de quitter cette digression sur les recherches de ce genre, nous ferons encore remarquer que les deux équations fondamentales

$$\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c,$$

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b},$$

étant divisées l'une par l'autre, donnent tout d'abord cette autre relation connue,

$$\cot A \sin B = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin a \sin c}.$$

On pourrait, par de semblables artifices de calcul, trouver beaucoup d'autres relations trigonométriques, mais qui seraient plus curieuses qu'utiles.

83. 4[e] Cas. *Étant donnés deux angles* A, B *et le côté* c *compris, résoudre le triangle.*

La solution relative à ce cas est toute pareille à la précédente; ainsi on aura les deux côtés a, b par les formules de Néper, savoir,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)},$$

ou par celles-ci:

$$\cot a = \frac{\cot A \sin B + \cos B \cos c}{\sin c} = \frac{\cos c}{\cos\varphi}\cos(B-\varphi), \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\cot A}{\cos c};$$

$$\cot b = \frac{\cot B \sin A + \cos A \cos c}{\sin c} = \frac{\cos c}{\cos\varphi'}\cos(A-\varphi'), \quad \operatorname{tang}\varphi' = \frac{\cot B}{\cos c}.$$

Ayant déterminé a et b, on trouvera sin C par l'équation .... $\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a}$, ou directement par la formule

$$\cos C = \cos c \sin A \sin B - \cos A \cos B;$$

ou bien soit $\tang \varphi = \frac{\cot B}{\cos c}$, on aura

$$\cos C = \frac{\cos B}{\sin \varphi} \sin(A - \varphi).$$

Pour trouver l'expression du sinus ou de la tangente de l'arc perpendiculaire au côté c en fonction des données actuelles, procédez comme dans le cas précédent, ou, ce qui est plus simple, transférez au triangle polaire les résultats ci-dessus (art. **79**).

84. 5[e] Cas. *Étant donnés deux côtés* a, b *et l'angle* A *opposé au premier côté, trouver le troisième côté* c *et les deux autres angles* B, C.

L'angle inconnu B s'obtiendra par la formule $\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}$; et pour trouver l'angle C, on aura à résoudre l'équation

$$\cot A \sin C + \cos C \cos b = \cot a \sin b,$$

qui monterait au second degré si l'on y mettait pour cos C sa valeur $\sqrt{1 - \sin^2 C}$, et qui fournirait par conséquent deux racines. Ainsi le problème proposé est susceptible de deux solutions. Mais au lieu de suivre cette voie, il est plus simple d'introduire dans le premier membre de l'équation un angle auxiliaire φ, tel qu'on ait

$$M \sin(C + \varphi) = \cot a \sin b.$$

Pour déterminer cet angle ainsi que le coefficient M, développons et comparons terme à terme les deux membres de ces équations, il viendra

$$M \cos \varphi = \cot A, \quad M \sin \varphi = \cos b.$$

De là

$$\tang \varphi = \tang A \cos b \quad \text{et} \quad \sin(C + \varphi) = \frac{\tang b \sin \varphi}{\tang a}:$$

ici $1^{\circ} - \varphi$ est l'angle au sommet C du triangle formé par le côté b et la perpendiculaire abaissée sur la base c (art. 61).

Lorsqu'on substitue pour $\cos b$ sa valeur déduite de la seconde relation (ε), on a

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\cos A \sin C};$$

on a en outre

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin C}{\cot a \operatorname{tang} b - \cos C}.$$

Le troisième côté c sera donné par l'équation $\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}$; ou bien, en n'employant que les données primitives, par la formule

$$\cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c = \cos a,$$

qu'on transformera en celle-ci

$$\cos(c - \varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b},$$

à l'aide d'un arc subsidiaire φ donné par l'équation $\operatorname{tang}\varphi = \cos A \operatorname{tang} b$. Cet arc, qui est le segment adjacent à l'angle A, et qui se trouve formé par la perpendiculaire abaissée de l'angle C sur le côté opposé, peut s'exprimer analytiquement de plusieurs manières différentes, selon les données du problème; par exemple, si les trois côtés sont connus, on aura

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} b \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b \sin c}.$$

Si deux côtés et l'angle compris sont donnés, on aura

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin b \cos A}{\cos b} = \frac{\cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B}{\cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B};$$

c'est ce qu'il est aisé de voir. Il n'est pas plus difficile de reconnaître que

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin c \cos A}{\cot B \sin A + \cos c \cos A} = \frac{\sin c}{\operatorname{tang} A \cot B + \cos c} = \frac{\cot A \sin B}{\operatorname{cos\acute{e}c} a \cos b}.$$

Le même segment pourrait aussi s'exprimer en fonction des trois angles.

85. 6e Cas. *Étant donnés deux angles* A *et* B *avec le côté* a *opposé au premier, trouver les deux autres côtés* b, c *et le troisième angle* C.

La solution de ce problème se déduit de la précédente par la propriété du triangle polaire; ainsi l'on aura le côté b par l'équation $\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}$, et le côté c par la formule

$$\cot a \sin c - \cos B \cos c = \cot A \sin B,$$

de laquelle on tirera

$$\sin(c - \varphi) = \frac{\operatorname{tang} B \sin \varphi}{\operatorname{tang} A},$$

en y introduisant un angle auxiliaire φ donné par l'équation

$$\operatorname{tang} \varphi = \cos B \operatorname{tang} a.$$

Enfin l'on trouvera l'angle C au moyen de l'équation

$$\cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C = \cos A;$$

mais, pour abréger le calcul, on fera $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\cot B}{\cos a}$, et l'on aura

$$\sin(C - \varphi) = \frac{\cos A \sin \varphi}{\cos B}.$$

Ce problème est, comme le précédent, susceptible de deux solutions (art. 60). Voyez la *Trigonométrie* de Legendre, pour savoir distinguer dans ces deux cas si parmi des valeurs particulières des quantités données, il existe deux triangles qui satisfont à la question, ou seulement un seul. Ici nous supposons les cas les plus généraux.

86. Si l'on connaissait deux angles A, B, ainsi que les deux côtés opposés a, b, et qu'on voulût déterminer immédiatement le troisième

angle C, on pourrait transformer la relation

$$\sin(a-b)=\frac{\sin c \sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos^2\frac{1}{2}C},$$

démontrée à l'art. **72**, en cette autre,

$$\sin(a-b)=\frac{2\sin a}{\sin A}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B),$$

qu'on obtient en multipliant le second membre de la première, haut et bas, par $\sin C$; et de là on aurait

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C=\frac{\sin A\sin(a-b)}{2\sin a\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)},$$

sans ambiguité.

Il résulterait en outre de l'article cité,

$$\cot\tfrac{1}{2}C=\frac{\sin A\sin(a+b)}{2\sin a\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}.$$

Si l'on voulait l'angle C par son cosinus, il faudrait de l'équation

$$\cos C=\cos c\sin A\sin B-\cos A\cos B$$

éliminer $\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$, et l'on aurait, mais d'une manière beaucoup moins commode pour les logarithmes,

$$\cos C=\frac{\cos a\cos b\sin A\sin B-\cos A\cos B}{1-\sin a\sin b\sin A\sin B}.$$

Lorsqu'on multiplie entre elles les valeurs ci-dessus de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}C$ et $\cot\frac{1}{2}C$, on a de suite la relation

$$\frac{\sin^2 a}{\sin^2 A}=\frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\sin(A+B)\sin(A-B)},$$

que l'on peut vérifier ainsi qu'il suit :

En général,

$$\left.\begin{aligned}\sin^2 a - \sin^2 b &= \sin(a+b)\sin(a-b)\\ \sin^2 \mathrm{A} - \sin^2 \mathrm{B} &= \sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})\end{aligned}\right\}\text{ art. 45;}$$

ainsi,

$$\frac{\sin^2 a\left(1-\dfrac{\sin^2 b}{\sin^2 a}\right)}{\sin^2 \mathrm{A}\left(1-\dfrac{\sin^2 \mathrm{B}}{\sin^2 \mathrm{A}}\right)}=\frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})};$$

mais $\dfrac{\sin b}{\sin a}=\dfrac{\sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A}}$; donc, etc.

Dans les applications numériques, il faudra, pour éviter les solutions inutiles ou fausses, avoir égard aux signes des lignes trigonométriques (art. 46), et se rappeler les trois règles suivantes :

1°. Tout angle ou tout côté d'un triangle sphérique doit être plus petit que deux quadrans;

2°. Les plus grands angles sont opposés aux plus grands côtés, et réciproquement;

3°. Enfin, un angle ou un côté d'un triangle sphérique ne peut être négatif.

DE QUELQUES PROPRIÉTÉS REMARQUABLES DU TRIANGLE SPHÉRIQUE, ET NOTAMMENT DE DIVERSES EXPRESSIONS DE SA SURFACE.

87. Il existe une propriété du triangle sphérique de laquelle on déduit immédiatement une relation entre les trois angles et deux côtés. Cette propriété est que *si l'on divise en deux parties égales, par des arcs de grand cercle, chacun des angles d'un triangle sphérique, ces arcs se couperont au même point.*

Supposons que les arcs Aa, Cc (*fig.* 15), divisent en deux parties égales les angles A, C, et se coupent au point R; il s'agit de prouver que l'arc de grand cercle BRb divisera aussi en deux parties égales l'angle B.

Or, les deux triangles CAR, RAc, donnent

$$\frac{\sin \mathrm{AC}}{\sin \mathrm{R}}=\frac{\sin \mathrm{CR}}{\sin \frac{1}{2}\mathrm{A}},\qquad \frac{\sin \mathrm{A}c}{\sin \mathrm{R}}=\frac{\sin c\,\mathrm{R}}{\sin \frac{1}{2}\mathrm{A}};$$

divisant ces deux équations l'une par l'autre, on a

$$\frac{\sin AC}{\sin Ac} = \frac{\sin CR}{\sin cR};$$

ainsi, quand un arc tel que AR divise également un angle d'un triangle sphérique, les sinus des segments du côté opposé sont entre eux comme les sinus des côtés adjacents.

Le triangle ACB, dans lequel Cc partage en deux parties égales l'angle C, donne par conséquent

$$\frac{\sin AC}{\sin Ac} = \frac{\sin CB}{\sin cB}:$$

de ces deux rapports égaux il suit que

$$\frac{\sin CR}{\sin cR} = \frac{\sin CB}{\sin cB},$$

donc l'arc BR divise également l'angle B. Donc, etc.

Maintenant il résulte de l'art. **70** et de l'hypothèse ci-dessus, que les deux triangles BAR, CBR donnent respectivement

$$\cot BR = \frac{\cot\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B}{\sin c} + \cot c \cos\frac{1}{2}B,$$

$$\cot BR = \frac{\cot\frac{1}{2}C \sin\frac{1}{2}B}{\sin a} + \cot a \cos\frac{1}{2}B;$$

on a donc la relation cherchée en égalant ces deux valeurs, et en réduisant, savoir:

$$\sin(a-c) = (\cot\tfrac{1}{2}C \sin c - \cot\tfrac{1}{2}A \sin a)\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}B;$$

c'est à quoi l'on parviendrait encore par quelques artifices de calcul appliqués à la valeur de $\sin(a-c)$, donnée à l'art. **72**.

Si l'on fait attention qu'à cause de $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C}$, l'on a

$$\sin a \cot A = \frac{\sin c \cos A}{\sin C}, \qquad \sin c \cot C = \frac{\sin a \cos C}{\sin A},$$

et par soustraction

$$\sin c \cot C - \sin a \cot A = \frac{\sin a}{\sin A} (\cos C - \cos A);$$

alors en mettant pour $\cos C$ et $\cos A$ leurs valeurs $2\cos^2 \frac{1}{2} C - 1$ et $2\cos^2 \frac{1}{2} A - 1$, il viendra

$$\begin{aligned}\sin c \cot C - \sin a \cot A &= \frac{2\sin a}{\sin A} (\cos^2 \tfrac{1}{2} C - \cos^2 \tfrac{1}{2} A) \\ &= \frac{\sin c . \cos^2 \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C} - \frac{\sin a . \cos^2 \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A} \\ &= \sin c \cot \tfrac{1}{2} C - \sin a \cot \tfrac{1}{2} A.\end{aligned}$$

Par conséquent l'on a aussi

$$\sin (a - c) = (\cot C \sin c - \cot A \sin a) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B.$$

88. Si du point R de concours des arcs qui divisent également chacun des angles A, B, C, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés opposés, ces perpendiculaires seront nécessairement égales comme dans le triangle rectiligne, et elles partageront aussi les trois côtés en six segments égaux entre eux deux à deux. Par exemple, les segments adjacents à l'angle A auront chacun pour valeur le demi-périmètre s du triangle, moins le côté opposé à cet angle. Ainsi, par la propriété du triangle sphérique rectangle, l'une des perpendiculaires dont il s'agit étant désignée par p, on aura (art. 60),

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} p &= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A \sin (s - a) \\ &= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B \sin (s - b) \\ &= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C \sin (s - c);\end{aligned}$$

de là cette nouvelle relation, signalée par M. Molweide, savoir :

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} A}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} B} = \frac{\sin (s - b)}{\sin (s - a)}.$$

(Voyez la *Connaissance des Tems* pour l'année 1820, page 346.)

Il est évident que la distance α du point R à l'angle A sera donnée par

la formule

$$\tang \alpha = \frac{\tang (s - a)}{\cos \frac{1}{2} A}.$$

Quand on est parvenu à des formules nouvelles, il est utile de les vérifier par des exemples numériques: on pourra, pour cet effet, employer le triangle d'épreuve, dont Delambre a calculé toutes les parties (*Astron.*, tome I, page 227), ou celui que nous avons donné (art. **158**).

Il est remarquable que si les arcs Aa, Bb, Cc étaient chacun perpendiculaires aux côtés a, b, c, ils se couperaient pareillement en un même point R. Cette autre propriété n'est pas plus difficile à démontrer que la précédente, et elle résulte de ce que les cosinus des deux segments de la base, formés par la perpendiculaire, sont proportionnels aux cosinus des côtés adjacents.

89. Occupons-nous maintenant de la recherche de l'aire d'un triangle sphérique, en fonction de trois des six parties dont il est composé. Or, on sait que l'aire d'un tel triangle a pour mesure l'excès de ses trois angles sur deux angles droits, c'est-à-dire qu'elle est égale à autant de triangles trirectangles, ou de huitièmes de la surface de la sphère, qu'il existe d'angles droits dans l'excès dont il s'agit (*Géométrie* de Legendre, liv. VII, prop. 23). Soit, d'après cela, Σ l'aire cherchée, 1° le quadrant pris pour unité de mesure des angles, et A, B, C les trois angles d'un triangle sphérique; on aura

$$\Sigma = A + B + C - 2^{\circ}. \qquad (1)$$

Mais ρ désignant le rayon de la sphère à laquelle le triangle appartient, et π la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est pris pour unité, on a pour l'expression de l'aire de cette sphère, $4\pi\rho^2$, et pour celle T du triangle proposé, évaluée en mesures carrées,

$$T = \tfrac{1}{2}\pi\rho^2\Sigma, \qquad (2)$$

formule dans laquelle le facteur Σ doit être un nombre abstrait. Par exemple, si Σ était donné en degrés, il faudrait remplacer ce facteur par $\frac{\Sigma}{90^{\circ}}$, parce qu'alors $1^{\circ} = 90^{\circ}$.

On peut avoir Σ sous différentes formes. D'abord il est évident que

$$\sin\frac{\Sigma}{2} = \sin\left(\frac{A+B+C}{2} - 1^{q}\right) = -\cos\left(\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2}\right);$$

développant le second membre, il vient

$$\sin\frac{\Sigma}{2} = -\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2} + \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2},$$

et substituant pour $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$ leurs valeurs en fonction de a, b, c, C (art. **64**), on trouve

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{\Sigma}{2} &= \frac{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\left[\cos\tfrac{1}{2}(a-b)-\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\right]\\ &= \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}c};\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

enfin remplaçant $\sin\frac{1}{2}C$ et $\cos\frac{1}{2}C$ par leurs valeurs (γ) données à l'art. **64**, et faisant $2s = a + b + c$, pour abréger, on a

$$\sin\frac{\Sigma}{2} = \frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}. \quad (4)$$

Cherchons en outre l'expression de $\cos\frac{\Sigma}{2}$: on a d'abord

$$\begin{aligned}\cos\frac{\Sigma}{2} &= \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - 1^{q}\right) = \sin\left(\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2} + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

Substituant comme ci-dessus pour $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$ leurs valeurs, il vient

$$\begin{aligned}\cos\frac{\Sigma}{2} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C + \cos\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\\ &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b) + \left[\cos\frac{1}{2}(a+b) - \cos\frac{1}{2}(a-b)\right]\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\\ &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b) - 2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\\ &= \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\left(1 - 2\sin^2\frac{1}{2}C\right)}{\cos\frac{1}{2}c};\end{aligned}$$

ou bien, à cause de $\cos C = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} C$,

$$\cos \frac{\Sigma}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos C}{\cos \frac{1}{2} c}. \qquad (5)$$

Cette formule, ou celle (3), fera connaître l'aire d'un triangle sphérique, au moyen de trois côtés et d'un angle. Pour en avoir une qui ne dépende que de deux côtés et de l'angle compris, on divisera l'une par l'autre (3) et (5); en effet, on aura sur-le-champ

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Sigma = \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos C} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{1}{2} b \sin C}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{1}{2} b \cos C}; \qquad (6)$$

expression encore toute rationnelle.

La valeur précédente de $\cos \frac{\Sigma}{2}$ peut se mettre sous une autre forme, ainsi qu'il suit.

De ce que

$$\cos \frac{1}{2} \Sigma = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} c} - \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin^2 \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} c},$$

il en résulte, en éliminant $\sin^2 \frac{1}{2} C$, que

$$\cos \frac{1}{2} \Sigma = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} c} - \frac{\sin (s - a) \sin (s - b)}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c};$$

mais

$$\sin (s - a) \sin (s - b) = \frac{1}{2} [\cos (b - a) - \cos c];$$

ainsi

$$\cos \frac{1}{2} \Sigma = \frac{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} (a - b) - \frac{1}{2} \cos (a - b) + \frac{1}{2} \cos c}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c};$$

et comme $\cos (a - b) = 2 \cos^2 \frac{1}{2} (a - b) - 1$, le numérateur du second membre de cette équation devient

$$[\cos \tfrac{1}{2}(a - b) + \cos \tfrac{1}{2}(a + b)] \cos \tfrac{1}{2}(a - b) - \cos^2 \tfrac{1}{2}(a - b) + \tfrac{1}{2} \cos c + \tfrac{1}{2},$$

et se réduit à

$$\cos \tfrac{1}{2}(a + b) \cos \tfrac{1}{2}(a - b) + \tfrac{1}{2} \cos c + \tfrac{1}{2} = \frac{\cos a + \cos b + \cos c + 1}{2}.$$

On a donc cette formule remarquable,

$$\left.\begin{aligned}\cos\tfrac{1}{2}\Sigma &= \frac{\cos a+\cos b+\cos c+1}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\\ &= \frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c};\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

et en la divisant par celle désignée précédemment par (3), il vient

$$\cot\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{\sin a\sin b\sin C}.$$

Cherchons maintenant, à l'exemple de Legendre (*Géométrie*, note X), l'expression du rapport $\frac{1-\cos\frac{1}{2}\Sigma}{\sin\frac{1}{2}\Sigma}$. Premièrement, par ce qui précède,

$$\frac{1-\cos\frac{1}{2}\Sigma}{\sin\frac{1}{2}\Sigma} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\Sigma = \frac{1-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}};$$

en second lieu, le numérateur de cette expression étant le développement de la quantité

$$(1-\cos^2\tfrac{1}{2}a)(1-\cos^2\tfrac{1}{2}b)-(\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b-\cos\tfrac{1}{2}c)^2,$$

il s'ensuit qu'il peut être remplacé par le produit

$$\left\{\begin{aligned}&(\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b+\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b-\cos\tfrac{1}{2}c)\\&(\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b-\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b+\cos\tfrac{1}{2}c)\end{aligned}\right\},$$

ou par cet autre,

$$[\cos\tfrac{1}{2}(a-b)-\cos\tfrac{1}{2}c]\,[\cos\tfrac{1}{2}c-\cos\tfrac{1}{2}(a+b)]$$

$$=4\sin\tfrac{1}{2}s\sin\left(\frac{s-a}{2}\right)\sin\left(\frac{s-b}{2}\right)\sin\left(\frac{s-c}{2}\right).$$

Mais en général,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x};$$

ainsi l'on a définitivement la formule suivante, due à Lhuilier, de Genève :

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\Sigma = \sqrt{\left[\operatorname{tang}\frac{s}{2}\operatorname{tang}\left(\frac{s-a}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{s-b}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{s-c}{2}\right)\right]}. \quad (8)$$

Toutes les relations précédentes sont connues; mais la route qui nous y a conduit nous paraît nouvelle et directe, et c'est ce qui nous a engagé à les reproduire ici.

90. Avant de terminer cette matière, appliquons d'abord la formule (6) à la recherche du *maximum* d'aire d'un triangle sphérique dont deux côtés sont constants; et dans ce but, égalons à zéro la différentielle du second membre de cette formule, afin de caractériser ce *maximum ;* il viendra sur-le-champ

$$0 = 1 + \cot\tfrac{1}{2}a \cot\tfrac{1}{2}b \cos C,$$

ou bien

$$0 = \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b + \cos\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b \cos C.$$

Or, en mettant successivement pour $\cos C$ ses deux valeurs, $1-2\sin^2\frac{1}{2}C$ et $2\cos^2\frac{1}{2}C-1$, on a

$$2\cos\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b \sin^2\tfrac{1}{2}C = \cos\tfrac{1}{2}(a-b),$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b \cos^2\tfrac{1}{2}C = \cos\tfrac{1}{2}(a+b);$$

et, divisant ces deux relations l'une par l'autre, il vient

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Mais, par une formule de Néper,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}C}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)};$$

ainsi, définitivement,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B), \qquad \text{et} \qquad C = A+B.$$

Observons toutefois qu'on arrive au même résultat sans l'intervention du calcul différentiel, car en multipliant l'équation (3) précédente par la valeur de $\cos\frac{1}{2}(A+B-C)$ trouvée à l'art. **66**, on a cette expression nouvelle

$$\sin\tfrac{1}{2}\Sigma = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}(A+B-C),$$

laquelle montre évidemment que l'aire Σ est un *maximum* lorsque

$$C = A + B.$$

Ainsi *de tous les triangles sphériques formés avec deux côtés donnés et un troisième à volonté, le plus grand est celui dans lequel l'angle compris par les deux côtés donnés, est égal à la somme des deux autres angles.*

Cherchons pareillement l'aire *maximum* d'un triangle sphérique dont le périmètre est donné, et pour cet effet ayons recours à la formule (8), dans laquelle le côté $c = 2s - a - b$, puis faisons $\operatorname{tang}\frac{1}{4}\Sigma = u$, pour abréger; on aura

$$u = \sqrt{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-a)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-b)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b-s)},$$

et les équations relatives au *maximum* étant $\frac{du}{da} = 0$, $\frac{du}{db} = 0$, on trouvera d'abord

$$\frac{du}{da} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s-a)}{\cos^2\frac{1}{2}(a+b-s)} - \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b-s)}{\cos^2\frac{1}{2}(s-a)} = 0,$$

ou, en réduisant,

$$\frac{du}{da} = \sin(s-a) - \sin(a+b-s) = 0;$$

ensuite

$$\frac{du}{db} = \sin(s-b) - \sin(a+b-s) = 0:$$

ainsi

$$s - a = a + b - s, \qquad s - b = a + b - s,$$

et par conséquent

$$a = b = c.$$

D'ailleurs les coefficients différentiels $\frac{d^2u}{da^2}$, $\frac{d^2u}{da\,db}$, $\frac{d^2u}{db^2}$ étant négatifs, ils indiquent que u est un *maximum*. Donc, *entre tous les triangles sphériques ou rectilignes de même périmètre, le triangle équilatéral est le plus grand* (*).

On trouvera au livre VII de la *Géométrie* de Legendre, d'autres démonstrations de ces deux théorèmes, et les conséquences qui en découlent.

La formule (4), qui donne l'aire d'un triangle en fonction des trois côtés, procure une expression très-simple du rayon du petit cercle inscrit. En effet, ρ dénotant ce rayon, l'on a, par l'art. **88**,

$$\operatorname{tang}\rho = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{A}\sin(s-a);$$

partant,

$$\operatorname{tang}^3\rho = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{A}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{C}\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c).$$

Substituant pour $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{A}$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{B}$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{C}$ leurs valeurs (art. **64**), il vient, réduction faite, et après avoir extrait la racine cubique,

$$\operatorname{tang}\rho = \frac{\sqrt{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sqrt{\sin s}},$$

et enfin, à cause de la formule (4),

$$\operatorname{tang}\rho = \frac{2\sin\frac{1}{2}\Sigma\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sin s},$$

(*) Au reste, la démonstration analytique de cette proposition relative au triangle rectiligne n'exige pas le secours du calcul différentiel, car, à cause de $(s-a)+(s-b)+(s-c)=s$, il suffit de prouver que le produit des trois parties d'une quantité est plus petit que le cube du tiers de leur somme. Or si x, $x+\delta$, $x+\delta+\delta'$ sont généralement, par ordre de grandeur, ces trois parties, le tiers de leur somme sera $x+\frac{2\delta+\delta'}{3}$; et si l'on développe les deux expressions

$$x(x+\delta)(x+\delta+\delta'), \quad \left(x+\frac{2\delta+\delta'}{3}\right)^3,$$

on reconnaîtra que le second résultat est plus grand que le premier.

expression qui rentre nécessairement dans celle relative au triangle rectiligne, lorsque les côtés du triangle sphérique sont infiniment petits.

Quant au rayon R du cercle circonscrit (art. 65), il est donné par cette équation

$$\operatorname{tang} R = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}b \operatorname{tang}\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}\Sigma};$$

et si l'on cherche ce qu'elle devient dans le cas du 1er théorème précédent, on trouve $R=\frac{1}{2}c$, à cause de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}b = -\cos C = \sin\frac{1}{2}\Sigma$: ainsi le centre du cercle circonscrit au triangle sphérique dont l'aire est un *maximum*, est au milieu du côté variable ; et l'on conclut de cette propriété que

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a + \sin^2\tfrac{1}{2}b = \sin^2\tfrac{1}{2}c.$$

On reconnaîtra avec non moins de facilité que le sinus de la plus courte distance du sommet de l'angle C au côté opposé c, ou de la hauteur p du triangle ABC (art. 79), a pour expression

$$\sin p = \frac{2\cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}c} \sin\tfrac{1}{2}\Sigma,$$

Σ étant toujours l'aire de ce triangle.

Démontrons encore, par l'analyse trigonométrique, ce beau théorème dû à Lexell, savoir : que *les sommets de tous les triangles sphériques de même base et de même surface se trouvent sur un cercle unique.*

Soient a, b, c les trois côtés d'un de ces triangles, c la base commune et Σ sa surface ; prolongeons les arcs a, b vers le sommet de l'angle C qu'ils forment, de manière que chacun d'eux soit égal à une demi-circonférence π : alors la plus courte distance de leurs nouvelles extrémités A′, B′, mesurée sur la sphere, sera égale au côté c ; et si nous faisons $a' = \pi - a$, $b' = \pi - b$, non-seulement le triangle $a'b'c$ aura même sommet C que le triangle abc ; mais, d'après ce qui a été démontré (art. 66), le rayon R du cercle qui lui sera circonscrit sera donné par cette relation

$$\operatorname{tang} R = \frac{4\sin\frac{1}{2}a' \sin\frac{1}{2}b' \sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{1 - \cos^2 a' - \cos^2 b' - \cos^2 c + 2\cos a' \cos b' \cos c}}.$$

Or on a

$$\cos a' = -\cos a, \quad \cos b' = -\cos b,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}a' = \cos \tfrac{1}{2}a, \quad \sin \tfrac{1}{2}b' = \cos \tfrac{1}{2}b;$$

par conséquent

$$\tang R = \frac{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c \tang \frac{1}{2} c}{M}.$$

D'ailleurs Σ étant l'aire du triangle sphérique ABC dont les côtés sont abc, l'on a

$$\sin \tfrac{1}{2} \Sigma = \frac{M}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}:$$

multipliant ces deux équations membre à membre, il vient

$$\tang R = \frac{\tang \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{2} \Sigma}.$$

Donc R est une quantité constante, donc enfin la circonférence qui passe par le sommet C et par les deux points A′, B′ diamétralement opposés aux extrémités A, B de la base commune, est, ainsi que M. Steiner l'a fait remarquer le premier, le lieu géométrique des sommets de tous les autres triangles équivalents. Cette démonstration, beaucoup plus courte que celle de Legendre, complète en même temps le théorème de Lexell renfermé dans l'énoncé précédent; mais celle de M. Steiner, fondée sur des considérations purement géométriques, est d'une admirable simplicité. [*Voyez* le Mémoire de cet habile géomètre, inséré dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, tome VI (1841).]

Les auteurs de Traités de Trigonométrie sphérique à l'usage de l'Astronomie, donnent ordinairement une collection de formules différentielles trigonométriques, et même de formules aux différences finies: nous en démontrerons quelques-unes à mesure que le besoin s'en fera sentir; mais on pourra consulter, pour plus de détails, le 1[er] volume de l'*Astronomie* de Delambre, ou la *Trigonométrie* de Cagnoli, 2[e] édition, traduite de l'italien par Chompré.

Voyons maintenant la résolution des triangles, par la voie des séries.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION PAR LES SÉRIES, DE DIVERS CAS PARTICULIERS DE LA TRIGONOMÉTRIE.

91. La résolution des triangles par les formules que nous avons données dans les deux chapitres précédents, a tout le degré de généralité que l'on peut désirer; mais il arrive quelquefois dans la pratique, que l'erreur des Tables des logarithmes influe sensiblement sur les valeurs auxquelles conduisent les solutions générales: par exemple, lorsqu'un angle est donné par son sinus, il ne peut être déterminé rigoureusement à l'aide des tables ordinaires à sept décimales, lorsqu'il diffère très-peu de l'angle droit. Pour obvier à cet inconvénient, nous analyserons quelques-uns des cas particuliers dont les solutions, quoique approximatives, ont cependant l'avantage de procurer des résultats numériques plus exacts et plus indépendants de l'erreur dont il s'agit.

Nous emploierons les relations suivantes, qui sont assez connues pour que nous soyons dispensé d'en rappeler les démonstrations.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{2x^5}{1.3.5} + \ldots,$$

$$x = \sin x + \frac{1}{2.3}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4.5}\sin^5 x + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\sin^7 x + \ldots,$$

$$x = \operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x + \tfrac{1}{5}\operatorname{tang}^5 x - \tfrac{1}{7}\operatorname{tang}^7 x + \ldots,$$

$$\log(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots \text{ (le module étant } = 1\text{)}.$$

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos x, & \sin x &= \sin x,\\
2\cos^2 x &= \cos 2x + 1, & 2\sin^2 x &= -\cos 2x + 1,\\
4\cos^3 x &= \cos 3x + 3\cos x, & 4\sin^3 x &= -\sin 3x + 3\sin x,\\
8\cos^4 x &= \cos 4x + 4\cos 2x + 3, & 8\sin^4 x &= \cos 4x - 4\cos 2x + 3.
\end{aligned}$$

. . . .

Nous aurons aussi occasion de convertir en parties du quadrant, ou en grades, un arc donné en parties du rayon pris pour unité. Cette opération est fondée sur la considération suivante :

Si l'on suppose que le rayon soit développé sur la circonférence, il comprendra un nombre de parties du quadrant, que l'on obtiendra à l'aide de la proportion

$$\pi : 1 :: 2^{Q} : R = \frac{2^{Q}}{\pi};$$

π désignant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$, Q le quadrant, et R un arc égal au rayon.

Dans la pratique, 1^{Q} dépend du système de division que l'on adopte; ainsi, dans l'hypothèse que $1^{Q} = 100$ grades ou degrés décimaux, le rayon sera exprimé en centigrades ou minutes centésimales, par

$$R^{`} = \frac{20000}{\pi} = 6366^{`},1977237,$$

dont le logarithme $= 3.80388012297$, à cause de $\pi = 3,14159265359$, et de $2^{Q} = 20000^{`}$.

De même le rayon sera exprimé en décimilligrades ou secondes centésimales, par

$$R^{``} = \frac{2000000}{\pi} = 636619^{``},77237,$$

dont le logarithme est 5.8038801. Nous employons l'accent grave pour désigner les minutes et secondes de degré décimal, afin qu'on ne puisse pas les confondre avec les minutes et secondes de degré sexagésimal.

Ainsi, un arc quelconque, donné en parties du rayon considéré comme unité, sera exprimé en secondes, par exemple, en le multipliant par R''; et un arc donné en secondes sera converti en parties du rayon, en le divisant par R''.

Si l'on employait l'ancienne division du cercle, on aurait, à cause de $2^q = 180 \times 3600''$,

$$R'' = 206264'',8, \quad \text{et} \quad \log R'' = 5.3144251.$$

Il est remarquable que $R'' = \frac{1}{\sin 1''}$, du moins à très-peu près. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que le sinus de $1''$, vu sa petitesse, pouvant être pris pour l'arc même, on a sensiblement $\frac{1}{\sin 1''} = \frac{1}{\text{arc } 1''}$; mais $\frac{1}{\text{arc } 1''} = R''$ exactement; donc

$$R'' = \frac{1}{\sin 1''}.$$

Nous ferons, par la suite, usage de l'une et de l'autre expression du rayon réduit en secondes.

RÉSOLUTION D'UN TRIANGLE RECTILIGNE DONT DEUX CÔTÉS SONT DONNÉS AVEC L'ANGLE COMPRIS.

1°. *En supposant cet angle très-obtus;*

2°. *En supposant qu'un des côtés donnés soit très-petit à l'égard de l'autre.*

92. Soient a, b les côtés connus, et $C = 2^q - \theta$ l'angle compris, θ étant très-petit.

La formule (A) de l'art. **47** donnera, en conservant la notation qui y est indiquée, et en faisant attention que le cosinus de C est négatif,

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos\theta;$$

mais l'angle θ est si petit par hypothèse, que les tables des sinus qui ne renferment les logarithmes qu'avec sept décimales, ne donneraient pas le $\log \cos\theta$ avec assez de précision; ainsi l'évaluation du terme $2ab \cos\theta$ ne serait pas assez exacte: à la vérité on pourrait, dans ce cas, recourir à la formule de la page 57, mais il vaut encore mieux procéder ainsi qu'il suit.

D'abord, d'après l'art. précédent,

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2};$$

ainsi

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = (a+b)^2 - ab\theta^2:$$

donc si l'on prend la racine carrée en se bornant aux termes de l'ordre θ^2, on aura

$$c = (a+b) - \tfrac{1}{2}\frac{ab\theta^2}{(a+b)}. \quad (1)$$

Il est remarquable que, dans cette formule très-simple, θ est introduit comme un arc donné en parties du rayon; mais dans la pratique, cet arc est donné en minutes ou secondes; et comme il doit être employé dans la première hypothèse, il faudra diviser θ par R′ ou R″; on aura donc en général

$$c = (a+b) - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{ab}{a+b}\left(\frac{\theta}{R}\right)^2.$$

Maintenant, de l'équation $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c}$, ou $\frac{\sin A}{\sin\theta} = \frac{a}{c}$ on tire, en substituant la valeur de c et celle de $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{2.3}$,

$$\sin A = \frac{a}{c}\sin\theta = a\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right)c^{-1} = a\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right)\left(\frac{1}{a+b} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{ab\theta^2}{(a+b)^3}\right);$$

ou bien

$$\sin A = \frac{a\theta}{a+b}\left(1 + \frac{ab - a^2 - b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{\theta^2}{6}\right). \quad (2)$$

Mais l'angle C étant très-obtus, l'angle A sera fort aigu; ainsi le sinus de celui-ci pourrait être pris pour son arc, *et vice versâ*. Mais d'ailleurs on a $\sin A = A - \frac{A^3}{6}$; donc $A = \sin A + \frac{\sin^3 A}{6}$. Substituant pour $\sin A$ et $\sin A^3$ leurs valeurs déduites de l'équation (2), on aura plus

exactement, en se bornant toujours aux termes de l'ordre θ^3,

$$A = \sin A + \frac{\sin^3 A}{6} = \frac{a\theta}{a+b}\left(1 + \frac{b(a-b)}{(a+b)^2}\cdot\frac{\theta^2}{6}\right).$$

Il faut, dans cette formule, comme dans la valeur précédente de c, et pour la même raison, écrire $\frac{\theta}{R}$ au lieu de θ: mais la valeur actuelle de A serait donnée en parties du rayon; donc, pour l'avoir en minutes ou en secondes, il faudra la multiplier par R, ce qui revient à

$$A = \frac{a\theta}{a+b}\left[1 + \frac{b(a-b)}{6(a+b)^2}\cdot\left(\frac{\theta}{R}\right)^2\right].$$

93. Supposons maintenant que b soit beaucoup plus petit que a, et qu'on veuille l'angle B en série; on développera d'abord la formule

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(B+C)}{\sin B},$$

qui deviendra

$$a \sin B = b(\sin B \cos C + \cos B \sin C),$$

et de laquelle on tirera

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{b \sin C}{a - b\cos C}.$$

Mais en général

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \qquad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

e étant la base des logarithmes népériens, ou le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$; par conséquent l'équation précédente deviendra

$$\frac{e^{B\sqrt{-1}} - e^{-B\sqrt{-1}}}{e^{B\sqrt{-1}} + e^{-B\sqrt{-1}}} = \frac{b\left(e^{C\sqrt{-1}} + e^{-C\sqrt{-1}}\right)}{2a - b\left(e^{C\sqrt{-1}} + e^{-C\sqrt{-1}}\right)}. \quad (3)$$

Celle-ci peut être mise sous une forme plus simple et plus symé-

trique; car en divisant le premier membre haut et bas par $e^{-B\sqrt{-1}}$, on aura pour quotient

$$\frac{e^{2B\sqrt{-1}}-1}{e^{2B\sqrt{-1}}+1}, \quad \text{ou pour abréger,} \quad \frac{\alpha-1}{\alpha+1};$$

et le second membre pourra s'écrire ainsi:

$$\frac{a-be^{-C\sqrt{-1}}-\left(a-be^{C\sqrt{-1}}\right)}{a-be^{-C\sqrt{-1}}+a-be^{C\sqrt{-1}}}, \text{ ou, plus simplement, } \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}.$$

L'équation (3) est donc de la forme

$$\frac{\alpha-1}{\alpha+1}=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}:$$

or, si dans cette dernière on chasse les dénominateurs, et que l'on réduise, on trouvera

$$\alpha=\frac{\beta}{\gamma};$$

et si l'on remplace α, β, γ par les valeurs que ces lettres représentent, on aura

$$e^{2B\sqrt{-1}}=\frac{a-be^{-C\sqrt{-1}}}{a-be^{C\sqrt{-1}}}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}=\frac{1-\frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}}}{1-\frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}}};$$

ou prenant le logarithme népérien de chaque membre,

$$2B\sqrt{-1}=\log \mathrm{N}-\log \mathrm{D}.$$

Maintenant, développant le second membre d'après la formule connue, $\log(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-$ etc., on aura

$$2B\sqrt{-1}=\frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}}+\frac{b^2}{2a^2}e^{2C\sqrt{-1}}+\frac{b^3}{3a^3}e^{3C\sqrt{-1}}+\ldots$$
$$-\frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}}-\frac{b^2}{2a^2}e^{-2C\sqrt{-1}}-\frac{b^3}{3a^3}e^{-3C\sqrt{-1}}-\ldots,$$

puis divisant tout par $2\sqrt{-1}$, et réduisant au moyen de la formule

$$\frac{e^{mC\sqrt{-1}} - e^{-mC\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin. mC,$$

on aura enfin pour la valeur de l'angle B, exprimée en parties du rayon,

$$B = \frac{b}{a}\sin C + \frac{b^2}{2a^2}\sin 2C + \frac{b^3}{3a^3}\sin 3C + \ldots\ldots$$

Cette série élégante, à laquelle Delambre est parvenu le premier, est évidemment d'autant plus convergente, que b est plus petit à l'égard de a: elle donnera B en secondes en multipliant tous ses termes par R″.

Il suit de là que si l'on avait à résoudre l'équation $\tang x = \frac{v\sin C}{1 + v\cos C}$, et que v fût une très-petite fraction, comme ci-dessus, on aurait

$$x = v\sin C - \frac{v^2}{2}\sin 2C + \frac{v^3}{3}\sin 3C - \ldots\ldots$$

Pour avoir le logarithme du côté c par une série qui procède suivant les cosinus des multiples de l'angle opposé, mettons au lieu de $\cos C$ sa valeur $\frac{e^{C\sqrt{-1}} + e^{-C\sqrt{-1}}}{2}$; on aura

$$c^2 = a^2 + b^2 - abe^{C\sqrt{-1}} - abe^{-C\sqrt{-1}},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} c^2 &= (a - be^{C\sqrt{-1}})(a - be^{-C\sqrt{-1}}) \\ &= a^2\left(1 - \frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}}\right). \end{aligned}$$

Prenant le logarithme de chaque membre, et réduisant en série, il vient

$$\begin{aligned} 2\log c = 2\log a &- \frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}} - \frac{b^2}{2a^2}e^{2C\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{3a^3}e^{3C\sqrt{-1}} \ldots \\ &- \frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}} - \frac{b^2}{2a^2}e^{-2C\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{3a^3}e^{-3C\sqrt{-1}} \ldots, \end{aligned}$$

puis simplifiant à l'aide de la formule $\cos mC = \frac{e^{mC\sqrt{-1}} + e^{-mC\sqrt{-1}}}{2}$, réduisant et changeant les logarithmes népériens en logarithmes vulgaires, on a

$$\log c = \log a - \mu \frac{b}{a} \cos C - \mu \frac{b^2}{2a^2} \cos 2C - \mu \frac{b^3}{3a^3} \cos 3C - \ldots,$$

μ désignant le module 0,4342945. Cette série très-remarquable est due à Legendre.

ÉTANT CONNUS L'HYPOTÉNUSE D'UN TRIANGLE SPHÉRIQUE RECTANGLE, ET UN DES ANGLES OBLIQUES, TROUVER LA VALEUR DU CÔTÉ ADJACENT A CET ANGLE, EXPRIMÉE EN SÉRIE.

94. L'équation qui donne le côté de l'angle droit c en fonction de l'hypoténuse a et de l'angle compris B est, d'après l'art. **56**,

$$\tang c = \tang a \cos B;$$

on a donc

$$\tang a - \tang c = \tang a (1 - \cos B),$$
$$\tang a + \tang c = \tang a (1 + \cos B);$$

or, si l'on divise les deux équations l'une par l'autre, il viendra

$$\frac{\tang a - \tang c}{\tang a + \tang c} = \frac{1 - \cos B}{1 + \cos B},$$

ou

$$\frac{\sin (a - c)}{\sin (a + c)} = \tang^2 \tfrac{1}{2} B;$$

et si l'on change les sinus en exponentielles imaginaires, on aura

$$\frac{e^{(a-c)\sqrt{-1}} - e^{-(a-c)\sqrt{-1}}}{e^{(a+c)\sqrt{-1}} - e^{-(a+c)\sqrt{-1}}} = \tang^2 \tfrac{1}{2} B;$$

Multipliant et divisant par $e^{(a-c)\sqrt{-1}}$, on trouve

$$\frac{e^{2(a-c)\sqrt{-1}} - 1}{e^{2a\sqrt{-1}} - e^{-2c\sqrt{-1}}} = \tang^2 \tfrac{1}{2} B,$$

d'où

$$e^{2(a-c)\sqrt{-1}} = 1 + \tang^2 \tfrac{1}{2} B . e^{2a\sqrt{-1}} - \tang^2 \tfrac{1}{2} B . e^{-2c\sqrt{-1}}.$$

Mais

$$-\tang^2 \tfrac{1}{2} B . e^{-2c\sqrt{-1}} = -\tang^2 \tfrac{1}{2} B . \frac{e^{2(a-c)\sqrt{-1}}}{e^{2a\sqrt{-1}}};$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, on tire enfin

$$e^{2(a-c)\sqrt{-1}} = \frac{1 + \tang^2 \frac{1}{2} B . e^{2a\sqrt{-1}}}{1 + \tang^2 \frac{1}{2} B . e^{-2a\sqrt{-1}}}.$$

Maintenant si, comme dans l'article précédent, on prend de part et d'autre les logarithmes népériens, et que l'on développe en vertu de la formule $\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2} - \ldots$, il viendra

$$\begin{aligned}2(a-c)\sqrt{-1} = {} & \tang^2 \tfrac{1}{2} B e^{2a\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2} \tang^4 \tfrac{1}{2} B e^{4a\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3} \tang^6 \tfrac{1}{2} B e^{6a\sqrt{-1}} - \ldots \\ & - \tang^2 \tfrac{1}{2} B e^{-2a\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2} \tang^4 \tfrac{1}{2} B e^{-4a\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{3} \tang^6 \tfrac{1}{2} B e^{-6a\sqrt{-1}} + \ldots,\end{aligned}$$

et enfin

$$a - c = \tang^2 \tfrac{1}{2} B \sin 2a - \tfrac{1}{2} \tang^4 \tfrac{1}{2} B \sin 4a + \tfrac{1}{3} \tang^6 \tfrac{1}{2} B \sin 6a - \ldots\ldots$$

Cette série, que Lagrange a publiée pour la première fois dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1776, se déduit aisément de celle de l'article précédent, comme on peut s'en assurer; elle n'est qu'un cas particulier d'une autre plus générale, que Legendre a donnée dans ses *Exercices de Calcul intégral*, lorsqu'il s'est proposé de développer en séries convergentes l'arc dont la tangente est donnée par une fonction rationnelle des sinus et cosinus d'un autre arc indéfini (*voyez* cinquième partie, page 238).

95. Soit généralement $\tang c = \theta \tang a$; on aura, d'après ce qui précède,

$$a - c = \frac{1-\theta}{1+\theta} \sin 2a - \tfrac{1}{2} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^2 \sin 4a + \ldots\ldots$$

Si l'on voulait avoir $a - c$ en fonction de c, on tirerait d'abord de

l'équation hypothétique, $\tang a = \frac{1}{\theta} \tang c$, ou, pour abréger, ... $\tang a = \theta' \tang c$; ainsi, en vertu de la série précédente, on aurait

$$c - a = \frac{1-\theta'}{1+\theta'} \sin 2c - \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-\theta'}{1+\theta'}\right)^2 \sin 4c + \tfrac{1}{3}\left(\frac{1-\theta'}{1+\theta'}\right)^3 \sin 6c,$$

ou

$$c - a = \frac{\theta-1}{\theta+1} \sin 2c - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\theta-1}{\theta+1}\right)^2 \sin 4c + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\theta-1}{\theta+1}\right)^3 \sin 6c;$$

ou bien, en changeant les signes,

$$a - c = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right) \sin 2c + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^2 \sin 4c + \tfrac{1}{3}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^3 \sin 6c.$$

Ces séries ne peuvent être utiles dans la pratique, qu'autant qu'elles convergent rapidement, ce qui exige que $\frac{1-\theta}{1+\theta}$ soit une fraction plus petite que l'unité.

RÉSOLUTION D'UN TRIANGLE SPHÉRIQUE DONT DEUX CÔTÉS SONT PEU DIFFÉRENTS DU QUADRANT.

96. Soient a et b les deux côtés donnés, supposés très-peu différents du quart de la circonférence; on propose de trouver C en fonction des trois côtés a, b, c.

Par hypothèse,

$$a = 1^{\text{q}} - \alpha, \qquad b = 1^{\text{q}} - \beta;$$

et comme α et β sont très-petits, l'angle C a pour mesure un arc très-peu différent de c. Soit alors

$$C = c + x;$$

on aura

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \sin\tfrac{1}{2}(c+x) = \sin\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}c,$$

puisque x est fort petit; et par suite,

$$\sin^2\tfrac{1}{2}C = \sin^2\tfrac{1}{2}c + x\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c.$$

L'équation exacte

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{1}{2}(b+c-a) \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a \sin b},$$

obtenue dans l'art. 64, résout la question proposée; mais vu qu'il serait pénible d'avoir C avec une grande exactitude, il vaut mieux calculer le petit excès x de l'angle C sur c. Pour cet effet, l'on mettra dans l'équation précédente pour a, b et $\sin^2 \frac{1}{2} C$ leurs valeurs actuelles, et l'on aura

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} c + x \sin \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} c \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha-\beta) - \cos^2 \frac{1}{2} c \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \alpha \cos \beta}:$$

puis prenant la valeur de $x \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c$, il viendra

$$x \sin \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} c = \frac{[\cos^2 \frac{1}{2}(\alpha-\beta) - \cos \alpha \cos \beta] \sin^2 \frac{1}{2} c - \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \cos^2 \frac{1}{2} c}{\cos \alpha \cos \beta};$$

mais

$$\cos \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2} \cos(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2} \cos(\alpha-\beta) = \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

puisqu'en général $\cos p = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} p = 2\cos^2 \frac{1}{2} p - 1$;

donc

$$x = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \tang \frac{1}{2} c - \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \cot \frac{1}{2} c}{\cos \alpha \cos \beta}. \qquad (1)$$

Telle est la formule à laquelle Delambre est parvenu par une voie différente: en prenant les petits arcs pour les sinus, elle rentre dans celle que Legendre a donnée; c'est-à-dire que l'on a, d'après cette hypothèse,

$$x = \tfrac{1}{4}(\alpha+\beta)^2 \tang \tfrac{1}{2} c - \tfrac{1}{4}(\alpha-\beta)^2 \cot \tfrac{1}{2} c. \qquad (2)$$

2[e] *Solution*. On parvient plus simplement à cette formule ainsi qu'il suit. D'abord, à cause de

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

on a

$$\cos C = \frac{\cos c - \sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta} = \frac{\cos c - \alpha\beta}{1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)}$$
$$= \cos c - \alpha\beta + \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\cos c = \cos c - x \sin c,$$

en ne conservant que les quantités du second ordre ; et de là

$$x = \frac{\alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\cos c}{\sin c}.$$

D'ailleurs, à cause de

$$\cos c = \cos^2 \tfrac{1}{2}c - \sin^2 \tfrac{1}{2}c,$$

et de

$$\alpha\beta = \alpha\beta\,(\sin^2 \tfrac{1}{2}c + \cos^2 \tfrac{1}{2}c),$$

on a, comme ci-dessus,

$$x = \frac{(\alpha+\beta)^2 \sin^2 \frac{1}{2}c - (\alpha-\beta)^2 \cos^2 \frac{1}{2}c}{4 \sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}c}$$
$$= \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \cot \tfrac{1}{2}c.$$

Dans la pratique, les quantités $\alpha+\beta$ et $\alpha-\beta$ sont données en minutes ou secondes, tandis qu'elles doivent être considérées dans cette formule comme des arcs comparés au rayon pris pour unité : mais si l'on y met $\frac{\alpha+\beta}{R}$ et $\frac{\alpha-\beta}{R}$ à la place de $\alpha+\beta$ et de $\alpha-\beta$, la correction x fera elle-même partie de ce rayon, et en la multipliant ensuite par R'' elle sera exprimée en secondes ; on aura donc en général, mais d'une manière un peu moins exacte,

$$x = \tfrac{1}{4}\frac{(\alpha+\beta)^2}{R''} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{4}\frac{(\alpha-\beta)^2}{R''} \cot \tfrac{1}{2}c. \qquad (2')$$

Il est évident que l'on obtiendra de même x en secondes, en multipliant par R'', ou par $\frac{1}{\sin 1''}$, le second membre de la formule (1).

Si l'on veut maintenant c en fonction de C, on remarquera que puisque ces deux quantités diffèrent très-peu l'une de l'autre, on peut écrire C au lieu de c dans la valeur précédente de x, ce qui

revient à négliger les quantités du troisième ordre; ainsi, d'une part, on a

$$c = C - x,$$

et de l'autre, si l'on fait $-x = y$, la correction cherchée sera

$$y = -\tfrac{1}{4}(\alpha + \beta)^2 \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}C}{R''} + \tfrac{1}{4}(\alpha - \beta)^2 \frac{\cot\frac{1}{2}C}{R''}. \qquad (3)$$

On verra par la suite que la formule (2') sert pour réduire un angle à l'horizon, et que la formule (3) est employée pour réduire un angle horizontal au plan des cordes de deux arcs terrestres.

RÉSOLUTION D'UN TRIANGLE SPHÉRIQUE DONT UN CÔTÉ EST TRÈS-PETIT A L'ÉGARD DES DEUX AUTRES.

97. Le calcul des latitudes, longitudes et azimuts des points fondamentaux d'une carte, dérive, ainsi qu'on le verra par la suite, de la résolution complète d'un triangle sphérique dont un côté est fort petit par rapport aux deux autres. Occupons-nous donc de cette question.

1re *Solution.* Dénotons, comme à l'ordinaire, par A, B, C les angles, et par a, b, c les côtés d'un triangle sphérique quelconque; et cherchons les parties inconnues de ce triangle, dans lequel les deux côtés b, c et l'angle compris A sont supposés donnés.

Cherchons d'abord les angles B, C, et supposons $c < b$; on aura, par les formules de Néper (art. **64**),

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(B + C) = \cot\tfrac{1}{2}A \frac{\cos\left(\frac{b-c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b+c}{2}\right)},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(B - C) = \cot\tfrac{1}{2}A \frac{\sin\left(\frac{b-c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b+c}{2}\right)}.$$

Renversant ces valeurs, et développant, il viendra

$$\operatorname{tang}\left[100^g - \left(\frac{B+C}{2}\right)\right] = \frac{1 - \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c}{\cot\frac{1}{2}b}}{1 + \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c}{\cot\frac{1}{2}b}} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A,$$

$$\operatorname{tang}\left[100^g - \left(\frac{B-C}{2}\right)\right] = \frac{1 + \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}}{1 - \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A.$$

Ces deux équations étant de la forme de celle de l'art. 95, on aura, en réduisant en séries par la méthode de cet article,

$$100^g - \left(\frac{B+C}{2}\right) = \tfrac{1}{2}A - \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c}{\cot\frac{1}{2}b}\sin A + \tfrac{1}{2}\frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}c}{\cot^2\frac{1}{2}b}\sin 2A - \tfrac{1}{3}\frac{\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}c}{\cot^3\frac{1}{2}b}\sin 3A + \ldots,$$

$$100^g - \left(\frac{B-C}{2}\right) = \tfrac{1}{2}A + \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}\sin A + \tfrac{1}{2}\frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}c}{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}b}\sin 2A + \tfrac{1}{3}\frac{\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}c}{\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}b}\sin 3A + \ldots,$$

d'où l'on tire, par addition et soustraction,

$$\begin{aligned}200^g - B = A &- [\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b - \cot\tfrac{1}{2}b]\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\sin A \\ &+ \tfrac{1}{2}[\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}b + \cot^2\tfrac{1}{2}b]\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}c\sin 2A \\ &- \tfrac{1}{3}[\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}b - \cot^3\tfrac{1}{2}b]\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}c\sin 3A + \ldots\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}C = [\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b + \cot\tfrac{1}{2}b]\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\sin A &- \tfrac{1}{2}[\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}b - \cot^2\tfrac{1}{2}b]\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}c\sin 2A \\ &+ \tfrac{1}{3}[\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}b + \cot^3\tfrac{1}{2}b]\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}c\sin 3A - \ldots\end{aligned}$$

Ces deux séries régulières, dont la loi est évidente, sont dues à Lagrange: elles convergent d'autant plus rapidement, que c est plus petit par rapport aux deux autres côtés.

98. Il reste, pour compléter la solution du problème dont il s'agit, à trouver le côté a en fonction des mêmes données b, c, A. Or, de l'é-

quation

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

on déduit aisément celles-ci :

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}a = \sin^2 \tfrac{1}{2}b \cos^2 \tfrac{1}{2}c + \cos^2 \tfrac{1}{2}b \sin^2 \tfrac{1}{2}c - 2\sin \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c \cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c \cos A,$$
$$\cos^2 \tfrac{1}{2}a = \cos^2 \tfrac{1}{2}b \cos^2 \tfrac{1}{2}c + \sin^2 \tfrac{1}{2}b \sin^2 \tfrac{1}{2}c + 2\cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c \sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c \cos A;$$

d'où l'on voit que $\sin \frac{1}{2} a$ peut être considéré comme le troisième côté d'un triangle rectiligne dont on connaît les deux côtés $\sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c$, $\cos \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c$, et l'angle A compris. Appliquant donc la méthode de l'art. **93**, on a, en logarithmes vulgaires,

$$\log \sin \tfrac{1}{2}a = \log(\sin \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c) - \mu \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} c}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} b} \cos A - \mu \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} c}{2\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b} \cos 2A - \ldots,$$

et

$$\log \cos \tfrac{1}{2}a = \log(\cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c) + \mu \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} c}{\cot \frac{1}{2} b} \cos A - \mu \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} c}{2\cot^2 \frac{1}{2} b} \cos 2A + \ldots,$$

μ étant le module 0,4342945 ; par conséquent en soustrayant, l'on a, en logarithmes népériens,

$$\begin{aligned}\log.\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a = \log.\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b & - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c [\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b + \cot \tfrac{1}{2} b] \cos A \\ & + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} c [\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} b - \cot^2 \tfrac{1}{2} b] \cos 2A \\ & - \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} c [\operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} b + \cot^3 \tfrac{1}{2} b] \cos 3A + \ldots\end{aligned}$$

Cette série et les précédentes n'étant pas sous une forme qui permette d'évaluer facilement les quantités qu'elles représentent, lorsqu'un des côtés connus est très-petit par rapport à l'autre, il est nécessaire d'en obtenir d'autres qui soient développées suivant les puissances ascendantes de ce côté; et c'est à quoi l'on parvient par la voie élémentaire suivante.

99. 2[e] *Solution.* Dans le triangle sphérique A, B, C on a

$$(1) \qquad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$(2) \qquad \operatorname{tang} B = \frac{\sin A}{\cot b \sin c - \cos c \cos A},$$

$$(3) \qquad \operatorname{tang} C = \frac{\sin A}{\cot c \sin b - \cos b \cos A}.$$

Ordonnons d'abord le second membre de l'équation (1) par rapport aux puissances ascendantes de l'arc c; en y mettant au lieu de $\sin c$ et $\cos c$ leurs valeurs en séries (art. 91); on aura, en s'arrêtant aux termes en c^3,

$$\cos a = \cos b\left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + \sin b\left(c - \frac{c^3}{2.3}\right)\cos A$$
$$= \cos b + c \sin b \cos A - \tfrac{1}{2}c^2 \cos b - \tfrac{1}{6}c^3 \sin b \cos A,$$

ce qui fait voir que

$$(4) \qquad a = b + cP + c^2 Q + c^3 R + \ldots\ldots,$$

P, Q, R,... étant des coefficients indéterminés. Prenant donc le cosinus de chaque membre de cette série hypothétique, il viendra

$$\cos a = \cos b - cP \sin b \begin{array}{l} - c^2 \\ - \frac{1}{2}c^2 \end{array}\left|\begin{array}{l} Q \sin b - c^3 \\ P^2 \cos b - c^3 \end{array}\right|\begin{array}{l} \left(R - \frac{P^3}{6}\right)\sin b \\ PQ \cos b; \end{array}$$

et comparant terme à terme cette valeur de $\cos a$ avec la précédente, on trouvera, après quelques réductions faciles,

$$P = -\cos A,$$
$$Q = +\tfrac{1}{2}\cot b \sin^2 A,$$
$$R = +\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3} + \cot^2 b\right)\cos A \sin^2 A;$$

ainsi en portant ces valeurs dans la série (4), on obtiendra celle-ci :

$$(I). \quad a = b - c\cos A + \tfrac{1}{2}c^2 \cot b \sin^2 A + \tfrac{1}{2}c^3 \cos A \sin^2 A\left(\tfrac{1}{3} + \cot^2 b\right)\ldots$$

Le moyen de déterminer maintenant l'angle B est de faire

$$\operatorname{tang}(200^{\circ} - A - B) = \operatorname{tang}\left(\overline{100 - A} + \overline{100 - B}\right) = \operatorname{tang} x,$$

car $200^{\circ} - A - B$ étant un très-petit angle, on pourra le développer en série suivant les puissances de sa tangente. En effet,

$$\operatorname{tang} x = \frac{\cot A \operatorname{tang} B + 1}{\operatorname{tang} B - \cot A};$$

et si pour tang B on met sa valeur (2), on aura

$$\tang x = \frac{\sin A \cos A\,(1-\cos c)+\cot b \sin c \sin A}{1-\cos^2 A\,(1-\cos c)-\cot b \sin c \cos A}.$$

$$= \frac{\frac{1}{2}c^2 \sin A \cos A + \left(c-\frac{c^3}{6}\right)\sin A \cot b}{1-\frac{c^2}{2}\cos^2 A - \left(c-\frac{c^3}{6}\right)\cos A \cot b}.$$

Réduisant le second membre en série par la formule du binome, on obtiendra, après les réductions,

$$\begin{aligned}\tang x = c \sin A \cot b &+ c^2 \sin A \cos A\,(\tfrac{1}{2}+\cot^2 b)\\ &+ c^3 \sin A \cos^2 A \cot b\,(1+\cot^2 b)\\ &- \frac{c^3}{6}\sin A \cot b.\end{aligned}$$

Mais en général

$$x = \tang x - \tfrac{1}{3}\tang^3 x + \ldots\ldots;$$

ainsi substituant ici pour tang x sa valeur précédente, et faisant attention que $\sin^3 A = \sin A\,(1-\cos^2 A)$, l'on aura la série

$$\begin{aligned}\text{(II).}\quad 200^g - B = A + c \sin A \cot b &+ \tfrac{1}{2}c^2 \sin A \cos A\,(1+2\cot^2 b)\\ &+ \tfrac{1}{3}c^3 \sin A \cos^2 A \cot b\,(3+4\cot^2 b)\\ &- \tfrac{1}{6}c^3 \sin A \cot b\,(1+2\cot^2 b)\ldots\end{aligned}$$

Il reste à obtenir l'angle C. Or, l'équation (3) devient, en y mettant pour tang c sa valeur en série,

$$\tang C = \frac{\sin A \tang c}{\sin b - \cos A \cos b \tang c} = \frac{\sin A\left(c+\frac{c^3}{3}\right)}{\sin b\left[1-\cos A \cot b\left(c+\frac{c^3}{3}\right)\right]},$$

puis développant également en série, il viendra

$$\tang C = c\frac{\sin A}{\sin b} + c^2\frac{\sin A \cos A \cot b}{\sin b} + \frac{c^3}{3}\frac{\sin A}{\sin b} + c^3\frac{\sin A \cos^2 A \cot^2 b}{\sin b};$$

et parce que

$$C = \tang C - \tfrac{1}{3}\tang^3 C + \ldots\ldots,$$

on aura

$$C = c\frac{\sin A}{\sin b} + c^2 \frac{\sin A \cos A \cot b}{\sin b}$$
$$+ c^3 \left[\frac{1}{3}\frac{\sin A}{\sin b} + \frac{\sin A \cos^2 A \cot^2 b}{\sin b} - \frac{1}{3}\frac{\sin^3 A}{\sin^3 b}\right];$$

mais

$$\sin^3 A = \sin A(1 - \cos^2 A), \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sin^3 b} = \frac{1 + \cot^2 b}{\sin b};$$

substituant ces valeurs dans celle de C précédente, on trouvera enfin la série

$$\text{(III).}\quad C = \frac{c}{\sin b}\sin A + \frac{c^2}{\sin b}\sin A \cos A \cot b$$
$$+ \frac{1}{3}\frac{c^3}{\sin b}\sin A \cos^2 A(1 + 4\cot^2 b) - \frac{1}{3}\frac{c^3}{\sin b}\sin A \cot^2 b \ldots$$

Nous aurons par la suite occasion de faire usage de ces séries, que nous déduirons plus simplement encore du théorème de Taylor.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES DONT LES CÔTÉS SONT TRÈS-PETITS PAR RAPPORT AU RAYON DE LA SPHÈRE.

100. La résolution des triangles sphériques très-peu courbes, se ramène immédiatement à celle des triangles rectilignes, au moyen d'un théorème très-remarquable dû à Legendre, et qui est de la plus grande utilité dans les opérations géodésiques. En voici l'énoncé et la démonstration.

Le triangle sphérique très-peu courbe, dont les angles sont A, B, C, *et les côtés opposés* a, b, c, *répond toujours à un triangle rectiligne qui a les côtés de même longueur, et dont les angles sont* $A - \frac{1}{3}\varepsilon$, $B - \frac{1}{3}\varepsilon$, $C - \frac{1}{3}\varepsilon$, ε *étant l'excès de la somme des angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits.*

Puisque a, b, c sont les côtés d'un triangle sphérique construit sur une sphère dont nous désignerons le rayon par r; un triangle semblable, tracé sur la sphère dont le rayon $= 1$, aura pour côtés $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$; et par

l'art. 64,

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}.$$

Mais, pour abréger, nous représenterons respectivement $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ par α, β, γ, et nous aurons

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

r étant fort grand par rapport aux côtés a, b, c, il s'ensuit, sans erreur sensible, que

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4}, \qquad \sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{2.3};$$

il en sera de même des valeurs de $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et $\sin\gamma$.

De là l'équation précédente deviendra

$$\cos A = \frac{\frac{1}{2}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)+\frac{1}{24}(\alpha^4-\beta^4-\gamma^4)-\frac{1}{4}\beta^2\gamma^2}{\beta\gamma\left(1-\frac{1}{6}\beta^2-\frac{1}{6}\gamma^2\right)}.$$

Transportant au numérateur le facteur $(1-\frac{1}{6}\beta^2-\frac{1}{6}\gamma^2)$ élevé à la puissance -1, développant jusqu'aux quantités du quatrième ordre inclusivement, et réduisant, on aura

$$\cos A = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} + \frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2}{24\beta\gamma};$$

remettant les valeurs de α, β, γ, le second membre sera toujours composé de la même combinaison de lettres, et pourra être représenté par

$$\cos A = \frac{M}{2bc} + \frac{N}{24bcr^2}. \qquad (1)$$

Soit maintenant A′ l'angle opposé au côté a, dans le triangle rectiligne dont les côtés seraient égaux en longueur aux arcs a, b, c; on aura

$$\cos A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{M}{2bc};$$

élevant les deux membres au carré, et mettant $1 - \sin^2 A'$ au lieu de $\cos^2 A'$, il viendra

$$-4b^2c^2 \sin^2 A' = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = N.$$

L'équation (1) sera donc ramenée à la forme

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6r^2} \sin^2 A'.$$

Soit $A = A' + x$; on aura, en rejetant la seconde puissance de x,

$$\cos A = \cos A' - x \sin A';$$

d'où l'on tire, après la substitution de la valeur de $\cos A$,

$$x = \frac{bc}{6r^2} \sin A'.$$

Nous voyons par là que x est du second ordre par rapport à $\frac{b}{r}$ et $\frac{c}{r}$; ainsi ce résultat est exact, aux quantités près du quatrième ordre. Donc, à cause de $A = A' + x$,

$$A = A' + \frac{bc}{6r^2} \sin A';$$

mais $\frac{1}{2} bc \sin A'$ est visiblement l'aire du triangle rectiligne dont a, b, c sont les côtés, laquelle ne diffère pas sensiblement de celle du triangle sphérique proposé; donc si l'une ou l'autre aire est appelée s, on aura

$$A' = A - \frac{s}{3r^2},$$

et semblablement,

$$B' = B - \frac{s}{3r^3}, \qquad C' = C - \frac{s}{3r^2};$$

d'où il résulte que

$$A' + B' + C' = 2^\circ = A + B + C - \frac{s}{r^2}.$$

On peut donc considérer $\frac{s}{r^2}$ comme étant l'excès de la somme des trois angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits, et l'on doit remarquer que dans tout ce calcul, les angles des deux triangles sont censés mesurés par des arcs de cercle dont le rayon est l'unité. Telle est la démonstration donnée par Lagrange, dans son excellent *Mémoire sur la Trigonométrie sphérique* (6e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*), et que Legendre a adoptée dans sa Trigonométrie. M. Gauss en a imaginé une autre fort élémentaire, que M. Liouville a publiée dans son *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (tome VI, cahier de Juillet 1841).

L'*excès sphérique* $\varepsilon = \frac{s}{r^2}$, qui est proportionnel à l'aire du triangle, peut toujours se calculer *à priori*, et cela en considérant le triangle sphérique proposé comme rectiligne. Si donc deux côtés b, c et l'angle compris A sont donnés, on aura l'aire $s = \frac{1}{2} bc \sin A$. Si au contraire on connaît un côté a et les deux angles adjacents B, C, on aura l'aire $s = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)}$, ainsi que nous l'avons démontré (art. **53**).

La remarque de l'art. **91** est encore applicable dans cette circonstance, où il s'agit d'avoir l'*excès sphérique* ε en secondes; ainsi,

$$\varepsilon = \frac{s}{r^2} R''.$$

La valeur de ε étant toujours d'un petit nombre de secondes, il s'ensuit que celle de l'aire du triangle n'a pas besoin d'être déterminée avec une grande précision. Mais veut-on savoir ce qu'on néglige en calculant s par le procédé qu'on vient d'indiquer? on n'aura qu'à développer en série l'expression

$$\tang \tfrac{1}{2} s = \frac{\tang \frac{1}{2} a \tang \frac{1}{2} b \sin C}{1 + \tang \frac{1}{2} a \tang \frac{1}{2} b \cos C},$$

démontrée à l'art. **89**, et l'on trouvera, par la méthode de l'art. **95**,

$$\tfrac{1}{2} s = \tang \tfrac{1}{2} a \tang \tfrac{1}{2} b \sin C - \tfrac{1}{2} \tang^2 \tfrac{1}{2} a \tang^2 \tfrac{1}{2} b \sin 2C + \tfrac{1}{3} \tang^3 \tfrac{1}{2} a \tang^3 \tfrac{1}{2} b \sin 3C - \text{etc.};$$

d'où l'on voit qu'en ne prenant que le premier terme de la série, on néglige des quantités du quatrième ordre et des ordres supérieurs, qui sont tout-à-fait insensibles dans la pratique de la Géodésie ; on a donc

$$\tfrac{1}{2}\, s = \text{tang}\, \tfrac{1}{2}\, a \;\text{tang}\, \tfrac{1}{2} b \sin \text{C},$$

et enfin

$$s = \tfrac{1}{2}\, ab \sin \text{C},$$

en substituant en outre aux tangentes des petits arcs leurs valeurs en séries, et ne conservant que le terme du second ordre, qui est le plus considérable. Il résulte de là que l'aire d'un triangle sphérique peu courbe, peut s'évaluer comme celle d'un triangle rectiligne.

CHAPITRE IV.

MÉTHODES PARTICULIÈRES ET GÉNÉRALES D'INTERPOLATION DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

101. Les logarithmes des lignes trigonométriques ainsi que ceux des nombres, qui sont insérés dans les Tables, correspondent à des quantités entre lesquelles on est, à chaque instant, obligé d'interpoler d'autres logarithmes; mais cette interpolation, effectuée par la voie ordinaire des parties proportionnelles, serait souvent très-peu exacte, même en faisant usage de grandes Tables à dix décimales, telles que celles de Vlacq, et si les arcs donnés étaient très-petits. Quoique dans la pratique de la Géodésie l'on ait peu à craindre l'influence des erreurs de ce genre, cependant il convient de donner une idée des moyens par lesquels on peut en préserver les résultats que l'on cherche, lorsqu'on désire obtenir la plus grande exactitude possible. Ces moyens, dont il s'agira ici, sont ceux que Legendre a expliqués dans la *Connaissance des Tems* pour 1810.

Soit x un très-petit arc, exprimé en parties du rayon $= 1$, et supposons qu'on veuille les logarithmes de son sinus, de son cosinus et de sa tangente; on commencera par mettre les trois premières formules de l'art. **91** sous cette forme

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \ldots\right),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots,$$

$$\text{tang}\, x = x\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{2x^4}{15} + \ldots\right);$$

ensuite on prendra les logarithmes des deux membres de chacune des deux premières, et l'on aura, après les réductions,

$$\log . \sin x = \log x - \frac{\mu x^2}{6} - \frac{\mu x^4}{180} - \frac{\mu x^6}{2835} - \text{etc.},$$

$$\log . \cos x = \quad - \frac{\mu x^2}{2} - \frac{\mu x^4}{12} - \frac{\mu x^6}{45} - \text{etc.}..$$

Faisant la même opération sur la troisième formule, ou, ce qui est plus simple, soustrayant log cos x de log sin x, il vient

$$\log \text{tang} x = \log x + \frac{\mu x^2}{3} + \frac{7\mu x^4}{90} + \frac{62\mu x^6}{2835} + \text{etc.},$$

séries dans lesquelles le module $\mu = 0{,}43429\,4481903252\ldots$ a pour logarithme vulgaire

$$\log \mu = 9{,}63778\ 43113\ 00537.$$

On abrégera beaucoup les calculs en évaluant chaque terme séparément à l'aide des logarithmes; mais il faut faire attention de réduire x en parties du rayon, si cet arc est donné en degrés, ou en minutes, ou en secondes, afin de le ramener à l'hypothèse de la formule; c'est-à-dire qu'il faut le diviser par R°, ou R′, ou R″. Comme l'opération est beaucoup plus commode et plus prompte par les logarithmes, on fera, dans ce cas, usage des valeurs suivantes:

$$\log R^\circ = 1{,}75812\ 26324\ 09172,$$
$$\log R' = 3{,}53627\ 38827\ 92816,$$
$$\log R'' = 5{,}31442\ 51331\ 76459.$$

Les séries ci-dessus sont tellement convergentes, que si l'on se borne à dix décimales, et que x soit plus petit que 6°7′, on pourra s'arrêter aux termes en x^6.

Des formules connues

$$x = \sin x \left(1 + \tfrac{1}{2}.\frac{\sin^2 x}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{\sin^4 x}{5} + \text{etc.}\right),$$

$$x = \text{tang} x \left(1 - \tfrac{1}{3}\text{tang}^2 x + \tfrac{1}{5}\text{tang}^4 x - \text{etc.}\right),$$

on déduit par le même procédé,

$$\log x = \log \sin\, x + \frac{\mu}{6}\, \sin^2 x + \frac{11\mu}{180}\, \sin^4 x + \text{etc.},$$

$$\log x = \log \operatorname{tang} x - \frac{\mu}{3} \operatorname{tang}^2 x + \frac{13\mu}{90} \operatorname{tang}^4 x - \text{etc.};$$

ce qui donne le moyen de trouver l'arc dont le logarithme sinus ou le logarithme tangente est donné.

Legendre substitue aux formules précédentes d'autres formules plus avantageuses, lorsque l'arc passe une certaine limite. On arrive à celles-ci en développant en série l'expression générale $\log \sin (a + x.)$ Or si, pour abréger, l'on fait $\log \sin a = z$, le théorème de Taylor donnera

$$\log \sin (a + x) = z + \frac{dz}{da}\, x + \frac{d^2z}{da^2}\,\frac{x^2}{2} + \frac{d^3z}{da^3}\,\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.};$$

mais les coefficients différentiels devant se rapporter aux logarithmes vulgaires ou de Briggs, on a

$$\frac{dz}{da} = \mu \cot a, \qquad \frac{d^2z}{da^2} = -\frac{\mu}{\sin^2 a}, \qquad \frac{d^3z}{da^3} = \frac{2\mu \cos a}{\sin^3 a}, \text{ etc.};$$

partant,

$$\log \sin (a + x) = \log \sin a + \mu x \cot a \left(1 - \frac{x}{\sin 2a} + \frac{x^2}{3\sin^2 a}\right) - \text{etc.}$$

Il sera tout aussi facile de trouver que

$$\log \cos (a + x) = \log\, \cos a - \mu x \operatorname{tang} a \left(1 + \frac{x}{\sin 2a} + \frac{x^2}{3\cos^2 a}\right) - \text{etc.},$$

$$\log \operatorname{tang}(a + x) = \log \operatorname{tang} a + \frac{2\mu x}{\sin 2a}\,(1 - x\cot 2a + \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{4}{3}x^2\cot^2 2a) + \text{etc.}$$

On emploiera ces formules quand les logarithmes du sinus, du cosinus et de la tangente tomberont dans les tables entre deux arcs consécutifs a, $a + h$.

102. Proposons-nous maintenant de déduire x de l'équation

$$\log \operatorname{tang}(a+x) - \log \operatorname{tang} a = r = 2\mu p. \qquad (1)$$

On regardera x comme une fonction de p; et puisque ces deux quantités deviennent nulles en même temps, on aura, en recourant au théorème de Maclaurin,

$$x = \left(\frac{dx}{dp}\right)p + \left(\frac{d^2x}{dp^2}\right)\frac{p^2}{2} + \left(\frac{d^3x}{dp^3}\right)\frac{p^3}{2.3} + \text{etc.},$$

série dans laquelle les coefficients différentiels doivent correspondre à $x=0$. Mais en général, par les différenciations successives, l'équation (1) donne

$$\frac{dx}{dp} = \sin(2a+2x),$$
$$\frac{d^2x}{dp^2} = 2\cos(2a+2x).\frac{dx}{dp} = \sin(4a+4x),$$
$$\frac{d^3x}{dp^3} = 4\cos(4a+4x).\frac{dx}{dp} = 4\sin(2a+2x)\cos(4a+4x), \text{ etc.};$$

par conséquent, en faisant $x = 0$ dans ces coefficients, il vient définitivement

$$x = p\sin 2a + \frac{p^2}{2}\sin 4a + \frac{2p^3}{3}\sin 2a\cos 4a + \text{etc.} \qquad (2)$$

Si l'on avait à résoudre l'équation

$$\log\sin(a+x) - \log\sin a = r, \qquad (3)$$

on ferait $r = \mu p \cot a$, et en passant aux différentielles successives, on aurait

$$\frac{dx}{dp} = \operatorname{tang}(a+x)\cot a,$$
$$\frac{d^2x}{dp^2} = \frac{dx}{dp}\cdot\frac{\cot a}{\cos^2(a+x)},$$
$$\frac{d^3x}{dp^3} = \frac{d^2p}{dp^2}\cdot\frac{\cot a}{\cos^2(a+x)} + \frac{2\cot a\sin(a+x)}{\cos^3(a+x)};$$

mais comme il faut ensuite faire $x = 0$, dans ces coefficients différentiels, on a plus simplement

$$\left(\frac{dx}{dp}\right) = 1, \quad \left(\frac{d^2x}{dp^2}\right) = \frac{2}{\sin 2a}, \quad \left(\frac{d^3x}{dp^3}\right) = \frac{2.2}{\sin^2 .2a} + \frac{4.2\sin^2 a}{\sin^2 2a};$$

de là

$$x = p\left[1 + \frac{p}{\sin 2a} + \frac{2p^2}{3\sin^2 2a}(1 + 2\sin^2 a)\right], \qquad (4)$$

en se bornant aux termes en p^3.

103. Les deux questions que l'on vient de traiter sont relatives aux tables trigonométriques. Il en existe d'analogues pour les tables des nombres; les voici :

Soit $\log A'$ un logarithme donné, dont il faut trouver le nombre A correspondant, au moyen de grandes tables de logarithmes. On choisira, parmi les logarithmes de ces tables, celui dont les quatre ou cinq chiffres décimaux soient communs avec log A, et l'on aura

$$\log A = \log a + r.$$

Passant de là aux nombres, il viendra

$$A = ae^{kr},$$

e désignant le nombre dont le logarithme hyperbolique ou népérien $= 1$, et k étant le module qui sert pour passer des logarithmes ordinaires aux logarithmes hyperboliques, c'est-à-dire que.......... $k = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0,43429} = 2,30258..$; ainsi,

$$A - a = a(e^{kr} - 1) = ae^{\frac{1}{2}kr}(e^{\frac{1}{2}kr} - e^{-\frac{1}{2}kr});$$

mais en général

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{etc.},$$

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{1.2} - \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2.3.4} - \text{etc.};$$

conséquemment,

$$A - a = akr.e^{\frac{1}{2}kr}\left(1 + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{k^2r^2}{4} + \frac{1}{120}\cdot\frac{k^4r^4}{16} + \text{etc.}\right);$$

enfin, prenant le logarithme vulgaire de chaque membre, on a

$$\log(A - a) = \log(akr) + \tfrac{1}{2}r + \tfrac{1}{24}kr^2 - \tfrac{1}{2880}k^3r^4 + \text{etc.} \quad (5)$$

S'il s'agissait de la formule

$$\log A = \log a - r,$$

on aurait cette série,

$$\log(a - A) = \log(akr) - \tfrac{1}{2}r + \tfrac{1}{24}kr^2 - \tfrac{1}{2880}k^3r^4 + \text{etc.} \quad (6)$$

La convergence de ces deux séries permet le plus souvent de s'arrêter aux termes en r.

104. On résout analytiquement le problème inverse avec la plus grande facilité. En effet, soit A un nombre donné, dont on demande le logarithme exact jusqu'à la quatorzième décimale : on choisira, dans les grandes tables, un nombre a qui ait les cinq premières figures communes avec A, et l'on fera

$$A - a = r,$$

après quoi l'on aura

$$\log A = \log a + \mu\left(\frac{r}{a} - \frac{r^2}{2a^2} + \frac{r^3}{3a^3} - \text{etc.}\right). \quad (7)$$

On suppose, dans cette circonstance, que l'on n'a à sa disposition que la table ordinaire des logarithmes à vingt décimales, pour tous les nombres depuis 1 jusqu'à 1161 ou 1200; alors, pour trouver le nombre a, on cherchera dans la Table des diviseurs les plus simples des nombres, par Burckhardt, un nombre très-peu différent de celui qu'expriment les quatre ou cinq premières figures de A, et dont les facteurs soient plus petits que 1161, afin que leurs logarithmes puissent se trouver dans la table avec toute l'exactitude désirable.

105. Un autre problème non moins important à résoudre est celui-ci : Étant donnés séparément $\log B$ et $\log C$, trouver le logarithme de $B + C$ ou celui de $B - C$, c'est-à-dire réduire deux termes à un seul.

Supposons $C < B$; on fera $\frac{C}{B} = A$, et l'on aura

$$\log A = \log C - \log B, \qquad \log(B + C) = \log B + \log(1 + A).$$

Maintenant soit a un nombre fort approché de A, et dont le logarithme se trouve dans les tables, ainsi que $\log(1 + a)$ ou $\log(1 - a)$; on aura

$$\log A = \log a \pm r,$$

r étant un très-petite quantité qu'il faut déterminer avec beaucoup de précision. Si l'on passe de là aux nombres, on aura, comme ci-dessus,

$$A = ae^{kr},$$

ou bien

$$1 + A = 1 + ae^{kr} + a - a;$$

par suite,

$$1 + A = (1 + a)\left[1 - \left(\frac{a}{1 + a}\right)(1 - e^{kr})\right].$$

Soit $b = \frac{a}{a + 1}$; on pourra écrire

$$1 + A = (1 + a)[1 - b(1 - e^{kr})];$$

et prenant les logarithmes vulgaires de chaque membre, il viendra

$$\log(1 + A) = \log(1 + a) - \mu b(1 - e^{kr}) - \mu\frac{b^2}{2}(1 - e^{kr})^2 - \text{etc.},$$

μ étant toujours le module 0,43429448. Mais

$$e^{kr} = 1 + kr + \text{etc.};$$

on a donc, à cause de $\mu k = 1$,

$$\log(1 + A) = \log(1 + a) \pm br + \frac{b(1 - b)}{2}kr^2 \pm \text{etc.}; \qquad (8)$$

et si l'on fait $b = \frac{a}{1-a}$, on aura de même

$$\log(1 - A) = \log(1 - a) \mp br - \frac{b(1+b)}{2}kr^2 \mp \text{etc.} \qquad (9)$$

Pour des tables ordinaires à 7 décimales, il suffit de tenir compte du terme en r. Legendre pense qu'à l'aide de ces dernières on peut calculer aisément toutes les formules trigonométriques à deux termes, parce que l'on évite l'emploi des angles auxiliaires, qui allongent souvent les opérations numériques. C'est pour cette raison que nous sommes entrés dans quelques détails à ce sujet.

106. On peut substituer à ces formules particulières d'interpolation une formule générale qui dispense de connaître la loi d'après laquelle se forment les termes successifs des tables.

Soient A, A′, A″, A‴, etc., les termes consécutifs d'une série correspondants aux indices en progression arithmétique ou par *différences*, $a, a+h, a+2h, a+3h$, etc.; on aura un terme quelconque y ou $A_{(n)}$ correspondant à l'indice $a+nh$ par la formule suivante, démontrée à la page 591 du *Traité élémentaire de Calcul intégral*, par M. Lacroix (5e édition), savoir:

$$\left.\begin{aligned} A_{(n)} = A + n\delta A + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 A + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\delta^3 A \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}\delta^4 A + \text{etc.}, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

dans laquelle δA, $\delta^2 A$, $\delta^3 A$, etc., désignent les différences 1re, 2e, 3e, etc., de A, supposées continuellement décroissantes et positives. Lorsque les tables ne donnent que les différences premières, il faut, par des soustractions successives, former les différences ultérieures; après quoi l'on évalue les termes de la série précédente, en poussant l'approximation jusqu'au degré de précision que comportent les tables. Si, par exemple, on employait celles de Vlacq qui sont à 10 dé-

cimales, il suffirait de n'avoir égard qu'aux différences secondes; ainsi l'on aurait simplement

$$A_{(n)} = A + n\left(\delta A + \frac{n-1}{2}\delta^2 A\right), \qquad (11)$$

et de là, en faisant $A_{(n)} = y$, on tirerait

$$n = \frac{y - A}{\delta A + \frac{n-1}{2}\delta^2 A}; \qquad (12)$$

c'est-à-dire que pour trouver n par le moyen de y, on négligerait d'abord au dénominateur le terme du second ordre $\frac{n-1}{2}\delta^2 A$, pour avoir une première valeur approchée de n qui serait $n = \frac{y-A}{\delta A}$, et à l'aide de laquelle on évaluerait d'une manière suffisamment exacte le terme négligé. Ensuite on déterminerait une seconde valeur de n par la formule entière (12): elle représenterait alors le véritable indice cherché, et l'on n'aurait plus qu'à évaluer la variable $a + nh$ correspondante à la quantité y donnée. De cette manière on obtiendrait dix décimales pour les logarithmes et dix chiffres significatifs pour les nombres.

107. 1er *Exemple*. Supposons qu'on demande l'angle $A_{(n)}$ donné par la valeur $\log \sin A_{(n)} = 9{,}55797\,90661\,2900$, et qu'on ait à sa disposition les grandes tables de la *Trigonometria britannica* calculées pour des intervalles d'un centième de degré; on verra tout de suite que l'angle $A_{(n)}$ est compris entre $21^\circ{,}18$ et $21^\circ{,}19$.

Soit donc $a = 21^\circ{,}18$; on aura immédiatement, à cause de la relation (3),

$$\begin{aligned} \log \sin a &= 9{,}55786\,68865\,3682, \\ \text{mais } \log \sin A_{(n)} &= 9{,}55797\,90661\,2900; \\ \hline \text{ainsi, différence } r &= \qquad 11\,21795\,9218. \end{aligned}$$

Maintenant calculant seulement les deux premiers termes de la série (4),

on a, en les évaluant en degrés,

$$\log r = 6{,}04991\ 38568\ 33$$

$$\log\left(\frac{1}{\mu} = k\right) = 0{,}36221\ 56887\ 00$$

$$\log \operatorname{tang} a = 9{,}58824\ 13447\ 98 \qquad \log \sin 2a = 9{,}82852\ 24$$

$$\log p = 6{,}00037\ 08903\ 31 \qquad \ldots\ldots\ldots = 6{,}00037\ 09$$

$$\log R^0 = 1{,}75812\ 26324\ 09 \qquad \log p:\sin 2a = 6{,}17184\ 85$$

$$\log [1] = 7{,}75849\ 35227\ 40 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 7{,}75849\ 35$$

$$\log [2] = 3{,}93034\ 20\,;$$

mais à cause de $A_{(n)} = a + x$, et de $x = [1] + [2] + \text{etc.}$, on a

$$a + [1] = 21^\circ{,}18573\ 44731\ 384$$

$$[2] = 8518\ 085$$

$$\text{angle cherché } A_{(n)} = 21^\circ{,}18573\ 53249\ 469.$$

Les termes en p^3 que nous avons négligés n'augmenteraient que d'une unité la dixième décimale : leur valeur est 1.064.

Pour vérifier ce résultat par la formule générale d'interpolation, il faudra former le tableau suivant au moyen des différences premières δA prises dans la table.

a	$\log a$ ou A	δA	$\delta^2 A$	$\delta^3 A$	$\delta^4 A$
21°,18	9,55786 68865 3682	19 55725 3125	— 1012 5448	9111	— 12
		19 54712 7677	— 1011 6337	9099	
		19 53701 1340	— 1010 7238		
		19 52690 4102			

Or, on a $h = 0^\circ{,}01$ et

$$A_{(n)} = a + (0^\circ{,}01)\, n = y\,;$$

et puisque, d'après la formule générale d'interpolation rapportée ci-

dessus,

$$y - A = n\left[\delta A + \frac{n-1}{2}\left(\delta^2 A + \frac{n-2}{3}\delta^3 A\right)\right],$$

que d'ailleurs

$$y - A = \log.\sin A_{(n)} - \log a = 11\,21795\,9218,$$

on trouvera, par la méthode des approximations successives indiquée plus haut, que la valeur approchée de n, en négligeant d'abord les différences 3e et 4e, est $n = 0{,}57353\,26$, et qu'ensuite on a plus exactement $n = 0{,}57353\,25052\,70$; ainsi définitivement l'angle cherché ou

$$A_{(n)} = a + (0^\circ{,}01)\,n = 21^\circ{,}18573\,53250\,527,$$

à très-peu près comme ci-dessus.

2e *Exemple.* On propose de trouver le nombre A, sachant que

$$\log A = 9{,}63778\,43113\,00537.$$

Les Tables de Callet, qui sont à sept décimales, font d'abord connaître que A = 0,4342945. Prenant pour les cinq premiers chiffres décimaux 43430, ce nombre, ou simplement 4343, est le produit de 43 par 101. Comme il approche de celui qu'on désire trouver, on fera

$$a = 0{,}4343 = 0{,}43 \times 1{,}01,$$

et par la table I à vingt décimales qu'on trouve aussi dans celles de Callet, on a

	log. 0,43	=	9,63346 84555 79586 5
	log 1,01	=	0,00432 13737 82642 6
de là	log a	=	9,63778 98293 62229
mais	log A	=	9,63778 43113 00537
donc, différence ou	r	=	55180 61692.

Calculant maintenant la formule (6), qu'on peut réduire à celle-ci

$$\log(a - A) = \log(a\mu r) - \tfrac{1}{2}r,$$

on a

$$\begin{aligned} \log r &= 4{,}74178\ 65516 \\ \log k &= 0{,}36221\ 56887 \\ \log a &= 9{,}63778\ 98293\ 6 \\ -\tfrac{1}{2}r &= \quad -\quad 27590\ 3 \\ \hline \log(a-\mathrm{A}) &= 4{,}74178\ 93106. \end{aligned}$$

De là

$$a - \mathrm{A} = 0{,}00000\ 55180\ 96748;$$

et puisque

$$a = 0{,}43430,$$

on a enfin

$$\mathrm{A} = 0{,}43429\ 44819\ 03252;$$

c'est précisément le module que nous avons désigné ci-dessus par μ.

3[e] *Exemple*. On demande le logarithme du nombre .... $\mathrm{A} = 3{,}14159\,26535\,89793$, approché jusqu'à la quinzième décimale; ce nombre est, comme on le voit bien, la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est égal à l'unité.

Soit $a = 3{,}1416 = 1{,}68 \times 1{,}87$; on aura

$$a - \mathrm{A} = r = 0{,}00000\ 73464\ 10207,$$

et la formule (7), en y faisant r négatif, puisque $a > \mathrm{A}$, deviendra

$$\log \mathrm{A} = \log a - \frac{\mu r}{a}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{r}{a} + \frac{1}{3}\frac{r^2}{a^2}\right);$$

en l'évaluant par le moyen des logarithmes, on aura

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} \log\ 1{,}68 &=& 0{,}22530\ 92817\ 25862\ 85 & & & \\ \log\ 1{,}87 &=& \underline{0{,}27184\ 16065\ 36498\ 97} & \log r &=& 4{,}86607\ 51747 \\ \log a &=& 0{,}49715\ 08882\ 62361\ 82 \ldots\ldots\ldots & & & \underline{0{,}49715\ 08883} \\ [1] &=& \underline{-\qquad 10155\ 67040\ 5} & \log \frac{r}{a} &=& 4{,}36892\ 42864 \\ & & 0{,}49714\ 98726\ 95321\ 3 & \log \mu &=& \underline{9{,}63778\ 43113} \\ [2] &=& \underline{-\qquad\qquad 1187\ 4} & \log.[1] & & 4{,}00670\ 85977 \\ \log\ \mathrm{A} &=& 0{,}49714\ 98726\ 94134 & \log \frac{r}{2a} &=& \underline{4{,}06789\ 43} \\ & & & \log.[2] & & 8{,}07460\ 29. \end{array}$$

Tel est le résultat qu'il fallait trouver, et qui est exact jusqu'à la quinzième décimale.

4e *Exemple*. Soit log A = 9,33054 08833 9137; on demande log (1 + A) avec le même degré d'exactitude.

Pour trouver le nombre a, qui diffère très-peu de la valeur approchée $A = 0{,}214063$, Legendre réduit cette valeur en fraction continue, et il trouve que l'une des fractions convergentes est $a = \frac{137}{640}$. En effet, la fraction

$$\frac{214063}{1000000} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}}}};$$

ainsi l'on a pour quotients consécutifs

$$4, \quad 1, \quad 2, \quad 22, \quad 1, \quad 1, \text{ etc.},$$

et pour fractions convergentes

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{3}{14}, \quad \frac{67}{313}, \quad \frac{70}{327}, \quad \frac{137}{640}, \text{ etc.};$$

c'est-à-dire, sur la première ligne on écrit les quotients 4, 1, 2, etc., puis l'on prend pour première fraction intégrante $\frac{0}{1}$, et pour seconde l'unité divisée par le premier quotient 4; ensuite on multiplie séparément les deux termes de celle-ci par le quotient correspondant, et l'on augmente chaque produit, du numérateur et du dénominateur de la fraction qui précède; ce qui donne les deux termes de la fraction suivante $\frac{1}{5}$. Enfin l'on opère de la même manière pour déterminer successivement les autres fractions.

La valeur de a étant trouvée, l'on a

$$\begin{aligned} \log a &= 9{,}33054\,05931\,7252 \\ \log A &= 9{,}33054\,08833\,9137 \\ \log A - \log a = r &= \phantom{9{,}33054\,0}2902\,1885. \end{aligned}$$

D'ailleurs $1 + a = \frac{777}{640}$; si donc l'on continue d'opérer avec quinze décimales, et qu'on évalue les termes conservés de la formule (8), on aura

$$\begin{aligned} \log(1 + a) &= 0{,}08424\,10448\,17027 \\ R &= \phantom{0{,}08424\,10}511\,71163 \\ \text{enfin,}\quad \log(1 + A) &= 0{,}08424\,10959\,8819, \end{aligned}$$

R représentant ici les termes en r et r^2 de la formule.

5[e] *Exemple.* On sait que $\log \sin \theta = 9.61722\,43146\,6214$; on demande $\log \cos \theta$, avec un pareil nombre de décimales?

Soit $A = \sin^2 \theta$; on aura $\cos^2 \theta = 1 - A$ et $\log \cos \theta = \frac{1}{2} \log (1 - A)$; il s'agit donc de déduire $\log (1 - A)$ du logarithme donné. Or, en le doublant, il vient

$$\log A = 9{,}23444\,86293\,2428,$$

et l'on a, pour valeur approchée, $A = 0{,}171573$. Développant, comme ci-dessus, cette valeur en fraction continue, on trouve qu'elle diffère très-peu de $\frac{169}{985}$; d'après cela, si l'on fait $a = \frac{169}{985}$, on aura $1 - a = \frac{816}{985}$; et si l'on effectue le calcul de la formule (9), comme on vient de faire celui de la formule (8), on trouvera définitivement

$$\log (1 - A) = \log \cos^2 \theta = 9{,}91825\,43103\,2612,$$

et partant,

$$\log \cos \theta = 9{,}95912\,71551\,6306.$$

Legendre a donné d'autres applications intéressantes de ses formules; on fera bien d'y recourir, si ce qui précède paraît insuffisant.

LIVRE TROISIÈME.

OPÉRATIONS ET CALCULS GÉODÉSIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LA FORMATION DU CANEVAS DES GRANDES CARTES TOPOGRAPHIQUES.

108. La Géodésie est une partie de la Géométrie appliquée, qui traite de la division des champs; mais suivant l'acception la plus étendue, elle a pour objet la mesure de la Terre, ou celle d'une partie de sa surface, et c'est sous ce point de vue général que nous nous proposons de l'envisager. Les *opérations géodésiques* sont donc celles par lesquelles on détermine les positions respectives des principaux lieux d'un pays dont on veut lever la carte. L'ensemble de ces opérations forme ce que l'on appelle une *triangulation* ou un *canevas trigonométrique*, parce que les positions dont il s'agit représentent les sommets des angles des triangles qui, par leur enchaînement, composent un réseau continu dans tous les sens. Ces triangles de premier ordre, dont on observe rigoureusement les angles, réunissent les conditions les plus avantageuses, lorsqu'ils sont aussi grands que possible, à peu près équilatéraux, et qu'ils sont liés au moins à une ligne principale, ou *base* que l'on mesure avec beaucoup de soin. Lorsque cette base et les trois angles

de chaque triangle sont connus, on a tous les éléments nécessaires pour calculer de proche en proche les distances entre les objets; car un triangle est déterminé de grandeur, quand parmi ses six parties l'on connaît un côté. Le canevas général d'une carte étant ainsi établi, on le divise en canevas partiels, c'est-à-dire que l'on couvre de *triangles secondaires* et *tertiaires* la surface de chaque grand triangle. Les triangles secondaires prennent leurs bases de départ de quelques-uns des côtés du réseau de premier ordre, et l'on en mesure pareillement les trois angles. Quant aux triangles tertiaires, leurs sommets ne sont le plus souvent déterminés que par l'intersection des rayons visuels menés des stations du second ordre. On conçoit que, par ce moyen, l'on a une multitude de petites directions et de points rapprochés auxquels ceux qui relèvent les détails à la planchette ou à la boussole, pour former une topographie complète du pays, rattachent continuellement leurs travaux.

L'instrument adopté en France vers la fin du XVIIIe siècle, et ensuite dans quelques autres pays de l'Europe, pour mesurer les angles des triangles du premier et du second ordre, ainsi que pour observer les latitudes et les azimuts, est le *cercle répétiteur* de Borda : c'est celui dont nous donnerons particulièrement la description, et dont nous ferons connaître l'usage. La préférence qui lui a été accordée résulte de l'extrême précision qu'il procure, même sous d'assez petites dimensions, et de la facilité avec laquelle on l'établit dans le plan des objets; mais comme l'axe de la lunette inférieure ne passe pas celui de rotation de l'instrument, l'angle observé a quelquefois besoin d'être corrigé de la petite erreur occasionnée par l'*excentricité* de cette lunette. Il est même souvent impossible de placer le cercle au centre de la station, et alors l'angle observé doit encore éprouver une correction, que l'on nomme *réduction au centre,* et qui est analogue à celle dont on vient de parler.

Il arrive en outre, presque toujours, que l'angle observé est incliné à l'égard du plan horizontal qu'on imagine passer par le centre de l'instrument: la projection de cet angle, sur ce plan, se nomme *réduction à l'horizon*. Mais depuis les perfectionnements apportés au *théodolite répétiteur,* dont le limbe jouit de la propriété de rester dans la position horizontale, tandis que les lunettes se meuvent dans des plans verticaux;

les angles observés entre les objets, avec cet instrument, sont naturellement réduits à l'horizon.

Enfin, si l'objet sur lequel on pointe est éclairé du Soleil, et qu'il soit d'une largeur sensible, l'observateur n'en voit ordinairement qu'une partie ou *phase*, et le rayon visuel, dirigé sur le milieu apparent de cette phase, ne passe pas par le centre de l'objet. Il faut donc encore à l'angle observé, faire une correction qui dépend essentiellement de la position du Soleil et de la forme de l'objet; mais il est très-rare que cette correction soit nécessaire, parce que l'on fait en sorte de pointer sur des objets très-distincts, et cependant d'une très-petite largeur apparente.

Lorsque les angles des triangles d'une grande chaîne sont réduits à l'horizon de leurs sommets respectifs, on ajoute ceux d'un même triangle, et la somme que l'on obtient surpasse nécessairement deux angles droits; parce que les angles ajoutés sont ceux d'un triangle sphérique dont les côtés très-peu courbes, à la vérité, représentent les distances curvilignes comprises entre les verticales des stations. Ensuite l'excès dont il s'agit, et qui est en même temps affecté des erreurs d'observation, se répartit indistinctement par tiers sur les trois angles du triangle dont il dépend. Quand ces angles sont ainsi réduits à ne valoir que deux angles droits, on procède au calcul des distances, en les considérant simplement comme des côtés de triangles rectilignes, en vertu du théorème de l'art. **100**, quoiqu'elles soient des arcs de grand cercle de la sphère dont le rayon est le même que celui de la *ligne géodésique*, ou de la base réduite préalablement à un niveau constant, qui est celui de la *mer moyenne* (nº **33**). Quant aux triangles secondaires, ils se forment, s'observent et se résolvent de la même manière que les grands triangles qui leur fournissent pour bases un ou plusieurs de leurs côtés.

Au lieu de ramener par cette voie la résolution des triangles sphériques peu courbes à celle des triangles rectilignes, on peut les traiter comme tels en dégageant chacun de leurs angles observés du tiers de l'erreur totale, ou bien l'on peut réduire les angles horizontaux aux angles formés respectivement par les cordes des arcs compris entre les stations; et pour lors les triangles à calculer sont réellement des triangles rectilignes, dont un des côtés est la base mesurée et réduite à sa corde, ainsi qu'à un horizon fixe tel que celui de la mer.

On ne saurait néanmoins assigner, par le moyen des seules distances calculées, la place que les stations occupent réellement sur le globe terrestre; il faut en outre déterminer astronomiquement la latitude et la longitude de l'une d'elles, ainsi que l'*azimut* de l'un des côtés de la chaîne, c'est-à-dire l'angle qu'il forme avec le méridien connu. On déduit alors de ces nouvelles données les *positions géographiques* des autres objets observés, ou leurs distances à l'équateur et au méridien d'où l'on est convenu de compter les longitudes. Il est surtout essentiel dans les triangulations de premier ordre, faites dans le but de déterminer les dimensions de la Terre ou de former une exacte description géométrique d'un grand état, de mesurer plusieurs bases de vérification, et de s'assurer si les résultats fournis par les calculs s'accordent avec les latitudes et les azimuts observés vers les extrémités de la chaîne des triangles.

Pour connaître en outre le relief du terrain, il est nécessaire de déterminer les hauteurs de ses différents points au-dessus des mers, à l'aide de leurs angles d'élévation ou de dépression et de leurs distances réciproques : or c'est ce que procurent les nivellements trigonométriques, qui font essentiellement partie des opérations géodésiques des différents ordres. La latitude, la longitude et l'altitude, ou la hauteur absolue de chacun des sommets des triangles d'un réseau, sont donc trois coordonnées indispensables.

Lorsqu'on a recueilli ainsi tous les éléments qui constituent le canevas d'une carte, on y trace, suivant une certaine loi, deux systèmes de lignes, dont l'un représente des méridiens, l'autre des parallèles; et l'on fixe, à l'aide de ces lignes, les positions de tous les lieux donnés par leur latitude et leur longitude. Quelquefois aussi, quand la carte n'embrasse qu'une petite étendue de pays, on en rapporte les principaux lieux à deux axes rectangles, qui sont le développement rectiligne du méridien principal de cette carte, et celui d'un arc de grand cercle perpendiculaire à ce méridien. Dans ce cas, les coordonnées des points déterminés par le réseau de triangles, sont des distances à la méridienne et à sa perpendiculaire, ou des plus courtes distances géographiques.

Tel est le précis des matières que nous allons traiter avec tout le détail nécessaire : nous tâcherons même que les personnes qui sont peu

versées dans l'Analyse et la Géométrie, retirent tout le fruit possible de la lecture de cet ouvrage; et comme dans la plupart des exemples de calculs trigonométriques, nous emploierons la division centésimale du cercle, afin de les rendre plus simples et de nous conformer à ce qui se pratique parmi les ingénieurs-géographes français, nous aurons soin d'indiquer les légères modifications qu'il y aurait à faire dans nos formules, pour que les résultats en soient donnés en degrés sexagésimaux, dont l'usage est universel.

CHAPITRE II.

DE LA MEILLEURE CONDITION DES TRIANGLES; DU CHOIX ET DE LA CONSTRUCTION DES SIGNAUX.

109. Nous avons déjà dit que les triangles d'un réseau de premier ordre doivent avoir de grandes dimensions; mais la courbure de la Terre et la force des lunettes du cercle répétiteur fixent à cet égard une limite que l'on ne saurait franchir sans s'exposer à nuire à la précision qui résulte de l'emploi d'un bon instrument, quand les objets qu'on observe sont bien distincts. Nous avons dit aussi que les triangles réunissent les conditions les meilleures, quand ils sont équilatéraux ou peu différents de cette forme; c'est ce que va prouver l'analyse suivante :

Soient, comme de coutume, A, B, C les angles, et a, b, c les côtés d'un triangle géodésique; on aura

$$a \sin B = b \sin A;$$

et si l'on suppose que la base b ait été mesurée avec un soin tout particulier, l'erreur sur cette mesure pourra être considérée comme nulle. La différentielle de cette équation, en y regardant b comme constant, sera donc simplement

$$da = \frac{b \cos A}{\sin B} dA - \frac{a \cos B}{\sin B} dB;$$

et à cause de

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A},$$

on aura

$$da = a \cot A dA - a \cot B dB.$$

Dans cette formule différentielle, les variations dA, dB sont supposées positives : elles peuvent en général désigner les erreurs commises sur la mesure des angles A, B, erreurs supposées de quelques secondes seulement, et qui se composent de celles de l'instrument et du pointé. Si l'on admet qu'elles soient égales, et dans le même sens, on aura, pour l'erreur du côté cherché a,

$$da = adA\,(\cot A - \cot B),$$

laquelle sera évidemment nulle si $A = B$.

Si au contraire on suppose que les erreurs dA, dB soient égales, mais de signes différents, on aura

$$da = \pm\, adA\,(\cot A + \cot B);$$

et puisque, d'après l'art. **45**,

$$\cot A + \cot B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} = \frac{\sin(A+B)}{\frac{1}{2}\cos(A-B) - \frac{1}{2}\cos(A+B)},$$

il s'ensuit que

$$da = \pm\, adA \,.\, \frac{2\sin C}{\cos(A-B) + \cos C};$$

l'erreur da sera donc la plus petite possible, lorsqu'on aura ..... $\cos(A - B) = 1$, ou $A = B$.

Il résulte de ces deux hypothèses, que *la condition la plus avantageuse est en effet que les deux côtés cherchés d'un triangle soient chacun égaux à la base mesurée.*

Dans la pratique, il est impossible de satisfaire complétement à cette règle ; mais en formant des triangles dont les côtés diffèrent peu entre eux, les erreurs des observations angulaires auront très-peu d'influence sur les côtés calculés. En général, il ne faut admettre aucun angle au-dessous du tiers d'un angle droit, à moins que les localités ne forcent à s'écarter de ce précepte. D'ailleurs on se procure par là un autre avantage ; c'est qu'un angle de cette grandeur s'observe avec le cercle de Borda plus facilement que s'il était plus petit.

La formule fondamentale $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$ étant différentiée par rapport à

a et b, on a

$$da = db\left(\frac{\sin A}{\sin B}\right);$$

ainsi l'erreur qui affecte le côté cherché est égale à celle de la base, multipliée par le rapport $\frac{\sin A}{\sin B}$, ou par une quantité plus grande que l'unité. En effet, en supposant $B = \frac{1^q}{3}$, on a $A + C = \frac{5^q}{3}$, et par conséquent $\frac{5^q}{6}$ pour la valeur moyenne de A ou de C.

Les bases doivent donc être mesurées avec l'attention la plus scrupuleuse, et n'être pas trop courtes par rapport aux autres côtés des triangles dont elles dépendent.

En formant un long réseau, on conditionne les triangles dont il se compose, de manière à ce qu'ils s'agrandissent peu à peu, à partir de la base mesurée, et qu'ils acquièrent les dimensions que comportent les localités et les instruments.

110. L'expérience démontre que les erreurs dans la mesure des angles, loin de s'accumuler de plus en plus sur les côtés des triangles par lesquels on passe pour arriver à la dernière ligne d'une longue chaîne, se compensent au contraire en partie, lorsque ces triangles remplissent les conditions qui viennent d'être énoncées. Par exemple, Bouguer et les autres académiciens français qui furent chargés, en 1740, de la mesure des trois premiers degrés au Pérou, trouvèrent seulement 65 centimètres (2 pieds) d'erreur entre la mesure et le calcul, sur la dernière base déduite d'une série de vingt-huit triangles étendus sur un arc de plus de 350 000 mètres; de nos jours, les opérations géodésiques de Delambre et Méchain, quoique étant composées de quelques triangles d'un choix peu satisfaisant dans la partie de la méridienne de Dunkerque comprise entre Bourges et Fontainebleau, semblaient n'avoir donné lieu qu'à une différence d'un tiers de mètre dans la longueur de la base de Perpignan, conclue de celle de Melun, par une chaîne de plus de 60 triangles (*Astronomie* de Delambre, tome III, p. 545); mais la triangulation plus récente qui sert de fondement à la nouvelle carte de France, a fait reconnaître que ces deux bases pré-

sentent réellement une discordance de $1^m,82$ sur $11706^m,4$, qui est la mesure directe de la base de Perpignan (*voyez* notre *Nouvelle Description géométrique de la France*, t. Ier, p. 242 et 472); d'où il suit que l'arc de méridien limité par les parallèles du Panthéon et de Montjouy, et calculé par Delambre, doit être augmenté de 33 toises $\frac{3}{10}$.

Laplace, dans un savant Mémoire sur le Calcul des Probabilités appliqué aux opérations géodésiques (*Connaissance des Tems* de 1820, p. 422), trouve en général de l'avantage à ce qu'un réseau soit composé du plus petit nombre possible de triangles.

111. Le choix des stations, c'est-à-dire des points où l'on doit observer, exige beaucoup de discernement de la part de l'ingénieur, pour allier l'économie avec la précision à laquelle on désire atteindre: Il est nécessaire qu'il fasse d'abord la reconnaissance du pays, et qu'il trace le plan de son canevas trigonométrique. S'il a pour but de mesurer un arc de méridien, ou toute autre ligne fondamentale d'une grande opération géodésique, il doit disposer ses triangles de manière qu'ils soient, autant que possible, traversés par cette ligne; or c'est de quoi il s'assurera en faisant des observations et des calculs provisoires, comme nous l'enseignerons par la suite. Mais s'il entreprend le levé de la carte d'une contrée, il n'est plus gêné dans sa route; il a la liberté d'étendre son réseau dans tous les sens. En général, il doit choisir de préférence les endroits assez élevés pour qu'ils se projettent dans le ciel, lorsqu'ils sont aperçus des stations voisines.

Supposons que du point A (*fig.* 16), on voie le point B dans le ciel. Pour savoir si de ce second point l'objet A se projettera de même dans le ciel, on prendra la distance zénithale ZAB et la distance zénithale ZAC du point opposé de l'horizon. Or, il peut arriver que la somme ZAB + ZAC surpasse sensiblement deux angles droits; dans ce cas, l'objet A sera bien visible du point B. Mais si la somme dont il s'agit est plus petite que 200°, l'objet A se projettera en terre ou sur la montagne qui borde l'horizon vu du point B, et sera souvent difficile à distinguer nettement, à moins que l'intervalle qui le sépare des limites de l'horizon ne soit considérable.

Lorsque la somme des deux distances zénithales sera de deux angles droits, ou quelques minutes de plus, il y aura lieu d'espérer que le

signal A, vu de la station B, sera suffisamment élevé par la réfraction, pour être aperçu dans le ciel.

112. Les clochers, les tours et les donjons couronnés de plateformes sont en général des stations commodes; mais il n'est pas toujours possible d'en disposer pour former des triangles avec les conditions les plus avantageuses, et le plus souvent ces objets ne dispensent pas de l'usage des signaux, quand on veut rendre le pointé plus sûr. Il est vrai que, dans ce cas, ces signaux sont très-simples, et s'établissent à peu de frais. Par exemple, une poutre verticale, surmontée d'un poinçon ou tonneau, ou d'un petit cône, étant établie sur le haut d'un édifice dont la forme et la grosseur nuiraient à l'exactitude des observations angulaires, offre un point de mire avantageux. Quelquefois aussi l'on préfère un disque d'un demi-mètre de rayon, peint en noir, et percé au centre pour apercevoir le ciel à travers. Mais ce moyen n'est praticable que quand on peut charger quelqu'un de diriger le disque en face de l'observateur.

Dans les opérations délicates exécutées en Angleterre, vers la fin du siècle dernier, et dans l'Inde au commencement de celui-ci, l'on a préféré les observations de nuit, et l'emploi des feux du Bengale, parce qu'ils jettent une lumière très-vive. Nos cercles français, construits d'après le principe de la répétition, se refusent à l'usage de ces feux de courte durée; mais on y supplée par des lampes à courant d'air, accompagnées de miroirs paraboliques qui réfléchissent la lumière dans la direction de l'observateur. Ces signaux paraissent être les meilleurs qu'on puisse se procurer lorsque les distances qui les séparent du lieu des observations sont considérables. MM. Biot et Arago s'en sont servis en Espagne, avec beaucoup de succès, dans le prolongement de la méridienne de France; et M. Laplace en avait recommandé expressément l'usage pour la mesure d'une grande perpendiculaire à la méridienne passant par Paris, et considérée comme l'une des lignes fondamentales du canevas trigonométrique de la nouvelle carte du Royaume.

On augmente le foyer de lumière, en réunissant plusieurs réverbères; mais il faut en confier la garde à une personne qui prenne le soin d'entretenir les lampes, afin que le centre de figure soit toujours le même. Il paraît que trois réverbères de moyennes dimensions, qui seraient dis-

posés aux angles d'un petit triangle équilatéral, offriraient une masse de lumière suffisante pour une distance de dix à douze myriamètres. En les adaptant à un pivot qui représenterait l'axe du signal, on pourrait les faire tourner au gré de l'observateur. Les avantages qu'on trouve dans leur emploi consistent en ce que l'on n'a aucune phase à craindre; que le point de mire est toujours très-distinct; et qu'à moins d'oscillations produites par une atmosphère agitée, ou de fortes brumes, les observations sont généralement plus faciles que celles qui sont faites de jour, si les réticules sont suffisamment éclairés.

Quand on ne peut profiter des édifices comme points de station, l'on emploie des signaux qu'on établit sur des lieux élevés. On les forme avec de longues files de bois réunies en pyramide tronquée à base quadrangulaire, et on leur donne de la solidité en les enfonçant en terre, ou en les maçonnant aux quatre angles de la base; enfin, pour les rendre plus visibles, on garnit de planches les quatre faces jusqu'à environ deux mètres de terre : cet intervalle, laissé libre, est nécessaire pour voir les signaux environnants. Alors on se place précisément dans l'axe du signal, afin d'éviter la réduction au centre (*v.* la *fig.* 17): cet axe est déterminé par la verticale passant par le point de mire. On a soin, en faisant le plan du signal, d'indiquer le point où cette verticale rencontre la base. Si, au contraire, ce signal est établi dans une plaine ou au milieu d'un bois, et qu'il faille lui donner une grande hauteur, on construit à son sommet une petite chambre d'observation avec des ouvertures par lesquelles on puisse voir les objets éloignés.

En France, les ingénieurs-géographes sont dans l'usage, pour le service de la carte de France, de planter une borne au centre d'un signal érigé en rase campagne. Cette précaution, que ne prennent pas toujours les observateurs, procure des points de repère très-utiles, tant pour ceux qui doivent lier leurs opérations de détail aux points trigonométriques, que pour coordonner des nivellements partiels du terrain avec le nivellement général résultant de la triangulation.

Des arbres bien droits, et dépouillés de branches vers le bas de leurs tiges, sont aussi de bons signaux naturels; lorsqu'ils se trouvent isolés et sur les sommets des montagnes, ils s'aperçoivent de très-loin, surtout s'ils se projettent dans le ciel et sur les nuages.

On fait aussi construire en pierre des pyramides carrées, et on les

dispose de manière que les faces soient à peu près perpendiculaires aux côtés des triangles qui ont ces pyramides pour sommets. Si ces signaux se projetaient en terre, ou sur un fond qui les dérobât à la vue, on les ferait peindre, afin qu'ils pussent se bien détacher par l'effet de l'opposition des couleurs. Lorsqu'un signal se projette dans le ciel, il convient de le peindre en noir; s'il est vu sur un fond vert, la couleur blanche le fera bien distinguer.

Delambre prescrit de donner à un signal une hauteur telle, que de la station la plus éloignée il paraisse sous l'angle de 31″ de la division sexagésimale; dans ce cas cette hauteur est

$$H = 0,00015\,K,$$

K étant la distance à ce signal. Il prescrit en outre de donner au côté de la base le tiers de la hauteur.

Parmi les signaux d'une forme insolite, nous citerons particulièrement les flèches très-aiguës, parce qu'elles sont souvent invisibles. Les moulins à vent, à cause de l'irrégularité de leur figure, sont aussi de mauvais signaux; d'ailleurs comme ces objets, souvent mobiles, tournent sur un axe qui ne passe pas par le centre de figure, ils se présentent sous différents aspects, selon la direction dans laquelle on place les ailes pour donner prise au vent. Il est donc important, lorsqu'on est obligé de les employer, de se prémunir autant que possible contre les erreurs d'observation qu'ils sont susceptibles de faire commettre.

Si l'on adopte pour signal une flèche élevée, il faut tâcher de se placer assez près du point où l'on doit viser des stations voisines, afin que le défaut de verticalité de la flèche ne donne lieu à aucune erreur sensible dans la réduction à l'axe.

CHAPITRE III.

DESCRIPTION ET USAGE DU CERCLE RÉPÉTITEUR.

113. Si l'on partage la circonférence d'un cercle en plusieurs parties égales, et qu'à partir de zéro l'on porte successivement sur cette circonférence, et suivant l'ordre des divisions, la longueur d'un arc jusqu'à ce que sa seconde extrémité tombe exactement sur une des lignes de division, ou du moins en soit si près que la différence échappe aux sens; on obtiendra rigoureusement, ou d'une manière très-approchée, le nombre des parties contenues dans l'arc proposé, en divisant le nombre des parties de l'espace parcouru, par le nombre de fois que l'arc aura été porté sur la circonférence. Supposons, par exemple, que cette circonférence soit divisée en 4000 parties, et qu'à la neuvième fois, après une révolution entière, l'arc dont on cherche la mesure tombe sur la ligne qui termine la 50e division; il est clair que l'espace parcouru contiendra 4050 parties, et que l'arc proposé aura pour mesure $\frac{4050}{9} = 450$. Cet arc sera donc à la circonférence entière dans le rapport de 9 : 80. S'il existe une erreur dans cette évaluation, il est évident qu'elle ne doit être que la neuvième partie de celle dont peut être affectée la neuvième division; mais rien n'empêche de rendre cette erreur beaucoup plus petite, en portant l'arc à mesurer un plus grand nombre de fois sur la circonférence.

Ce moyen fort ingénieux de trouver, par des opérations répétées, le rapport d'un arc à la circonférence dont il fait partie, est dû à l'astronome Mayer; mais Borda en fit une application très-utile dans la mesure des angles, en imaginant pour cet effet le cercle répétiteur dont nous avons déjà parlé, et qui réunit le précieux avantage de garantir

presque entièrement des erreurs de la division, lorsqu'on multiplie suffisamment les observations.

Un cercle de 43 centimètres (16 pouces) de diamètre suffit pour les opérations les plus délicates de la Géodésie, et son *limbe* comprend aisément 4000 parties égales, dont 10 forment le *grade* ou le degré décimal. Dans un cercle de cette dimension, et même dans les cercles plus petits, la lunette supérieure AB (*Pl. III*) est adaptée à un châssis formé de deux règles ou *alidades* rectangulaires. On évalue les fractions des plus petites parties du limbe au moyen des divisions tracées aux extrémités des règles du châssis; l'ensemble de ces divisions compose ce que l'on nomme le *vernier* ou le *nonius*.

Pour concevoir l'usage du vernier, supposons que le limbe comprenne 4000 parties, et par conséquent 400 grades; et que 9 de ces parties embrassent les 10 parties du vernier: alors quand la première ligne du vernier, qu'on nomme *index* ou *ligne de foi*, sera exactement sur une ligne de division du limbe, sur le 40ᵉ grade par exemple, la seconde ligne du vernier sera en arrière de sa correspondante sur le limbe, d'un dixième de décigrade ou d'une minute centésimale. Si donc on faisait avancer la lunette supérieure suivant l'ordre de la graduation, et de manière que toutes les lignes du vernier coïncidassent les unes après les autres avec celles du limbe, on lirait successivement

$$40^g,0, \qquad 40^g,01, \qquad 40^g,02, \ldots, \quad 40^g,1;$$

puisque l'index, partant du 40ᵉ grade, aurait parcouru $\frac{1}{10}$, ensuite $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, . . ., $\frac{10}{10}$ d'un décigrade, ou de la plus petite partie du limbe. Le vernier donne donc dans ce cas les centièmes du grade ou les minutes. On peut même avoir par *estime* des millièmes ou des dixaines de secondes. En général, si le vernier contient n parties, il donnera $\frac{1}{n^{ième}}$ de la plus petite partie du limbe; et par conséquent une partie du vernier sera à celle du limbe dans le rapport de $n - 1 : n$. Ordinairement les dix parties principales du vernier sont chacune divisées en deux également, pour rendre l'estime plus sûre.

Il suit de là que si un cercle était d'une petitesse telle que le grade ne pût être partagé qu'en 5 parties égales, chacune d'elles représen-

terait un arc de 20 minutes centésimales, ou 20 centigrades; ainsi, le vernier composé de 10 parties donnerait les minutes de 2 en 2.

Sur les cercles de moyennes dimensions ($0^m,22$ de diamètre), que l'on construit maintenant, et dont la graduation est tracée sur une lame d'argent, le grade est divisé en 10 parties égales, tandis que les deux traits extrêmes du vernier désignés par 0 et 10, et séparés l'un de l'autre par 50 parties égales, embrassent 49 parties du limbe. Ainsi lorsqu'on aura lu sur ce limbe les grades et les dixièmes, et sur le vernier les dixièmes des dixièmes ou les centièmes de grade, et enfin les plus petites parties, jusqu'à la parfaite coïncidence des traits, on doublera ces dernières parties pour en faire des millièmes de grade ou des dixaines de seconde centésimale.

Afin de pouvoir lire aisément le vernier, on se sert d'une loupe qui grossit les objets; et même pour rendre les traits plus distincts, on est quelquefois obligé d'éclairer la partie du cercle où l'on doit lire, par un reflet de lumière provenant d'un morceau de papier ou d'une petite glace dépolie, que l'on dispose au-dessus du limbe, dans une situation convenable. Cela est surtout indispensable lorsque les divisions sont tracées sur l'argent, parce que l'on obtient de cette manière un blanc mat qui ne fatigue point la vue. Dans les cercles français, chaque loupe est ordinairement adaptée au châssis des verniers; mais il est beaucoup plus commode d'en placer deux aux extrémités d'une branche mobile, assujettie à tourner autour du centre du limbe.

L'agrafe qui accompagne chaque lunette sert à la rendre fixe sur le limbe de l'instrument. Pour cet effet, l'on fait tourner dans le sens convenable les vis de pression p, p' (*Pl. VI*). Quand on commence à éprouver de la résistance, on est sûr que la lunette ne peut plus se mouvoir indépendamment du limbe.

A chaque agrafe est adaptée une vis de rappel R, R', au moyen de laquelle on fait avancer ou reculer lentement la lunette.

Chaque lunette porte à ses extrémités deux verres convexes d'inégales dimensions. Celui qui a le plus grand diamètre se nomme l'*objectif;* c'est le verre qui est traversé le premier par les rayons lumineux venant de l'objet. L'autre verre ou lentille, se nomme l'*oculaire,* parce que c'est à travers cette lentille que l'on regarde directement.

L'objectif est formé de deux verres de différente espèce: le premier,

de verre ordinaire ou de *crown-glass,* est convexe, et placé tout-à-fait au bout de la lunette; le second, de cristal ou de *flint-glass,* est concave et placé du côté de l'oculaire, de manière à emboîter exactement la convexité du premier. Les lunettes qui ont un pareil objectif sont dites *achromatiques,* parce qu'elles ne produisent aucun iris autour de l'image de l'objet, et que la vision est alors très-nette, surtout vers le centre de l'objectif.

On a imaginé en Bavière, il y a peu d'années, un procédé pour faire le flint-glass, et il paraît qu'on l'obtient de très-bonne qualité, c'est-à dire très-dense et sans stries. On en fait aussi d'excellent en France.

Le *champ* de la lunette est tout l'espace circulaire dans lequel l'œil aperçoit les objets extérieurs : il est utile qu'il soit le plus grand possible. Les meilleures lunettes sont celles qui offrent un fort grossissement.

Dans les lunettes à deux verres convexes seulement, les objets sont vus renversés, et plus clairement que dans celles où ils sont vus droits, à l'aide d'un plus grand nombre de lentilles. On n'en adapte pas d'autres aux instruments de Géodésie et d'Astronomie. Ce renversement de l'image n'a aucun inconvénient, parce que l'on est bientôt accoutumé à discerner les objets dans cette situation.

L'objectif de ces lunettes est quelquefois adapté à une pièce cylindrique mobile, enveloppant l'extrémité du canon. Nous indiquerons tout à l'heure l'usage de cette pièce.

Le lieu intérieur de la lunette où viennent se peindre avec beaucoup de netteté les objets extérieurs, se nomme le *foyer* de l'objectif. On tire ou bien l'on enfonce le petit tube qui porte l'oculaire à très-court foyer jusqu'à ce que cette netteté soit obtenue. La distance de l'oculaire à l'objectif varie selon la vue de l'observateur.

Le *réticule,* placé près de l'oculaire et au foyer de la lunette, est un diaphragme ou petit anneau de métal dont les diamètres rectangulaires, un peu plus petits que ceux de la lunette, sont représentés par deux fils de soie, d'araignée ou d'argent. Cet instrument a la propriété de se mouvoir perpendiculairement à l'axe de la lunette, et de s'incliner d'un demi-quadrant. S'il arrivait que ces fils donnassent lieu à une *parallaxe,* c'est-à-dire que leur image parût éprouver du dérangement à l'égard de l'objet que l'on fixe, lorsque l'on regarde par différents points de l'ouverture de l'oculaire; alors on ferait mouvoir en

avant ou en arrière, et parallèlement à elle-même, la pièce qui entraîne l'objectif, de manière à en ramener le foyer à l'endroit même des fils supposés fixes. Au contraire, quand ces fils sont mobiles dans le sens de la longueur de la lunette, on les rapproche ou on les éloigne de l'objectif jusqu'à ce qu'il n'existe plus de parallaxe.

Les extrémités du cylindre X (*Pl. III* et *VI*) traversent celles des supports Z, Z'. Ce cylindre, en tournant, incline l'axe Y placé perpendiculairement au centre du cercle auquel il sert de pivot. Pour incliner le cercle à volonté, et le conserver dans la position que l'on juge convenable de lui donner, on desserre d'abord la vis P du quart de cercle attaché au cylindre X; ensuite on la serre quand on a obtenu l'inclinaison désirée. Il est utile qu'il y ait aussi une vis de rappel à ce quart de cercle, pour lui procurer un mouvement lent analogue à celui qu'on peut donner aux lunettes.

Dans le cercle de Borda, construit en premier lieu par Lenoir, l'axe Y traverse une espèce de boîte TT' qui porte le nom de *tambour*, et dans laquelle est enchâssé un plomb servant de contre-poids au cercle, pour le tenir en équilibre dans le cas où l'on oublierait de faire agir la pince P pour fixer le quart de cercle C au support Z.

Le périmètre du tambour est dentelé, de manière qu'à l'aide de la vis sans fin W (*Pl. V*) qui engrène dans cette dentelure, on fait tourner lentement le cercle et les lunettes, sans que la colonne S participe à ce mouvement. Cette vis sans fin, que l'on nomme aussi *vis tangente*, se détache du tambour au moyen d'un pivot tournant D, auquel est fixée une petite pièce d'acier faisant l'office d'un levier.

Les supports Z, Z' sont unis par une traverse, et forment ce que l'on nomme la *fourchette*. Cette traverse se fixe à la colonne de l'instrument, en la plaçant sur le talon qui termine cette colonne, et en l'arrêtant par le moyen des vis H, H'. On voit donc que l'instrument est composé de deux parties qui peuvent être réunies ou séparées à volonté: on les sépare pour les emboîter et les transporter plus commodément.

Le pied de la colonne est placé au milieu d'un cercle denté *z z'*, que l'on nomme *cercle azimutal*. Ce cercle est établi à demeure sur le pied de l'instrument, composé de trois branches V, V', V''. Le bas de la colonne entraîne par son mouvement de rotation une alidade *zz'* (*Pl. VII*, n° 2), à l'une des extrémités de laquelle est un vernier qui

sert pour estimer les parties des divisions du cercle azimutal. La pince K est destinée à arrêter ce mouvement, tandis que la vis d'engrenage, ou le pignon O, sert à le procurer. Quelquefois le cercle azimutal tourne avec la colonne, et pour lors le vernier est fixe.

Il résulte de ce qui précède, 1° que les deux lunettes peuvent être rendues fixes ou mobiles indépendamment l'une de l'autre; 2° que la colonne étant immobile, le limbe peut tourner rapidement ou lentement autour de l'axe Y, si l'on désengrène ou si l'on fait agir la vis du tambour; 3° que tout l'instrument peut tourner de la même manière sur sa colonne; 4° enfin que le limbe s'incline dans deux positions différentes, au moyen du quart de cercle et des vis du pied.

Il nous reste à parler du grand et du petit niveau.

Le premier *df* (*Pl. V*), adapté invariablement à la lunette inférieure A'B', est composé d'un étui en cuivre recouvrant en partie un tube de verre fermé hermétiquement, et contenant de l'alcool ou de l'éther, et une petite quantité d'air ou de vapeur de la liqueur, qui prend vers le milieu du tube une forme plus ou moins oblongue, suivant la température de l'atmosphère. La justesse de cet instrument dépend surtout de sa *sensibilité;* on entend par là la grande facilité avec laquelle la bulle d'air quitte le milieu du tube pour se rendre à son extrémité la plus haute, lorsqu'on donne la plus petite inclinaison à ce tube. Cette sensibilité se manifeste d'autant plus que la bulle est plus longue et que le tube est d'un plus grand diamètre. Il faut cependant que cette sensibilité ait des bornes, car si la paroi intérieure du tube était cylindrique, la bulle d'air, hors le cas de parfait équilibre, se précipiterait toujours à l'extrémité supérieure de la colonne fluide. Feu M. de Chezy, ingénieur des ponts-et-chaussées, reconnut le premier que pour remédier à cet inconvénient, et faire en sorte que l'écart de la bulle d'air fût proportionnel aux degrés d'inclinaison de l'axe du niveau, il fallait donner à l'intérieur du tube, dans le sens de la section longitudinale, la forme d'un arc de cercle d'une très-légère courbure. Un tube travaillé de la sorte est dit bien *rodé*.

On juge que le niveau est *calé,* c'est-à-dire que la bulle d'air est stationnaire au milieu du tube, lorsque les extrémités de cette bulle répondent aux mêmes numéros qui désignent les divisions tracées symétriquement sur le tube, ou sur une petite règle d'ivoire ou de métal

placée au-dessus du niveau. Les plus petites parties de cette règle sont ordinairement des millimètres, et le point zéro est au milieu du tube. Il n'y a que l'expérience, comme on verra par la suite, qui puisse faire connaître combien de parties doit parcourir la bulle en partant du milieu du tube, pour que l'inclinaison de l'axe du niveau soit de 1″.

Le petit niveau *gk* (*Pl. VI*) est construit d'après le même principe que le précédent, et il est placé sur l'axe Y du cercle; l'une de ses extrémités est fixée à une charnière, mais l'autre extrémité peut être soulevée par le moyen d'une vis. Ce jeu est nécessaire pour caler ce niveau, lorsque le limbe du cercle a été disposé verticalement à l'aide d'un fil-à-plomb suspendu à une pince qu'on adapte à la circonférence du limbe. Pour que cette verticalité ait lieu, il faut que le fil-à-plomb batte librement sur la ligne tracée autour de la petite tige de la seconde pince accrochée au point le plus bas de la circonférence dont il s'agit. Lorsque l'artiste a eu le soin de tourner le cercle sur son axe même, il est plus exact, pour mettre le plan de ce cercle dans une situation verticale, de disposer l'axe horizontalement au moyen d'un niveau à bulle d'air que l'on y suspend.

114. Le cercle de Borda, tel que nous venons de le décrire, est extrêmement précieux en Géodésie et en Astronomie, à cause de l'exactitude des résultats auxquels il conduit lorsqu'on sait en faire un bon usage. Néanmoins, il n'est pas exempt de quelques imperfections, et l'une des plus grandes, selon nous, est dans l'effet de la vis tangente; car si en la faisant engrener, il arrive qu'un de ses filets tombe précisément sur un de ceux du tambour, le cercle éprouve un ébranlement subit et violent aussitôt qu'il reçoit un petit mouvement de rotation par le moyen de cette vis, en sorte que les lunettes sont transportées tout à coup bien au-delà des points auxquels on vise; mais on corrige ce défaut en substituant une pince à la vis tangente. Un autre inconvénient, c'est que la colonne est si longue, que le cercle oscille par un vent faible, ou par le moindre choc; mais il est des artistes qui remplacent cette colonne par un axe en fer, soutenu par trois branches de cuivre faisant les fonctions d'arcs-boutants : alors le cercle a dans toutes ses positions une grande solidité. Tels sont les cercles géodésiques et astronomiques qui sont sortis des ateliers de Lenoir et de Fortin.

Feu Reichenbach, de Munich, a construit des cercles répétiteurs qui ont aussi acquis une grande réputation. Ils sont principalement remarquables par l'exactitude de la division, la bonté des vis de rappel, et en ce que la lunette supérieure est adaptée à un cercle mobile tournant avec la plus grande liberté dans un autre cercle gradué. Le grand cercle astronomique de cet artiste, et dont M. Laplace a enrichi l'Observatoire royal, est un chef-d'œuvre d'exécution. Enfin les beaux et précieux instruments de précision que nous devons maintenant à l'habileté de M. Gambey, membre de l'Institut, nous dispensent d'être, à cet égard, tributaires de l'étranger.

DE LA MESURE DES ANGLES ENTRE DEUX OBJETS.

115. Avant de procéder à la mesure d'un angle, il est essentiel de s'assurer si les axes optiques des lunettes, c'est-à-dire si les droites menées par le centre de réfraction de chaque objectif et l'intersection des fils des réticules, sont exactement parallèles au plan du limbe: pour cela, on se sert d'une *lunette d'épreuve*. Cette lunette *ep* (*Pl. IV*), qui n'a qu'un fil, traverse deux plaques carrées *qq'* parfaitement égales. Lorsqu'elle est placée sur le limbe disposé horizontalement, on voit à quelle ligne distincte d'un objet très-éloigné son fil horizontal répond; et si, en la renversant sur les faces *qq* opposées à celles *q'q'*, ce fil passe par la même ligne apparente, on est sûr alors que l'axe optique est exactement parallèle au limbe. Si au contraire cette épreuve fait connaître que l'axe optique passe par une autre ligne, il sera nécessaire dans ce cas d'élever ou d'abaisser le réticule de la lunette de la moitié de la distance des deux lignes observées; ce qui se fait au moyen d'un tourne-vis qu'on implante dans la tête de la vis de rappel de ce réticule. Cette vérification étant faite, et la lunette d'épreuve restant dans la même situation, l'on dirige sur sa ligne de repère les deux lunettes de l'instrument; et si les fils horizontaux de leurs réticules, ou bien si les intersections des fils inclinés d'un demi-quadrant n'y répondent pas, on les y amène au moyen des vis de rappel *r* des réticules; après quoi les axes optiques des trois lunettes se trouvent parallèles au limbe.

On peut se passer de lunette d'épreuve par le procédé suivant. Après

avoir rendu vertical le plan du limbe et mis le cercle azimutal dans une position horizontale, à l'aide d'un petit niveau *nn'*, on amène la lunette supérieure sur un objet éloigné, ensuite on fait faire exactement une demi-révolution à l'instrument, puis on ramène la lunette sur l'objet; alors si l'intersection des fils du réticule s'est écartée du premier point de mire dans le sens horizontal, cela vient évidemment de ce que l'axe optique n'est pas parallèle au plan du limbe; dans ce cas l'on amène l'intersection des fils au milieu de l'intervalle, à l'aide de leur vis de rappel. Pour vérification l'on recommence cette opération plusieurs fois, et quand on est sûr que le parallélisme existe, il ne reste plus, pour l'établir relativement à la lunette inférieure, qu'à faire coïncider son axe optique avec celui de la lunette supérieure. Ce procédé, dont il est facile de se rendre raison, serait exact sans les imperfections peut-être inévitables de l'instrument; aussi vaut-il mieux, pour plus de sûreté, recourir à la lunette d'épreuve.

Lorsqu'on doit observer une flèche, on trouve quelquefois qu'il est plus commode et plus exact de l'amener à l'intersection des fils inclinés, ainsi qu'il vient d'être dit. Mais il est à propos de remarquer que de quelque manière qu'on dispose ces fils pour l'observation, il faut préalablement les vérifier dans la situation qu'on aura adoptée, parce que, comme ils ont dans chaque lunette un mouvement commun, il arrive souvent que, par un petit défaut de construction, leurs intersections ne répondent pas précisément au même point, dans les deux positions que l'on peut donner aux réticules; et c'est ce qui ferait que les angles seraient souvent observés dans un plan autre que celui sur lequel on compte les grades ou les degrés. Enfin, il est important de rendre l'objectif fixe à l'égard du tube de la lunette; car, comme le centre de figure et celui de réfraction ne coïncident pas toujours, l'axe optique se dérangerait dans le cours d'une observation, si l'objectif venait à tourner sur lui-même.

Maintenant, pour mesurer un angle entre deux objets terrestres, il faut d'abord amener les axes optiques des lunettes dans le plan de cet angle, et les y conserver pendant tout le cours de l'observation. Pour cet effet, l'on commence par disposer le limbe du cercle de manière que son plan passe à très-peu près par les deux points de mire; or, c'est à quoi l'on parvient en bornoyant à la vue simple, et inclinant seule-

ment le limbe, en faisant tourner un peu, s'il est nécessaire, tout l'instrument sur sa colonne, jusqu'à ce que les objets paraissent à égales distances du limbe. Ensuite, l'un des observateurs (car il est bon d'être deux pour s'entr'aider et éviter beaucoup de lenteurs et tâtonnements) rendant la colonne immobile, donne un mouvement de rotation au limbe, jusqu'à ce que la lunette supérieure fixée à zéro soit dans la direction de l'un des objets, de celui de droite, par exemple. Le second observateur, de son côté, place la lunette inférieure, rendue libre, dans la direction de l'autre objet; et chacun choisissant une vis du pied de l'instrument, la plus voisine du vertical de son oculaire, la fait mouvoir pour amener l'image de l'objet dans le champ de sa lunette, et ensuite à l'intersection des fils.

Ce procédé est évidemment fondé sur ce principe, qu'un plan est donné de position lorsqu'il passe par deux droites qui se coupent, ou lorsque, passant par un point, il est assujetti à être parallèle à ces mêmes droites. Ceux qui commencent à faire usage du cercle, ont quelquefois de la peine à se rendre ce procédé familier, quoiqu'il soit fort simple, et qu'il réussisse d'autant mieux qu'on a eu la précaution de disposer une des branches du pied dans la direction de la ligne qui divise à peu près en deux parties égales l'angle à mesurer. Cependant s'il arrivait que, par une position particulière du cercle, les deux mouvements imprimés en même temps aux deux lunettes avec les vis du pied se nuisissent continuellement, il faudrait déranger un peu la direction des pieds, afin de détruire cet effet et de parvenir au but qu'on se propose d'atteindre. Delambre a donné une formule pour éviter les tâtonnements à cet égard; mais avec un peu de pratique, on est toujours dispensé d'en faire usage.

Supposons donc que les axes optiques soient dans le plan de l'angle à mesurer, et que les divisions du limbe, selon l'usage en France, soient numérotées de gauche à droite; on amènera, 1° sur l'objet à droite la lunette supérieure toujours fixée sur zéro, en faisant tourner le limbe, après avoir isolé la vis tangente des filets de la vis du tambour, ou desserré la pince qu'on lui a substituée; ensuite, en faisant tourner cette vis lentement, lorsqu'elle aura été remise en action.

2°. On amènera la lunette inférieure sur l'objet à gauche, d'abord en desserrant son agrafe pour la rendre libre, puis en faisant jouer la

vis de rappel de l'agrafe rendue fixe: alors quand les deux lunettes seront exactement dirigées sur les deux objets, on aura la première partie de l'observation.

3°. Sans déranger les lunettes, on désengrenera la vis tangente, et l'on fera tourner le limbe, en dirigeant la lunette inférieure sur l'objet à droite; et, pour l'y fixer, l'on fera engrener la vis tangente. De cette manière, l'objectif de la lunette supérieure aura été repoussé dans le même sens d'une quantité égale à l'angle mesuré; et s'il arrive que le cercle ne soit plus dans le plan des objets, on l'y remettra à l'aide des vis du pied.

4°. On amènera enfin sur l'objet à gauche, la lunette supérieure rendue libre, et on l'y fixera en serrant son agrafe; par ce moyen, cette lunette aura décrit un arc égal au double de celui qui mesure l'angle proposé. On lira l'arc parcouru par la ligne de foi du vernier, et la moitié de cet arc sera la mesure de l'angle observé, abstraction faite toutefois de la petite erreur causée par l'excentricité des lunettes.

Cette mesure s'obtient donc à l'aide de deux *observations conjuguées*. Dans la première, la lunette supérieure est fixe à l'égard du limbe, tandis que l'inférieure est mobile. C'est tout le contraire dans la seconde observation.

En répétant l'opération précédente 1, 2, 3, 4,... fois, et partant toujours du point où la lunette supérieure est arrivée sur le limbe, à la fin de la seconde observation conjuguée ou de l'observation paire, on aura évidemment le quadruple, le sextuple, l'octuple, etc., de l'angle, pourvu qu'on ne néglige pas de tenir compte des circonférences entières parcourues.

116. Il existe un autre procédé pour mesurer un angle avec le cercle répétiteur; le voici. Au lieu de faire des observations *croisées*, comme ci-dessus, on fixe d'abord la lunette supérieure à zéro, et on la dirige sur l'objet à droite; ensuite on y amène la lunette inférieure, qui ne sert plus alors que de repère, et, sans faire tourner le limbe, on pointe la lunette supérieure, rendue libre, sur l'objet à gauche, ensuite on la fixe. De cette manière, l'angle est mesuré exactement par l'arc que cette lunette a parcouru lorsqu'elle n'a point d'*excentricité*, c'est-à-dire quand le plan mené par l'axe Y du cercle (*Pl. III*) contient en entier l'axe *ab* de cette même lunette. Si l'on veut continuer d'observer

l'angle proposé, pour compenser les erreurs du pointé, et atténuer surtout celles des divisions du limbe, on fera tourner l'instrument en désengrenant la vis tangente, afin de ramener la lunette supérieure sur l'objet à droite, et on l'y fixera; ensuite on y ramènera la lunette inférieure pour la faire servir de repère, et l'on dirigera, comme la première fois, la lunette supérieure, rendue libre, sur l'objet à gauche. Alors la ligne de foi du vernier de cette lunette marquera le double de l'angle observé. On peut continuer d'opérer de la même manière pour avoir le triple, le quadruple, etc., de cet angle; mais ce procédé exige évidemment plus de temps que par les observations croisées, lorsqu'on veut atteindre le même degré de précision.

117. Dans les grands cercles, la lunette supérieure entraîne ordinairement quatre verniers disposés à angles droits, ou à peu près, afin de pouvoir lire sur quatre points différents de la circonférence du limbe, et obtenir par là une *moyenne* plus indépendante des erreurs de la division et de celles de la lecture. Supposons, par exemple, qu'on lise les quantités suivantes au commencement de l'opération :

	verniers 1[er]	2[e]	3[e]	4[e]
(*a*)	0,000,	100,025,	199,985,	300,015,

et qu'après la dixième observation de l'angle, ces verniers marquent respectivement les nombres suivants, en tenant compte des circonférences entières parcourues durant la série,

	1[re]	2[e]	3[e]	4[e]
(*b*)	548^g,112,	648^g,108,	748^g,100,	848^g,105;

on prendra le complément à l'unité, des parties décimales comprises dans la ligne (*a*), toutes les fois qu'elles appartiendront à des nombres au-dessous de 100, 200 ou 300; et l'on affectera tous les restes du signe négatif. Ici l'on aura

	1[re]	2[e]	3[e]	4[e]
(*a'*)	+ 0,000,	+ 0,025,	− 0,015,	+ 0,015.

On procédera de même par rapport aux parties décimales comprises

dans la ligne (b), si les nombres dont elles dépendent n'ont pas tous le même chiffre aux unités. Or, dans le cas actuel, cette circonstance n'ayant pas lieu, on a

	1re	2e	3e	4e
(b')	$+0{,}112$,	$+0{,}108$,	$+0{,}100$,	$+0{,}105$.

Ensuite on fera une somme des fractions (a'), qui sera $+0{,}025$, que l'on retranchera de celle des fractions (b'), c'est-à-dire de $+0{,}425$; puis l'on divisera le reste $+0{,}400$ par 4, et le quotient $+0{,}100$ sera la partie décimale à ajouter au nombre 548^g; de sorte que le décuple de l'angle mesuré sera définitivement $548^g{,}100$; donc l'angle simple $= 54^g{,}810$.

On voit clairement par cette méthode, qui est générale, que le quart de la somme des nombres de la ligne (a') marque le point de départ d'un vernier *moyen* parcourant l'arc moyen entre les quatre; tandis que le quart de la somme des nombres de la ligne (b') désigne le point d'arrivée de ce même vernier.

Mais il y a possibilité de simplifier un peu le calcul précédent. Pour cela, ajoutez toutes les décimales de la ligne (a), et ôtez de la somme autant d'unités qu'il se trouvera de verniers marquant moins de 100^g, ou 200 ou 300: ici l'on a 0,025.

Ajoutez de même toutes les décimales de la ligne (b), et ôtez de la somme, ou ajoutez-y autant d'unités qu'il y aura de nombres où le chiffre des unités aura une valeur moindre ou plus forte que celui qui se trouve dans le nombre marqué par la ligne de foi du premier vernier. Enfin, de cette somme, ainsi diminuée ou augmentée s'il est nécessaire, soustrayez la première et divisez le reste par 4, c'est-à-dire par le nombre des verniers; le quotient sera la partie décimale *moyenne* cherchée.

Voici le cas. Au commencement les verniers marquaient

0,000, 100,001, 199,998, 300,003;

à la fin de la dixième observation, ils indiquaient

$532^g{,}001$, $631^g{,}998$, $732^g{,}003$, $832^g{,}002$.

Or, dans la première ligne, la somme des décimales diminuée de l'unité.. = 0,002
dans la deuxième ligne, cette somme diminuée de l'unité. = 0,004
différence........ = 0,002
$\frac{1}{4}$............... = 0,0005

Autre exemple. Au commencement, les verniers marquaient

0,000, 100,001, 199,998, 300,003;

à la fin de la dixième observation l'on avait

421,998, 522,001, 621,997, 721,996.

Or, la somme des premières fractions diminuée d'une unité = 0,002
celle des secondes fractions augmentée d'une unité. .... = 3,992
différence........ = 3,990
$\frac{1}{4}$............... = 0,9975

de là arc parcouru = $421^g,9975$, et angle mesuré..... = $\frac{421^g,9975}{10}$
= $42^g,19975$.

On peut aussi se dispenser de faire la soustraction indiquée, en prenant le complément arithmétique et à l'unité de la somme des parties décimales marquées par le vernier au commencement de la série; ou, ce qui revient au même et ce qui est plus simple, on lit le vernier à contre-sens, en mettant par la pensée 10 à la place de zéro, et réciproquement. Bien entendu qu'il faut alors ôter du résultat autant d'unités qu'on a pris de compléments, si les verniers marquent des nombres au-dessus de 100, 200 et 300^g.

A moins qu'on n'ait peu de temps pour observer, il est toujours utile de noter tous les angles d'une même série, afin de pouvoir s'assurer de l'uniformité de sa marche. Voici l'ordre que l'on peut suivre à cet égard :

NOMBRE des RÉPÉTITIONS.	ANGLES		VERNIERS au point		
	multiples.	simples.	de départ.	d'arrivée.	
2	117^g,389	58^g,6945	0,000	901	1er
4	234,778	6945	0,005	904	2^e
6	352,167	6945	0,005	900	3^e
8	469,557	694625	0,008	902	4^e
10	586,947	6947			
12	704,338	694833		3,607	
14	821,729	694928		0,000	complém. arithmét.
16	939,122	695125		0,995	
18	1056,511	695055		0,995	
20	1173,901	695050		0,992	
Arc moyen parcouru =	1173^g,89725	58^g,6948625	Somme =	3,589	
			Le quart =	0,89725	

Il n'est pas nécessaire de lire les quatre verniers chaque fois qu'on veut inscrire un angle multiple; il suffit de les observer au commencement et à la fin de la série, comme dans le tableau précédent. Ainsi, les fractions décimales des nombres de la seconde colonne ont seulement été indiquées par le premier vernier, à l'exception de celles du dernier nombre 1173,89725, qui sont le résultat de la combinaison des fractions insérées dans les deux dernières colonnes, combinaison faite d'après la troisième méthode exposée ci-dessus.

Il n'arrive pas toujours que les séries de cette espèce soient aussi régulières que la précédente; car les vapeurs qui s'élèvent quelquefois durant l'observation, par l'action d'un soleil ardent, produisent des ondulations qui font paraître les objets mobiles, et qui nuisent par conséquent à l'exactitude du pointé. De là ces anomalies qu'on remarque dans les séries d'un même angle. En général, les meilleures observations ont lieu pendant l'absence du soleil.

118. Dans les triangulations de premier ordre, il est convenable de prendre plusieurs séries d'un même angle à des jours différents; mais

3 séries de 20 répétitions chacune, prises dans les circonstances favorables et avec un cercle de 27 centimètres de diamètre, sont toujours suffisantes : alors, comme le plus souvent elles diffèrent entre elles, on en prend la *moyenne arithmétique*.

Il n'est peut-être pas inutile de dire qu'on entend par *moyenne arithmétique*, le quotient qu'on obtient en divisant par le nombre total des observations la somme de tous les arcs parcourus sur le limbe. Si, par exemple, n est le nombre des observations de la première série, et A l'angle simple; que n' et A' soient relatifs à la seconde série; que n'' et A'' se rapportent à la troisième série; l'angle moyen sera $\frac{nA+n'A'+n''A''}{n+n'+n''}$. En faisant chaque série d'un même nombre d'observations, la règle est plus simple, puisqu'il ne s'agit que de diviser la somme des résultats partiels par leur nombre.

DE LA MESURE DES DISTANCES ZÉNITHALES.

119. La distance au zénith d'un objet est le complément de sa hauteur angulaire, ou sa dépression augmentée de 100 grades, ou, ce qui revient au même, l'angle entre cet objet et le zénith de l'observateur. Avant d'observer une distance zénithale, on mettra le limbe du cercle dans la situation verticale ainsi qu'il suit.

On disposera l'axe Y du limbe (*Pl. V* et *VI*) dans une position à peu près horizontale, en desserrant la pince du quart de cercle et en renversant le limbe : ensuite, après avoir amené la bulle d'air du grand niveau df au milieu du tube, ce qui se fera d'abord en rendant libre la lunette inférieure, puis serrant son agrafe et faisant usage de sa vis de rappel, on fera tourner tout l'instrument sur sa colonne S, de manière que l'index, ou la ligne de foi du cercle azimutal zz', partant de la ligne de division qui se trouve vis-à-vis un des pieds de l'instrument, de V par exemple, parcoure une demi-circonférence. Si, dans cet état, la bulle d'air, après quelques oscillations, ne se fixe pas d'elle-même au milieu du tube, l'axe de la colonne ne sera pas dans un plan vertical ; alors on fera la correction moitié avec la vis du pied V qui se trouve précisément au-dessous du grand niveau, moitié avec la vis de rappel R' de la lunette inférieure.

On ramènera l'index du cercle azimutal au point de départ; et si, dans cette première position, la bulle ne conserve pas le milieu du tube, on fera la correction qui vient d'être indiquée. On continuera cette épreuve jusqu'à ce que la bulle revienne d'elle-même entre ses repères dans les deux positions de l'instrument. Alors l'axe de la colonne sera dans le plan vertical passant par zz'.

Ensuite, si après avoir placé l'index à 100^g du point où il se trouve maintenant, la bulle ne rentre pas entre ses repères, on l'y ramènera en faisant la correction moitié avec la vis V', moitié avec la vis V'', c'est-à-dire en élevant l'une et abaissant l'autre d'une égale quantité. De cette manière, l'axe S de la colonne du cercle se trouvera à la fois dans deux plans verticaux, et sera par conséquent vertical. Ainsi, quelque part que soit placé l'index du cercle azimutal, la bulle reviendra au milieu du tube pour s'y fixer. Cependant, si l'instrument a quelque petit défaut de construction, ou bien si l'opération que l'on vient d'indiquer n'a pas été faite avec toute l'exactitude possible, la bulle sera errante, lorsqu'on fera tourner la colonne S, et qu'on arrêtera l'index sur différents points de la circonférence; il faudra donc pour la rendre stationnaire au milieu du tube, faire de légères corrections, en procédant comme ci-dessus. Au surplus, la verticalité de la colonne n'est pas d'une nécessité absolue; elle dispense seulement de caler sans cesse les niveaux quand observe une distance au zénith.

Enfin, l'on mettra avec beaucoup de soin le limbe de l'instrument dans la position verticale, à l'aide du fil-à-plomb dont il a été parlé à l'art. **113**; ou mieux encore, au moyen d'un niveau à bulle d'air disposé pour cet effet. Alors, si le petit niveau *gh* que porte l'axe Y du cercle est incliné à l'horizon, on le calera au moyen de la vis de rappel qui y est adaptée, et l'on serrera la pince du quart de cercle, afin que le limbe ne puisse se déranger à l'égard de l'axe de la colonne. Lorsqu'en manœuvrant l'instrument, l'horizontalité du petit niveau n'aura plus lieu, on la rétablira en tournant dans le sens convenable la vis du pied qui se trouvera à peu près dans la direction de ce niveau, et cela afin de remettre le limbe vertical.

Maintenant, pour mesurer une distance au zénith, l'observateur fixera à zéro l'un des verniers de la lunette supérieure bien équilibrée, et placera cette lunette à sa droite, si les divisions de l'instrument sont

numérotées de gauche à droite; ensuite il la dirigera sur l'objet, en dégageant la vis tangente, puis faisant engrener cette vis pour procurer un mouvement lent à cette lunette. Alors l'aide observateur placera horizontalement la lunette inférieure qui porte le grand niveau, en la faisant mouvoir indépendamment du limbe. Lorsque la bulle restera au milieu du tube, en même temps que le point de mire sera sous le fil horizontal du réticule, ce que chaque observateur saura en s'avertissant mutuellement, on aura la première partie de l'observation, et le cercle sera à la droite de celui qui pointe sur l'objet.

On fera ensuite tourner tout l'instrument sur sa colonne, jusqu'à ce que l'index du cercle azimutal ait parcouru une demi-circonférence, c'est-à-dire que le limbe soit à la gauche de l'observateur dans le vertical de l'objet; et pendant que l'aide observateur, toujours placé à l'opposé des divisions du limbe, ramènera la lunette inférieure dans la position horizontale pour caler le grand niveau, en faisant tourner le limbe à l'aide de la vis tangente du tambour, l'observateur fera mouvoir la lunette supérieure, qu'il aura rendue libre, jusqu'à ce que le point de mire soit exactement sous le fil horizontal. Pour parvenir à ce but, il aura soin de serrer l'agrafe de cette lunette et de faire usage de la vis de rappel. Mais ce mouvement, imprimé à la lunette supérieure, aura pu déranger la bulle du grand niveau; il faudra donc la replacer entre ses repères, ou la caler en faisant tourner la vis tangente, et ensuite ramener l'axe optique de la lunette supérieure sur le point de mire, au moyen de sa vis de rappel. Lorsque le grand et le petit niveau seront calés, et que l'objet sera en même temps sous le fil, on aura la seconde partie de l'observation, et l'arc parcouru par la ligne de foi du vernier de cette lunette sera le double de la distance zénithale cherchée.

En effet, soit C le centre du limbe (*Pl. V*, n° 2), AB la direction de la lunette lors de la première observation, et CH la ligne horizontale déterminée par le grand niveau. Lorsqu'on tourne le limbe à gauche pour faire la seconde observation conjuguée, et que l'on cale derechef le niveau, la lunette supérieure prend la direction A′B′, c'est-à-dire qu'elle fait avec la ligne horizontale CH le même angle qu'auparavant, mais en sens contraire. Donc le point O, d'où l'on compte les grades, se trouve alors en O′; donc, si l'on détache la lunette supé-

rieure pour la ramener sur l'objet B, le point O′ reviendra en O, en parcourant l'arc OZO′. Mais cet arc est évidemment le double de la distance zénithale ZCO cherchée; donc à la fin de la seconde observation conjuguée, on a le double de cette distance.

En répétant plusieurs fois de suite cette opération, et partant toujours du point où s'est arrêtée la ligne de foi du premier vernier à la fin de la seconde observation conjuguée, l'on parviendra au quadruple, au sextuple, etc., de la distance zénithale, et l'on atténuera les erreurs du pointé et de la division, comme dans la mesure des angles entre les objets terrestres.

Nous prescrirons de mettre, avant tout, une des branches du pied de l'instrument dans le plan de l'angle à mesurer; voici pourquoi. Dans la deuxième partie de l'observation, l'on est obligé, pour caler le grand niveau, de faire tourner le limbe autour de son axe; mais les filets de la vis tangente qui produit ce mouvement, étant trop espacés les uns des autres, il n'est guère possible d'amener exactement par ce moyen la bulle au milieu du tube. Aussi, quand la correction est légère, vaut-il mieux la faire avec la vis V du pied, qui se trouve précisément au-dessous du grand niveau, et qui procure un mouvement très-doux, surtout si, au lieu de cette vis, on fait agir celle de l'étrier *ee′* sur lequel elle pose. On peut aussi, par la même raison, amener le fil horizontal de la lunette sur l'objet, avec cette même vis, lorsqu'on fait les observations impaires, puisque alors cette lunette est fixée au limbe. Ce mouvement de la vis dont il s'agit ne dérange pas le limbe de sa position verticale, ce qui est évident.

Les cercles où la graduation se lit de droite à gauche, exigent qu'en commençant la mesure d'une distance zénithale, la lunette soit à gauche, sans quoi l'angle observé serait la distance au *nadir* de l'objet ou le supplément de sa distance zénithale.

120. Malgré toutes ces précautions, il en est encore d'autres à prendre pour obtenir la plus grande précision possible. Par exemple, comme on n'est pas toujours sûr que le point de mire soit exactement sous l'axe du fil, il importe, pour ne pas tenir compte de la demi-épaisseur de ce fil, s'il est d'un diamètre assez sensible, de mettre successivement ses bords supérieur et inférieur en contact avec le point de mire;

parce que si l'angle observé est plus petit dans l'observation impaire, il sera plus grand de la même quantité dans l'observation paire, ou réciproquement.

De plus, comme il est commode de mettre le point de mire à une petite distance du fil vertical, et que rien ne peut faire juger de la parfaite horizontalité de l'autre fil, voici la manière de se prémunir contre l'erreur que causerait la petite inclinaison de ce dernier fil.

Si, lors de la première partie de l'observation, le point de mire m (*Pl. V*, n° 1) paraît dans la lunette à la droite du fil vertical AV, il sera réellement entre ce fil et le limbe, puisque les objets sont vus renversés; et l'angle HAX représentera l'erreur commise sur la distance zénithale, si Hh est la vraie position du second fil à l'égard de l'horizontale AX. Mais la lunette se renversant dans la deuxième partie de l'observation, il s'ensuit que le fil AH sera incliné dans le même sens par rapport à l'observateur. Si donc on place l'image du point de mire en m', c'est-à-dire à gauche du fil AV et de manière que $Am' = Am$, la nouvelle erreur faite sur la distance au zénith sera xAh, c'est-à-dire égale, mais de signe contraire à la précédente; ainsi, il y aura compensation. Il est donc évident que le point de mire se retrouvera réellement entre le fil vertical et le limbe, et au même point physique.

Dans tout ceci nous avons fait abstraction de l'excentricité de la lunette supérieure, parce qu'elle n'existe pas dans les cercles que l'on construit maintenant; d'ailleurs, eût-elle lieu comme dans la figure citée, la mesure des distances au zénith ne subirait pour cela aucune correction, parce que celle qui est relative à la seconde observation conjuguée est égale et de signe contraire à la correction qui se manifeste pendant la première observation, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer.

Les distances zénithales des objets terrestres servent pour réduire les angles à l'horizon, et faire connaître les différences de niveau des stations. Il est cependant nécessaire d'avertir que ces distances zénithales sont quelquefois affectées d'une erreur constante, lorsqu'on opère avec un grand instrument : erreur attribuée à la flexion de la lunette supérieure, lorsqu'elle n'est pas parfaitement équilibrée, et que nous apprendrons plus tard à évaluer.

121. S'il arrive que le lieu de l'observation ne permette pas de faire

faire au limbe une demi-révolution, dans ce cas on le laisse dans la position la plus favorable, et l'on mesure la distance zénithale, en faisant des observations successives analogues à celles décrites à l'article **116**; c'est ce que l'on concevra encore mieux par ce qui suit.

Après avoir mis le cercle dans la position verticale, dirigez la lunette supérieure, mise à zéro, sur un objet très-éloigné; amenez-y aussi la lunette inférieure, afin de rendre les deux axes optiques parallèles. Cela fait, et sans détacher du limbe la lunette inférieure, calez son niveau à l'aide de la vis tangente, puis rendez libre la lunette supérieure, pour la pointer sur l'objet dont on désire connaître la distance zénithale, et fixez-la dans cette position; alors l'arc qu'elle aura parcouru sera l'angle de hauteur ou de dépression cherché.

Pour doubler cet angle, refaites la même opération comme si la lunette supérieure était fixée sur zéro. Cette lunette parcourra ensuite un nouvel arc qui, étant ajouté au premier, sera la mesure du double de l'angle cherché. On pourrait de même se procurer le triple, le quaduple, etc., de cet angle. Mais l'on conçoit bien qu'il sera affecté d'une erreur occasionnée par le défaut de parallélisme de l'axe optique de la lunette inférieure et de l'axe de son niveau, qui est dépourvu de moyens de rectification : c'est là ce qu'on nomme l'erreur de *collimation*. Or la différence entre la mesure de la distance zénithale d'un objet, obtenue de la sorte et celle donnée exactement par le premier procédé décrit ci-dessus, sera cette erreur dont il faudra alors tenir compte dans la première mesure.

122. Il est à propos de dire comment on détermine le degré de sensibilité du grand niveau. Pour cet effet, mettez le limbe vertical, comme pour prendre une distance au zénith; fixez la lunette supérieure à zéro, et dirigez-la sur un objet quelconque, en faisant tourner le limbe avec la vis du tambour, jusqu'à ce que cet objet soit sous le fil horizontal. Desserrez la lunette inférieure, pour amener une des extrémités de la bulle du grand niveau vis-à-vis le trait de division extrême de la règle qui supporte ce niveau, et voyez si la lunette supérieure ne s'est pas dérangée. Ensuite faites tourner la vis du tambour, jusqu'à ce que la même extrémité de la bulle arrive à l'autre trait de division extrême, pourvu toutefois que l'autre extrémité de la bulle n'atteigne pas celle

du tube. Ensuite, ramenez la lunette supérieure sur le point de mire, en faisant usage de sa vis de rappel. Enfin, lisez le nombre de parties de la règle parcouru par la bulle; ce nombre n sera celui qui correspond à l'arc décrit par la lunette supérieure. Mais cet arc étant trop petit pour pouvoir être lu exactement, recommencez la même opération comme si la lunette supérieure partait de zéro, et vous aurez le double de l'angle correspondant au même nombre de parties d'inclinaison du niveau. Continuez de la même manière jusqu'à ce que vous ayez, par exemple, le décuple de l'angle cherché. Enfin, divisez cet angle A par le nombre n de parties, et le quotient $\frac{A}{n}$ sera le nombre de secondes correspondant à une partie d'inclinaison du niveau.

On est surtout obligé d'évaluer cette inclinaison, lorsque l'on opère avec un cercle à *niveau fixe*. Ce niveau, au lieu d'être adapté à la lunette inférieure, est fixé sur la colonne, et se trouve par conséquent tout à fait indépendant du limbe; ce qui est quelquefois à regretter. Il est cependant des observateurs qui préfèrent le niveau fixe au niveau mobile, parce que l'on observe avec une très-grande promptitude les distances zénithales des objets terrestres et des astres.

123. Pour observer avec un niveau fixe, on donne toute liberté au limbe de tourner lorsqu'il est vertical. Cependant on peut l'arrêter au besoin, au moyen d'une forte pince, qui fait corps avec la colonne; ou bien on lui imprime un mouvement de rotation très-lent, à l'aide d'une vis de rappel adaptée à cette pince. Quant au grand niveau qui est, comme nous venons de le dire, fixé sur la colonne et entièrement isolé du cercle, il ne sert que pour mettre vertical l'axe de cette colonne, ou pour en faire connaître l'inclinaison. Ce niveau a aussi sa vis de rappel pour le caler, et est placé parallèlement au limbe.

Ceci étant bien compris, voici la manière de mesurer l'inclinaison de l'axe de la colonne, et d'évaluer son effet sur les distances zénithales.

Représentons par B la longueur actuelle de la bulle d'air du niveau, et supposons que l'artiste ait eu le soin de mettre le zéro de l'échelle exactement au milieu de cette bulle, lorsque le tube est horizontal. Dans cette position, les extrémités de la bulle marqueront les mêmes nombres; et si l'on retourne le niveau bout pour bout sans changer la

position du plan sur lequel ce niveau repose, la bulle, après quelques oscillations, rentrera entre ses repères. Mais si l'on élève une des extrémités du niveau, l'extrémité droite, par exemple, la liqueur obéissant à la loi de la pesanteur, se déplacera, et portera la bulle vers la partie élevée; en sorte que l'extrémité droite de cette bulle marquera $\frac{1}{2}B + x = D$ parties de l'échelle, tandis que l'extrémité gauche marquera $\frac{1}{2}B - x = G$; puisque nous supposons que le tube est bien calibré, et que la bulle, pendant l'expérience, conserve sa longueur. Or, x désignant, en parties de l'échelle, l'inclinaison de l'axe du tube, on a $2x = D - G$; c'est-à-dire que le double de cette inclinaison est égal à la différence des nombres marqués par les deux extrémités de la bulle, quand le plan sur lequel s'appuie le niveau est horizontal.

Mais donnons au plan, dans le sens de la longueur du niveau, une inclinaison y telle que l'extrémité droite de la bulle marque

$$\frac{1}{2}B + x + y = D;$$

alors l'extrémité gauche marquera

$$\frac{1}{2}B - x - y = G.$$

Maintenant si nous retournons bout pour bout le niveau, sans rien changer d'ailleurs à la position du plan, l'extrémité droite de la bulle donnera

$$\frac{1}{2}B - x + y = D_1;$$

celle de gauche donnera au contraire

$$\frac{1}{2}B + x - y = G_1;$$

ainsi, de ces quatre équations l'on tirera

$$2x = D - D_1, \quad \text{ou} \quad x = \frac{D - D_1}{2},$$

$$2x = G_1 - G, \quad \text{ou} \quad x = \frac{G_1 - G}{2},$$

$$2y = D - G_1, \quad \text{ou} \quad y = \frac{D - G_1}{2},$$

$$2y = D_1 - G, \quad \text{ou} \quad y = \frac{D_1 - G}{2};$$

de là les deux règles suivantes, données par Delambre (*Astronomie*, tom. I, p. 82):

1°. *Le double de l'inclinaison du tube est égal à la différence des deux nombres de la droite; le second nombre se retranche du premier.*

Si x est positif, le bout du tube qui était d'abord à droite, est plus élevé que celui qui était à gauche; si x est négatif, c'est le contraire.

2°. *Le double de l'inclinaison du plan sur lequel s'appuie le niveau, est égal à la différence des nombres indiqués successivement par l'extrémité qui était d'abord à droite; le second nombre se retranche du premier.*

Si y est positif, c'est la partie droite du plan qui est la plus élevée; ce serait le contraire si y était négatif.

Ce que nous disons du plan, doit s'entendre de l'axe de la colonne du cercle qui porte le niveau. Ainsi, dans l'observation d'une distance zénithale avec un cercle à niveau fixe, on doit toujours considérer la même extrémité physique de la bulle avant et après le retournement du cercle, pour évaluer l'inclinaison de l'axe de la colonne.

Supposons, par exemple, que le cercle étant dans sa première position, G soit l'extrémité de la bulle dirigée vers l'objet, et D soit l'extrémité située du côté de l'observateur. Dans la seconde position du cercle, les mêmes extrémités physiques changeront de nom, puisque le bout du niveau qui était tourné vers l'objet sera au contraire tourné vers l'observateur; ainsi D deviendra G_1 et G deviendra D_1. Si donc dans le cours d'une observation de distance zénithale, on lit à chaque position du cercle les parties du niveau marquées par les deux extrémités de la bulle, afin d'obtenir plus de précision, et qu'on désigne généralement par G les parties correspondantes au même instant à l'extrémité *objet*, par D les parties correspondantes au même instant à l'extrémité *observateur*, les diverses valeurs de y seront renfermées dans les deux suites suivantes :

NOMBRE des OBSERVATIONS.	— objet + observateur	+ observat. — objet.	Limbe à droite. Limbe à gauche.
2.	$2y_{,} = \begin{cases} -G \\ +D_1 \end{cases}$	$2y' = \begin{cases} +D \\ -G_1 \end{cases}$	
4.	$2y_{,,} = \begin{cases} -G_2 \\ +D_3 \end{cases}$	$2y'' = \begin{cases} +D_2 \\ -G_3 \end{cases}$	
6.	$2y_{,,,} = \begin{cases} -G_4 \\ +D_5 \end{cases}$	$2y''' = \begin{cases} +D_4 \\ -G_5 \end{cases}$	

Il faut faire attention que si le niveau, supposé perpendiculaire à l'axe de la colonne, est élevé du côté de D ou de l'observateur, cet axe prolongé vers le zénith passera entre ce point et le rayon visuel dirigé sur l'objet. Or, comme on rapporte la distance zénithale à l'axe de rotation du cercle pris pour verticale apparente, il est clair que l'inclinaison de cet axe doit s'ajouter à la distance zénithale observée : c'est en effet ce que suppose le tableau précédent.

Toutes les valeurs de $2y_{,}$, $2y_{,,}$, $2y_{,,,}$,... données par la même extrémité physique de la bulle, seraient égales entre elles, si l'axe de rotation n'éprouvait aucun dérangement pendant tout le temps qu'on observe; il en serait de même des valeurs de $2y'$, $2y''$, $2y'''$,... De plus, ces deux séries seraient identiques; mais comme il n'en est pas tout à fait ainsi, il est convenable de prendre la moyenne entre toutes les valeurs précédentes de y, c'est-à-dire de faire une somme de toutes les différences $2y'$, $2y''$, ..., $2y_{,}$, $2y_{,,}$, ..., et de la diviser par le double du nombre des observations simples. De cette manière, on aura un arc moyen y, lequel étant converti en secondes (art. **122**), s'ajoutera à l'angle observé, ou s'en retranchera, selon que la somme des termes positifs sera plus grande ou plus petite que celle des termes négatifs.

Pour plus de clarté, voici une série que nous prîmes à l'Observatoire du Dépôt de la Guerre, avec un grand cercle de Lenoir, auquel cet artiste avait adapté un niveau fixe.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	ARC parcouru SUR LE LIMBE.	MARCHE DU NIVEAU FIXE.			
		objet — observateur +	différence a	observateur + objet —	différence b.
1	0^g....	52	— 3	52	— 3
2	....	49		55	
3	....	51	— 1	53	— 1,5
4	....	50		54,5	
5	....	51	— 1	54	— 1
6	....	50		55	
7	....	51	— 2	54	— 2
8	....	49		56	
9	....	50	— 1	55	— 1
n = 10	$858^g,9125$	49		56	

Arc moyen = $85^g,8912,50$	Somme des a = — 8 Som. des b = — 8,5
Corr. du niv. = — 9,50	Inclinaison de l'axe de rotat. $\frac{a+b}{2n}$ = — 0,825
Dist. zénit. = $85^g,8903,00$	Facteur constant..... 11,51
	Prod. ou corr. du niveau — $9'',50$

Le facteur constant $11'',51$ est la valeur d'une partie du niveau en secondes centésimales; il a été déterminé avec beaucoup de soin par la méthode de l'art. **122**; néanmoins il est trop grand pour que la correction soit sûre. Les niveaux de Fortin paraissent ne laisser rien à désirer: il en existe de cet artiste, qui sont d'une sensibilité telle, que la bulle parcourt régulièrement 3 millimètres quand l'axe s'incline de $1''$ sexagésimale; d'où il est aisé de conclure que le rayon de courbure de la paroi intérieure et longitudinale du tube est de $618^m,7944$.

124. D'après l'idée que nous avons donnée de la construction du cercle à niveau fixe, on doit en inférer que la vis tangente du tambour est remplacée par la vis de la pince ajustée à la colonne, lorsqu'on fait usage de cet instrument pour observer les distances zéni-

thales; que cette pince doit fixer tellement le limbe à cette colonne ou à la plaque qui lui est adhérente, qu'il ne puisse avoir le moindre mouvement de rotation, en passant de la première à la seconde observation conjuguée; mais que rien n'avertit du contraire, puisque le niveau est indépendant du limbe; qu'enfin, ce niveau pourrait bien être ramené chaque fois à la position horizontale, ou entre les mêmes repères, comme dans les cercles ordinaires, au moyen d'une des vis du pied; mais qu'on opère plus commodément et plus rapidement, en concluant l'inclinaison de l'axe de rotation des diverses positions de la bulle. Toutefois l'on n'est pas dispensé d'avoir un aide uniquement chargé d'observer cette bulle, surtout si le cercle n'est pas établi sur un corps parfaitement stable; car l'observateur, en allant de la lunette au niveau, changerait l'inclinaison de l'axe, en dérangeant par son propre poids la position du centre de gravité du système; inclinaison qui doit être invariable pendant la durée de deux observations conjuguées.

Une autre remarque non moins essentielle à faire, c'est qu'il importe que le limbe soit maintenu dans sa position verticale, pendant toute la durée des observations (art. **119**).

Lorsqu'on fait une longue suite d'observations de distances zénithales d'un même objet, on fait varier chaque jour l'inclinaison de l'axe de rotation du cercle, de manière que la correction du niveau soit tantôt positive, tantôt négative. Par là on donne lieu à des compensations qui rendent les résultats moyens plus indépendants des parties du niveau.

DU THÉODOLITE RÉPÉTITEUR.

125. Quoique l'usage du cercle répétiteur ordinaire nécessite le calcul d'ailleurs fort simple de la réduction des angles à l'horizon, il était à désirer que cet instrument fût garni de lunettes *plongeantes*, c'est-à-dire de lunettes qui pussent se mouvoir de plusieurs degrés dans un plan parfaitement perpendiculaire au limbe; parce qu'en disposant ce limbe horizontalement à l'aide de deux niveaux placés à angle droit, il en résulte que les angles observés sont naturellement

réduits à l'horizon. Les théodolites répétiteurs de Reichenbach, et surtout ceux de M. Gambey, qui sont d'une construction parfaite, jouissent précisément de cette propriété. La lunette inférieure de cet instrument, qui ne sert que de repère, a un petit jeu dans le sens vertical et dans le sens horizontal; mais la lunette supérieure AB (*Pl. XI*) est traversée par un axe bien calibré, et dont les extrémités C, C′ entrent dans des collets égaux élevés de quelques centimètres au-dessus du limbe ou s'appuient sur deux plans inclinés, de sorte que cette lunette, ainsi placée sur des supports, peut parcourir un arc de plusieurs degrés dans le plan perpendiculaire au limbe.

Il faut avant tout vérifier l'instrument, c'est-à-dire s'assurer si l'axe de rotation CC′ de la lunette supérieure est horizontal et parallèle au limbe, et si l'axe optique de cette lunette décrit un plan perpendiculaire à cet axe de rotation. Pour cet effet, l'on se sert du niveau NN′ suspendu à deux crochets parfaitement égaux Z, Z′, qu'on adapte à l'axe de rotation; et lorsqu'il est calé au moyen des vis du pied de l'instrument, cet axe doit se trouver horizontal. Néanmoins, pour plus de sûreté, on retourne le niveau bout pour bout, afin de voir si la bulle rentre dans ses repères : s'il arrivait le contraire, les deux crochets ne seraient pas égaux, et il faudrait corriger le niveau moitié avec sa vis de rappel, moitié avec la vis du pied qui incline l'axe de rotation. Enfin on dispose cet axe parallèlement au plan du limbe, à l'aide des vis des supports et du pied, et en procédant comme il a été dit à l'art. 119, pour placer horizontalement le cercle azimutal.

Il s'agit ensuite de rendre l'axe optique perpendiculaire à l'axe de rotation; or c'est à quoi l'on parvient de la manière suivante. Dirigez la lunette supérieure sur un objet éloigné; ensuite renversez-la de manière que la partie supérieure devienne la partie inférieure. Dans cet état, le bout de l'axe qui était à droite se trouvera à gauche; et si lorsque la lunette est ramenée sur l'objet, l'axe optique ne répond pas au même point qu'avant le renversement, on fera mouvoir le réticule jusqu'à ce que l'intersection des fils partage en deux parties égales la moitié de la déviation observée; puis l'on donnera à l'instrument un petit mouvement de rotation, pour ramener l'axe optique sur le premier point de mire. On renversera de nouveau la lunette, car si elle donne encore lieu à une petite déviation, l'on fera la correction qui vient

d'être indiquée. Après un petit nombre d'essais de ce genre, l'axe optique sera rectifié.

Dans le théodolite que nous décrivons, et qui a appartenu à M. Legendre, le cercle vertical MM′ ne donne les angles simples de hauteur ou de dépression, qu'avec une médiocre exactitude; mais avec le théodolite (*Pl. VIII*), qui fait l'office du cercle répétiteur, les distances zénithales se déterminent très-exactement. Cependant s'il fallait les prendre par le procédé expliqué art. **121**, l'on attacherait à la lunette supérieure un petit niveau à bulle d'air, afin qu'en le disposant ensuite horizontalement, l'axe optique fût lui-même horizontal ou à très-peu près; et alors l'erreur de collimation se mesurerait ainsi qu'il a été dit à l'article cité.

Maintenant, pour mesurer avec cet instrument un angle entre deux objets terrestres, dans l'hypothèse que les divisions se lisent de droite à gauche, comme dans la figure, on met d'abord le limbe horizontalement et l'un des verniers à zéro; ensuite on amène la lunette supérieure sur l'objet de gauche, en faisant tourner à la fois les deux limbes concentriques, et l'on dirige la lunette inférieure, qui est indépendante de ce mouvement, sur un objet quelconque pour servir de repère; puis on détache la lunette supérieure, afin de l'amener sur l'objet de droite, et pour lors l'arc que le vernier tracé sur le limbe intérieur a parcouru sur le limbe extérieur portant la graduation, est la mesure de l'angle proposé, si toutefois la lunette de repère ne s'est point dérangée; autrement il faudrait la remettre convenablement à l'aide de la vis qui fait tourner tout l'instrument, et ramener ensuite la lunette supérieure sur l'objet de droite. On peut répéter indéfiniment cette mesure, en ramenant sur l'objet de gauche la lunette supérieure, par un mouvement de rotation imprimé au cercle, et laissant toujours la lunette inférieure dirigée sur le point de repère, ou l'y ramenant en cas de déviation; ensuite, en desserrant la lunette supérieure pour la ramener seule sur l'objet de droite: de cette manière, l'arc qu'elle aura parcouru sera la mesure du double de l'angle proposé. En répétant cette même opération, on aura le triple, le quadruple, le quintuple, etc., de cet angle; et il est visible que quoique les observations ne soient pas *croisées*, comme avec le cercle répétiteur ordinaire, on parviendra néanmoins, après un même nombre d'obser-

vations simples, au même degré d'exactitude, toutes choses égales d'ailleurs.

Les théodolites de M. Gambey, dont nous avons déjà parlé et dont les officiers d'état-major se servent pour les opérations géodésiques de la carte de France, sont doublement répétiteurs, parce que le limbe gradué peut se placer verticalement comme celui du cercle de Borda (*Pl. VIII*). Dans ce cas la lunette supérieure se dispose de manière que son axe optique soit parallèle au plan du limbe, et ce parallélisme, après avoir été établi comme il est dit à l'art. **115**, n'éprouve aucun dérangement lorsque la lunette a été préalablement rendue fixe à l'égard du cercle-vernier. Enfin les grands théodolites de cet artiste, dont les verniers donnent 10 secondes centésimales, sont très-propres aux observations de latitude et d'azimut, parce qu'ils se composent de deux cercles perpendiculaires entre eux, et ayant chacun $0^m,3$ de diamètre : l'un destiné à la mesure des angles horizontaux, l'autre à celle des angles verticaux. Celui-ci est placé extérieurement au cercle horizontal, et est armé d'une lunette dont l'axe optique doit être parallèle au limbe. On peut alors, par une manœuvre facile, mesurer et répéter indéfiniment, soit les angles horizontaux, soit les angles verticaux; mais pour la mesure des premiers il est indispensable de faire usage de la lunette de repère. Nous n'en dirons pas davantage à ce sujet, la vue et l'examen des instruments en apprenant plus que les explications écrites les plus détaillées.

DE L'USAGE DU CERCLE DANS LES OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES.

126. Les observations azimutales se font souvent en prenant la distance angulaire entre un astre voisin de l'horizon et un objet terrestre. La méthode qu'on emploie pour cet effet ne diffère pas de celle par laquelle on mesure un angle sur le terrain; il est seulement à remarquer, 1° que le cercle a besoin d'être ramené sans cesse dans le plan variable des objets, parce que l'astre s'éloigne ou s'approche continuellement de l'horizon; 2° que l'on doit tenir compte de l'heure précise de la fin de chaque observation. Cette pratique demande une grande habitude;

aussi le théodolite répétiteur est-il de beaucoup préférable au cercle ordinaire, en pareille circonstance.

Si l'on observe une étoile, son diamètre est insensible, et se réduit à un point lumineux, même dans les plus forts télescopes; mais la lumière de l'étoile et le feu établi à l'objet terrestre (par exemple, une lampe à courant d'air munie d'un réflecteur parabolique), n'étant pas suffisants pour éclairer le champ des lunettes de manière à ce qu'on puisse bien distinguer les fils, si l'on observe pendant la nuit, on place un feu de bougie près de chaque objectif. L'observateur qui est chargé de pointer sur l'astre, ne le met pas exactement sous le fil vertical, afin que l'autre observateur ait le temps de ramener sa lunette sur l'objet terrestre, dans le cas où il y aurait un petit écart; ensuite l'un d'eux compte l'heure, la minute, la seconde et la fraction de seconde que la pendule marque à l'instant où l'étoile passe sous le fil. Si une troisième personne était chargée de noter l'heure de l'observation, celle qui pointe sur l'astre l'avertirait, à l'instant du passage sous le fil, par un mot d'une seule syllabe.

Comme le mouvement de l'astre, par rapport au signal, est sensiblement uniforme pendant de courts intervalles de temps, comme de 8 à 10 minutes, on divise l'arc parcouru, par le nombre des observations; et l'arc moyen qui en résulte est assez exactement la distance de l'astre au signal, pour l'instant moyen entre ceux de toutes les observations.

Si l'on observait le Soleil, on interposerait un verre noir entre l'œil et l'oculaire de la lunette du cercle, afin de pouvoir fixer cet astre sans danger; et l'on mettrait alternativement en contact avec le fil vertical son bord oriental et son bord occidental, pour éviter de tenir compte du demi-diamètre de cet astre; ayant soin d'ailleurs que le disque soit au même instant divisé en deux parties égales par le fil horizontal. Quand on préfère observer le même bord, il est essentiel d'indiquer celui qu'on a mis en contact avec le fil vertical, afin de savoir si l'arc de distance mesuré doit être augmenté ou diminué du demi-diamètre du Soleil; et il ne faut pas oublier que la lunette renversant les objets, le bord oriental apparent est le bord occidental vrai, *et vice versâ*.

127. S'il s'agissait de connaître la distance zénithale d'un astre, on procéderait encore comme on l'a expliqué à l'art. **119**. Ainsi, lorsque cet astre est éloigné du méridien, l'arc parcouru par la lunette supérieure, divisé par le nombre des observations, donnera, comme cidessus, pour quotient un arc moyen qui, eu égard à l'uniformité de la marche de l'astre pendant de petits intervalles de temps, de 8 à 10 minutes, par exemple, sera la distance au zénith, pour l'instant moyen entre ceux de toutes les observations. En mettant l'un après l'autre en contact avec le fil horizontal les bords supérieur et inférieur du Soleil, en sorte que le fil vertical passe le plus près possible du milieu du disque de cet astre, la distance trouvée sera celle du centre du Soleil au zénith.

Les observations de ce genre devant être faites dans le moins de temps possible, on se contente, pour éviter des longueurs, de lire les arcs parcourus par la lunette supérieure après 4, 6, 8 ou 10 observations, selon les cas. Les distances zénithales s'obtiennent très-rapidement à l'aide d'un cercle à niveau fixe (art. **122**).

Lorsqu'on observe une étoile qui n'est pas de première grandeur, on évite de la mettre à l'intersection des fils, parce qu'il pourrait arriver qu'elle fût entièrement cachée, et qu'elle ne se trouvât pas exactement dans l'axe optique; mais on la place derrière le fil horizontal, le plus près possible de cet axe, et successivement à droite et à gauche du fil vertical, par la raison donnée à l'art. **120**.

Pendant le crépuscule, et avec de fortes lunettes, on observe aisément les étoiles de seconde grandeur; il arrive cependant quelquefois qu'elles disparaissent avant d'être entièrement sous le fil, quand leur lumière est extrêmement faible. Cet inconvénient a également lieu lorsque l'on pointe sur une flèche très-aiguë. Alors les observations sont trop incertaines pour en tenir compte.

Quand on observe pendant la nuit, on adapte ordinairement un *réflecteur* F (*Pl. III*) à la lunette supérieure, pour éclairer les fils du côté de l'objectif, afin qu'ils paraissent en noir sur un fond clair. Ce réflecteur est formé d'une petite plaque de métal percée elliptiquement, argentée, et disposée convenablement pour réfléchir dans la lunette, les rayons de lumière qui proviennent de la bougie attachée à la fourchette de l'instrument. Un petit disque d'ivoire placé en

avant de l'objectif fait le même office; mais il est préférable d'éclairer les fils par une ouverture pratiquée au milieu de la lunette, et près de laquelle se trouve intérieurement le réflecteur.

Lorsqu'un astre est près du zénith, il est presque impossible de l'observer directement. Dans ce cas, l'on adapte à l'oculaire un verre prismatique, qui a la propriété de faire voir l'astre dans une direction perpendiculaire au limbe. Les observations astronomiques seront l'objet du Livre cinquième.

CHAPITRE IV.

DE LA CORRECTION A FAIRE AUX ANGLES MESURÉS AVEC LE CERCLE RÉPÉTITEUR, A RAISON DE L'EXCENTRICITÉ DES LUNETTES.

128. Quoiqu'on ne soit plus dans l'usage de rendre les deux lunettes excentriques, nous allons cependant donner la formule de correction qui convient à ce cas général.

Nous avons déjà dit que l'excentricité d'une lunette est la distance de son centre à l'axe de rotation du limbe. Soit $CE = e$ (*fig.* 18) l'excentricité de la lunette supérieure; $CD = e'$ l'excentricité de la lunette inférieure; D la distance de l'objet à droite; G celle de l'objet à gauche; et supposons toujours que les divisions du limbe se lisent de gauche à droite.

Lors de la première observation d'un angle entre deux objets A, B, la lunette supérieure, fixée sur zéro, a la position AE, et la lunette inférieure est dirigée suivant BD. Pour faire la deuxième observation conjuguée, on amène cette lunette inférieure sur l'objet de droite, en faisant tourner tout l'instrument sur son axe; et l'on dirige la lunette supérieure, rendue libre, sur l'objet de gauche, en sorte qu'elle prend la position BE'. Or il est visible que cette lunette, à la fin de la seconde observation, a décrit une quantité angulaire égale à la somme des angles ECE', DCD'.

Cela posé, si l'on désigne par x l'angle cherché BCA, et par m l'arc $DD' + EE'$ parcouru sur le limbe, la mesure de l'angle DCF sera

$$y = \text{ACE} + \text{BCD} + x;$$

elle sera encore

$$y = \text{BCE}' + \text{ACD}' - x + m;$$

mais vu la petitesse des angles ou des *parallaxes* α, α', β, β',

$$\mathrm{ACE} = 100^g - \alpha = 100^g - \frac{e}{\mathrm{D}},$$

$$\mathrm{BCD} = 100 \;\; - \beta = 100 \;\; - \frac{e'}{\mathrm{G}},$$

$$\mathrm{BCE'} = 100 \;\; - \beta' = 100 \;\; - \frac{e}{\mathrm{G}},$$

$$\mathrm{ACD'} = 100 \;\; - \alpha' = 100 \;\; - \frac{e'}{\mathrm{D}};$$

ainsi, après avoir égalé les deux valeurs de y, simplifié et réduit en secondes (art. **91**), on aura, pour la correction cherchée,

$$x - \frac{m}{2} = \frac{e - e'}{2\mathrm{D} \sin 1''} - \frac{e - e'}{2\mathrm{G} \sin 1''},$$

laquelle s'ajoutera à l'angle donné immédiatement par l'instrument, pour avoir le véritable angle de position ACB.

. Cette formule, qui est générale, nous apprend, 1° que si les deux excentricités sont égales et opposées, comme dans la *Pl. III*, la correction est nulle; 2° que si les deux excentricités sont égales et du même côté, cette correction est, abstraction faite du signe, double de celle qui a lieu quand la lunette supérieure n'est point excentrique.

Il faut pourtant prévenir qu'il est très-rare que l'on soit obligé de corriger les angles mesurés, de l'excentricité des lunettes; parce que cette correction est d'autant plus petite, que les côtés des triangles sont plus grands. Delambre, qui n'a donné cette correction que pour le cas où $e = 0$, l'a réduite en table, en supposant successivement $e' = -16, = -18, = -20$ lignes (*voyez* à ce sujet la page 102 de la *Base du Système métrique décimal*, tome I).

Quant aux distances zénithales, elles ne sont point affectées de l'effet de l'excentricité de la lunette supérieure, comme nous l'avons déjà fait remarquer (art. **120**). Mais ces distances pourraient, malgré tout, pêcher par défaut, d'une quantité constante sans qu'on s'en aperçût. Cela arriverait infailliblement si la lunette supérieure était décentrée, c'est-à-dire si l'anneau qui la retient à l'axe du limbe avait un petit jeu à l'égard de cet axe. Cette erreur du *centrage* ne peut

avoir lieu dans les cercles de Reichenbach et de Gambey, parce que, d'une part, l'axe dont il s'agit est conique, et que, de l'autre, la lunette se trouve toujours en contact immédiat avec cet axe, par l'effet d'un petit ressort qui tend sans cesse à la faire avancer vers le plus gros bout. Cependant les cercles à axe conique et de grandes dimensions ne sont pas toujours exempts d'une erreur constante, provenant d'une autre cause, ainsi que nous l'avons déjà dit (art. **120**).

Faisons voir, par un exemple numérique, l'effet peu sensible de l'excentricité de nos cercles actuels, et supposons pour cela $e = 0$, $e' = -20$ lignes $= -0^{m},0452$, $D = 24000^{m}$, $G = 25000^{m}$; la formule ci-dessus se réduira à

$$x - \frac{m}{2} = \frac{e'}{2D \sin 1''} - \frac{e'}{2G \sin 1''},$$

de là

$$\begin{array}{rlrl}
\log \frac{1}{2} e' = & 8,3541 & & \\
c.\log \sin 1'' = & \underline{5,8039} & & \\
 & 4,1580 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 4,1580 \\
c.\log D = & \underline{5,6198} & c.\log G = & \underline{5,6021} \\
\log 1^{er}\text{ terme} = & 9,7778 & \log 2^{e}\text{ terme} = & 9,7601
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
1^{er}\text{ terme}, & +\ 0'',5995 \\
2^{e}\text{ terme}, & \underline{-\ 0\ ,5756} \\
\text{Correction} & +\ 0'',0239
\end{array}$$

Ainsi la correction d'excentricité serait, dans ce cas, de $0'',02$ de la division centésimale, et sans doute bien au-dessous de l'erreur de l'observation.

Il est facile de reconnaître que l'effet de l'excentricité des deux lunettes sur les trois angles d'un triangle se réduit à zéro; car, en désignant par a, b, c les côtés d'un triangle, l'effet de l'excentricité sur chacun de ses angles sera

pour l'angle A, $\frac{e-e'}{2c} - \frac{e-e'}{2b}$,

pour l'angle B, $\frac{e-e'}{2a} - \frac{e-e'}{2c}$,

pour l'angle C, $\frac{e-e'}{2b} - \frac{e-e'}{2a}$;

d'où l'on voit que ces trois valeurs étant réunies, se réduisent à zéro.

Dans les théodolites de Gambey à deux cercles gradués, et dont les divisions se lisent de gauche à droite, la lunette attachée au cercle vertical a une assez forte excentricité à l'égard du centre du cercle horizontal, considéré comme celui de l'angle à mesurer; mais comme cette lunette est douée d'un mouvement complet de rotation verticale, on peut annuler la correction d'excentricité par le procédé que voici :

D'abord on mesurera une première fois un angle en ayant la lunette à droite et commençant par pointer sur l'objet de droite; puis une seconde fois, en ayant la lunette à gauche, et finissant par pointer sur l'objet de gauche. En continuant ainsi un nombre pair de répétitions, le multiple de cet angle, lu sur le limbe et divisé par ce même nombre de répétitions, sera exactement l'angle simple.

Si cependant l'on était dans la nécessité d'observer en ayant constamment la lunette du même côté, la correction d'excentricité à appliquer à l'angle mesuré aurait pour expression

$$\pm\left(\frac{r}{\mathrm{D}\sin 1''}-\frac{r}{\mathrm{G}\sin 1''}\right),$$

selon que cette lunette serait à droite ou à gauche de l'observateur.

CHAPITRE V.

DE LA RÉDUCTION DES ANGLES D'UN PLAN A UN AUTRE PLAN.

Réduction à l'horizon.

129. Quand les angles de position ne sont pas situés dans le plan horizontal mené par le lieu de l'observateur, et que les lunettes de l'instrument dont on se sert restent constamment parallèles au limbe, comme dans les cercles répétiteurs, ces angles de position doivent être réduits à l'horizon de leurs sommets respectifs. Les éléments de cette réduction sont, pour chaque angle, les distances zénithales des deux objets observés.

Soit z (*fig.* 19) le zénith de l'observateur, qui du point C a observé l'angle BCA incliné à l'horizon B'CA'. Cet angle aura, pour *projection horizontale*, l'angle B'CA' qu'il s'agit de trouver, et qui est formé par les plans verticaux ACA', BCB', dans lesquels sont situés respectivement les signaux A A', BB'. Mais l'angle B'CA' est le même que l'angle sphérique z du triangle zab formé par trois arcs de grand cercle, dont l'un za est la distance au zénith de l'objet A; l'autre zb, la distance au zénith de l'objet B; et le troisième ab, la mesure de l'angle observé BCA. Donc, si δ, δ' sont les distances au zénith connues za, zb, et que C soit l'angle de position BCA, on connaîtra les trois côtés du triangle sphérique abz; ainsi, en se conformant à la notation actuelle, l'angle z sera donné par la formule de l'art. **74**, savoir :

$$\sin \tfrac{1}{2} z = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{s}{2} - \delta\right) \sin\left(\frac{s}{2} - \delta'\right)}{\sin\delta \sin\delta'}},$$

s désignant la somme des trois côtés C, δ, δ', et le rayon des tables étant égal à l'unité.

Soient

$$
\begin{array}{lrl}
\text{angle de position,} & C = & 65^g,456 \\
\text{dist. zénithale de A,} & \delta = & 86\ ,250 \\
\text{dist. zénithale de B,} & \delta' = & 85\ ,400 \\
\text{on aura somme} & s = & 237\ ,106 \\
\tfrac{1}{2}\ \text{somme} & \frac{s}{2} = & 118\ ,553 \\
 & \delta = & 86\ ,250 \\
 & \frac{s}{2} - \delta = & 32\ ,303
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & 118^g,553 \\
\delta' = & 85\ ,400 \\
\frac{s}{2} - \delta' = & 33\ ,153;
\end{array}
$$

et l'opération, par les logarithmes, sera

$$
\begin{array}{ll}
\log\sin\left(\frac{s}{2} - \delta\right) = \log\sin 32^g,303\ldots & 9,6865639 \\
\log\sin\left(\frac{s}{2} - \delta'\right) = \log\sin 33\ ,153\ldots & 9,6968322 \\
\text{compl. } \log\sin\delta\ldots\ldots\ldots\ldots & 0,0102095 \\
\text{compl. } \log\sin\delta'\ldots\ldots\ldots\ldots & 0,0115224 \\
\qquad \log\sin^2\tfrac{1}{2}z\ldots\ldots\ldots\ldots & 19,4051280 \\
\text{moitié, ou } \log\sin\tfrac{1}{2}z\ldots\ldots\ldots & 9,7025640 = 33^g,6392;
\end{array}
$$

ainsi, la projection de l'angle C, ou cet angle réduit à l'horizon $= 67^g,2784$.

Il est bien rare que les distances au zénith soient aussi petites que dans l'exemple ci-dessus; et si elles ne différaient de l'angle droit que de 2 ou 3 grades, la formule précédente deviendrait trop pénible à calculer, pour avoir avec exactitude la projection de l'angle observé. En général, il vaut mieux chercher la réduction, qui n'est ordinairement que de quelques secondes, et qui s'obtient par la formule suivante:

$$x = \tfrac{1}{4}\sin 1''\left[200^g - (\delta + \delta')\right]^2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{4}\sin 1''(\delta - \delta')^2 \cot\tfrac{1}{2}C;$$

c'est-à-dire par celle (2′) de l'art. 96, dans laquelle on a mis $100^g - \delta$ pour α, et $100^g - \delta'$ pour β; ou bien par celle (1) du même art., si les angles α, β sont plus grands que 3 grades.

Supposons qu'un angle observé ait pour valeur $C = 56^g,9652$, et qu'il soit compris entre deux objets dont les distances zénithales soient

$$\delta = 98^g,2530$$
$$\delta' = 99\ ,0525$$

on aura
$$\delta + \delta' = 177\ ,3055$$
$$\delta - \delta' = 0\ ,7995$$

par suite

$$200^g - (\delta + \delta') = 2,6944'' = p, \quad (\delta - \delta') = 0,7994'' = q.$$

1[er] terme positif.	2[e] terme négatif.
$\log \frac{1}{4} \sin 1 = 3,59406$	$\log \frac{1}{4} \sin 1'' = 3,59406$
$2 \log p = 8,86092$	$2 \log q = 7,80552$
$\log \tan \frac{1}{2} C = 9,68111$	$\log \cot \frac{1}{2} C = 0,31889$
$+ 2,13609 = 136'',83$	$- 1,71847 = 52'',30;$
$- 52\ ,30$	

réduction. . . . . + 84 ,53
angle de position. . . . $56^g,9652$,00
angle réduit à l'horizon, $56^g,9736$,53 (*).

Le calcul de cette réduction s'effectue aussi au moyen des tables I et II, qui se trouvent à la fin de cet ouvrage, et qui sont indépendantes des logarithmes. La première a pour *argument* l'angle observé, c'est-à-dire le nombre qui sert pour entrer dans cette table, et vis-à-vis du-

(*) Il est évident que si l'on s'était servi d'un cercle divisé en 360 degrés, et que les valeurs de p et q fussent exprimées en secondes sexagésimales, il suffirait de remplacer, dans les deux termes ci-dessus, le log constant 3,59406 par $\log \frac{1}{4} \sin 1'' = 4,08351$.

quel on trouve un des facteurs des termes de la réduction. La seconde table a pour argument $200^g - (\delta + \delta')$ ou $\delta - \delta'$, et donne les autres facteurs des termes dont il s'agit.

Par exemple, avec l'angle observé qu'on vient de réduire, les colonnes de la table I, intitulées tangentes et cotangentes, donnent, en termes concrets,

$$+ 30'',54, \qquad - 132'',71;$$

et avec les angles $200^g - (\delta + \delta')$ et $\delta - \delta'$ la table II donne les deux autres facteurs en nombres abstraits, savoir :

$$4,48, \qquad 0,394;$$

multipliant respectivement par ceux-ci les deux précédents et opérant par la règle abrégée, qui est très-connue, les deux termes de la réduction seront

$$+ 136'',82, \qquad - 52'',29;$$

réunissant ces deux produits, qui sont toujours de signes contraires, on aura enfin, comme ci-dessus, pour la réduction totale, $+ 84'',53$.

Des tables toutes semblables, calculées dans le système sexagésimal, ont été données pour la première fois par Delambre, qui les a reproduites dans la *Base du Système métrique décimal :* quand on voudra en faire usage, et qu'on aura observé un angle avec un cercle divisé en grades, on réduira cet angle en degrés, ainsi qu'il suit :

Soit proposé de convertir en degrés sexagésimaux l'angle de.	$101^g,66950$
on retranche le dixième.	$10,166950$
on a pour reste en degrés et décimales.	$91^\circ,502550$
multipliant la fraction par 60, on obtient.	$91\ 30',153$
multipliant encore la fraction décimale par 60, il vient enfin en degrés, minutes, etc.	$91^\circ 30' 9'',18.$

S'il s'agissait de résoudre le problème inverse, on s'y prendrait de la manière suivante. Pour convertir en grades, par exemple, l'angle de $91^\circ 30' 9'',18$, on réduit les secondes en fractions décimales de mi-

nutes, en divisant 9",18 par 60, et il vient. . . . . . . 91°30',153
on réduit les minutes en fractions décimales de degrés,
en divisant de même par 60, et l'on trouve. . . . . 91°,50255
on ajoute le neuvième. . . . . 10 ,16695

et l'on a en grades. . . . . 101^g,66950

Ces deux règles sont évidemment fondées sur ce que le grade est au degré dans le rapport de 10 à 9. Les *Tables trigonométriques décimales* de Borda sont terminées par une table de conversion de ce genre, qui n'exige que de simples additions.

Lorsque les distances zénithales doivent être employées, comme dans l'exemple précédent, pour réduire les angles à l'horizon, il est nécessaire qu'elles soient observées avant, ou immédiatement après ces derniers, afin qu'elles se rapportent autant que possible aux mêmes circonstances atmosphériques, quoiqu'une erreur de plusieurs secondes soit à cet égard de peu d'importance.

On conçoit aisément que lorsque les trois angles d'un triangle sont réduits à l'horizon, ils représentent ceux d'un triangle sphérique dont les côtés sont compris entre les verticales des trois signaux observés, si toutefois les observations ont été faites dans l'axe même de ces signaux; autrement il faudrait réduire les angles horizontaux aux centres des stations, afin qu'ils jouissent de cette propriété; c'est ce que nous enseignerons bientôt.

Réduction des angles horizontaux aux angles des cordes.

130. Il est peu de praticiens qui, à l'exemple de Delambre, réduisent les triangles sphériques aux triangles rectilignes formés par les trois cordes, pour déterminer, par le moyen de ceux-ci, les distances respectives des objets. Cette méthode, qui a tout le degré d'exactitude que l'on peut désirer, mais qui est trop longue, exige que l'on réduise d'abord les angles horizontaux aux angles des cordes, et que l'on substitue ensuite à la *ligne géodésique*, prise pour base, la distance rectiligne qui joint ses extrémités (art. **108**). De ces deux problèmes, le premier est le seul qui nous intéresse pour le moment, et se trouve résolu à l'art. **64**: car soit le triangle sphérique ABC (*fig.* 20) qu'il faille

réduire au triangle rectiligne A′B′C′; si a, b, c sont les côtés du premier, opposés aux angles A, B, C, et a', b', c' les côtés du second, opposés aux angles A′, B′, C′; que du point C, comme centre, on décrive avec un rayon $= 1$, les arcs $z'\alpha'$, $z'\beta'$, $\alpha'\beta'$, et qu'on mène aux arcs b, a les tangentes ou les horizontales CT, CT′; l'angle de dépression T′CB, formé par une corde et une tangente, aura pour mesure $\frac{1}{2}a$, ou la moitié de l'arc connu AC. De même l'angle de dépression TCA sera $= \frac{1}{2}b$.

Cela posé, l'arc $z'\beta' = 100^g - \frac{1}{2}a$, l'arc $z'\alpha' = 100^g - \frac{1}{2}b$, et l'angle horizontal TCT′ est donné; ainsi dans le triangle sphérique $z'\alpha'\beta'$, on connaîtra deux côtés et l'angle compris: reste donc à trouver le troisième côté $\alpha'\beta'$, ou l'angle C′ qui est l'angle horizontal réduit à l'angle des cordes. Mais sans faire usage de la formule de l'art. **64**, laquelle serait d'ailleurs peu propre à donner l'angle cherché avec précision, vu la petitesse de a et de b, il est clair que la question à résoudre est précisément l'inverse de la précédente. Si donc on dénote par ω la réduction cherchée, et par C l'angle horizontal connu, on aura (art. **96**), et à cause de $-\alpha = \frac{a}{2}$, $-\beta = \frac{b}{2}$,

$$\omega = -\tfrac{1}{4}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C \sin 1'' + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \cot \tfrac{1}{2} C \sin 1'',$$

formule dans laquelle a et b sont toujours de même signe. Pour en faire l'application, il faut commencer par calculer approximativement les côtés des triangles considérés comme rectilignes, en supposant que les observations ont été faites aux centres des signaux, ensuite convertir les côtés a et b en minutes centésimales.

Si, pour se conformer aux notations ultérieures, on désigne a par K, et b par K′, et qu'on représente par G la longueur du grade moyen pour le lieu où l'on opère; ces arcs seront convertis en minutes centésimales, par ces formules

$$\varphi = \frac{100'.K}{G}, \quad \varphi' = \frac{100'.K'}{G}.$$

Mais cette conversion, pour l'objet qu'on se propose, sera suffisam-

ment exacte en supposant la Terre sphérique, et par conséquent G de 100 000 mètres; donc alors

$$\varphi = \frac{K}{1000}, \quad \varphi' = \frac{K'}{1000}.$$

Supposons, par exemple,

$$K = 24110^{m},$$
$$K' = 25930^{m},$$

et l'angle observé réduit à l'horizon, ou

$$C = 68^{g},03346;$$

on aura

$$\varphi = 24',11, \quad \varphi' = 25',93;$$

et par suite

$$\frac{\varphi}{2} \text{ ou } P = 12',05$$
$$\frac{\varphi'}{2} \text{ ou } P' = 12,96$$
$$P + P' = 25,01$$
$$P - P' = 0,91.$$

Maintenant avec les nombres $P + P'$, $P - P'$, on trouvera dans la table II, les facteurs. 0,039 0,000
avec l'angle horizontal $68^{g},03$. . . on trouvera dans la table I et aux colonnes intitulées *tang, cot,*. . . . . — 37",68 + 107",65;
multipliant ces quantités par ordre, on aura, pour le premier et le deuxième terme de la réduction. . . . . — 1",47 + 0",00.
Or, l'angle horizontal. . . . . C = $68^{g},0334,60$
donc, l'angle réduit au plan des cordes,
ou. . . . . C' = $68^{g},0333,13$.

Delambre a employé cette méthode dans le calcul des triangles de

la méridienne. Nous reviendrons sur ce sujet; cependant nous ferons observer, pour le moment, que l'évaluation des arcs en minutes se ferait avec plus de précision, si l'on connaissait leur véritable rayon de courbure; mais, dans l'ignorance où l'on est à cet égard, il convient de prendre le degré de la sphère dont la surface s'écarte peu de celle de la Terre, dans le lieu de l'observation. Or on verra, par la suite, que le degré moyen considéré comme la 360e partie de la circonférence entière, est à peu près, en France, de 57015t $= \mathrm{D}$; en sorte que le rayon de la Terre exprimé en même mesure, ou $\rho = \frac{180^\circ \mathrm{D}}{\pi}$; $\pi = 3,141592$ étant le rapport de la demi-circonférence au rayon. Il est clair que l'on a aussi $\rho = \frac{\mathrm{D}}{\text{arc } 1^\circ}$, puisque les arcs semblables sont proportionnels à leurs rayons.

Partant,

log rayon en toises $=$	6,5141117
ajoutant le logarithme constant.	0,2898200
on a log rayon en mètres $=$	6,8039317;

résultat qui diffère peu de celui-ci 6,8038801, que l'on trouve en considérant le quart du méridien sphérique de 10 millions de mètres.

Réduction d'un angle pris dans un plan à un autre plan incliné à l'horizon.

131. Le centre de l'instrument et le point de mire n'étant pas ordinairement les mêmes dans chaque station, c'est ce qui est, en partie, cause que les trois angles d'un triangle rectiligne diffèrent de deux angles droits. Si donc l'on ramenait au plan des trois centres des stations les angles observés entre les sommets des signaux, ces angles ainsi corrigés serviraient à faire juger du degré d'exactitude des observations; mais la réduction dont il s'agit pourrait aussi faire connaître l'effet de la réfraction terrestre sur les angles observés.

Soient deux signaux AA', BB' (*fig.* 19) observés du signal *z*C. Si C, *a'*, *b'* sont les centres des stations, et que l'on ait relevé l'angle

ACB $= c$; l'angle $a'\mathrm{C}b'$ sera dans le plan des stations, et l'excès de l'angle horizontal sur l'angle observé sera, d'après l'art. 96,

$$x = p^2 \tang \tfrac{1}{2}c - q^2 \cot \tfrac{1}{2}c. \qquad (1)$$

L'angle $a'\mathrm{C}b'$ étant très-peu différent de ACB, on aura de même

$$x' = p'^2 \tang \tfrac{1}{2}c - q'^2 \cot \tfrac{1}{2}c, \qquad (2)$$

x' désignant aussi l'excès de l'angle horizontal sur l'angle $a'\mathrm{C}b'$.

Maintenant il est évident que puisque $\mathrm{ACB} + x = a'\mathrm{C}b' + x'$, on a

$$a'\mathrm{C}b' - \mathrm{ACB} = x - x';$$

ainsi, les équations (1) et (2) étant soustraites l'une de l'autre, il viendra, pour l'expression de la différence cherchée,

$$x - x' = (p^2 - p'^2) \tang \tfrac{1}{2}c - (q^2 - q'^2) \cot \tfrac{1}{2}c. \qquad (3)$$

Mais si les angles sous lesquels on voit du point C les hauteurs $\mathrm{A}a'$, $\mathrm{B}b'$ sont représentés par $\delta\mathrm{H}$, $\delta\mathrm{H}'$, les hauteurs angulaires des points de mire A et B au-dessus de l'horizon étant toujours désignées par H, H', on aura, par rapport aux hauteurs des points de station a', b',

$$p' = \tfrac{1}{2}(\mathrm{H} + \mathrm{H}') - \tfrac{1}{2}(\delta\mathrm{H} + \delta\mathrm{H}'), \text{ et } q' = \tfrac{1}{2}(\mathrm{H} - \mathrm{H}') - \tfrac{1}{2}(\delta\mathrm{H} - \delta\mathrm{H}').$$

D'ailleurs

$$p = \tfrac{1}{2}(\mathrm{H} + \mathrm{H}'), \quad q = \tfrac{1}{2}(\mathrm{H} - \mathrm{H}');$$

et si l'on fait attention que

$$p^2 - p'^2 = (p + p')(p - p'), \quad q^2 - q'^2 = (q + q')(q - q');$$

l'équation (3) deviendra, en réduisant en secondes,

$$\begin{aligned} x - x' = {} & \tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta\mathrm{H} + \delta\mathrm{H}'}{\mathrm{R}''}\right)\left[\mathrm{H} + \mathrm{H}' - \tfrac{1}{2}(\delta\mathrm{H} + \delta\mathrm{H}')\right] \tang \tfrac{1}{2}c, \\ & - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta\mathrm{H} - \delta\mathrm{H}'}{\mathrm{R}''}\right)\left[\mathrm{H} - \mathrm{H}' - \tfrac{1}{2}(\delta\mathrm{H} - \delta\mathrm{H}')\right] \cot \tfrac{1}{2}c. \end{aligned}$$

Cette formule, comme nous l'avons déjà dit, peut servir à évaluer l'effet de la réfraction sur l'angle observé, et cela en y mettant pour $\delta\mathrm{H}$ et $\delta\mathrm{H}'$ la valeur de cette réfraction déterminée *à priori* par une méthode que nous exposerons au chap. xx de ce livre; mais nous ne donnerons aucun exemple numérique à ce sujet, parce que les besoins de la Géodésie ne le réclament nullement.

CHAPITRE VI.

DE LA RÉDUCTION DES ANGLES AU CENTRE DE LA STATION.

Centres visibles et accessibles.

132. Toutes les fois que l'on observe au centre même de la station, on a immédiatement les angles sous lesquels on voit de ce point les distances qui joignent les extrémités des signaux; mais il arrive souvent que l'instrument ne peut être placé que hors de l'axe du signal pris pour centre de la station : dans ce cas, il est nécessaire d'y réduire les angles observés.

Soit C (*fig.* 21) le centre de la station, et O celui de l'instrument, ou le sommet de l'angle observé AOB. On demande la mesure de l'angle ACB qui est la réduction du premier.

Faisons les données

$$AOB = O, \quad BOC = y, \quad CO = r, \quad BC = G, \quad AC = D,$$

et l'angle inconnu $ACB = C$.

Puisque l'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux intérieurs opposés, on a, par rapport au triangle IAO,

$$AIB = O + IAO,$$

et par rapport au triangle BIC,

$$AIB = C + CBO.$$

Égalant ces deux valeurs, on obtient

$$C = O + IAO - CBO.$$

D'un autre côté l'on a

$$\sin CAO = \frac{r\sin(O+y)}{D}, \quad \sin CBO = \frac{r\sin y}{G};$$

mais les angles CAO, CBO étant toujours fort petits, leurs arcs peuvent être pris pour leurs sinus; donc la réduction en secondes est

$$C - O = \frac{r\sin(O+y)}{D\sin 1''} - \frac{r\sin y}{G\sin 1''}. \qquad (1)$$

L'usage de cette formule très-simple ne peut, dans aucun cas, être embarrassant, pourvu que l'on ait égard aux signes de sin $(O+y)$ et de sin y; ainsi le premier terme de la correction sera positif si l'angle $O+y$ est compris entre 0 et 200^g, et il deviendra négatif s'il surpasse 200^g; le contraire aura lieu dans les mêmes circonstances, pour le second terme qui dépend de l'*angle de direction* y.

Il est remarquable que D est la distance de l'objet à droite, et G la distance de l'objet à gauche. Quant à l'angle y, c'est toujours celui sous lequel paraissent le centre de la station et l'objet à gauche; ainsi, quand on a mesuré l'angle de *position* AOB, la lunette supérieure est dirigée sur l'objet à gauche B, et l'inférieure sur l'objet à droite A; alors celle-ci restant fixe sur A, si l'on fait mouvoir la lunette supérieure dans le sens de la lecture de la graduation, jusqu'à ce que son axe réponde au point C, l'arc qu'elle aura parcouru sur le limbe sera la mesure de l'angle y, qui doit toujours se compter suivant l'ordre des numéros de division de l'instrument, et dont la valeur peut aller depuis 0 jusqu'à 400^g.

Nous supposons ici que la graduation est numérotée de gauche à droite; mais si elle l'était de droite à gauche, comme sur les cercles allemands et quelques théodolites de Gambey, il faudrait changer D en G, et réciproquement, dans la formule (1); parce qu'alors y serait l'angle entre l'objet de droite et le centre de la station, mesuré comme il vient d'être dit. On pourrait aussi, sans opérer ce changement,

prendre encore pour y l'angle compris entre le centre de la station et l'objet de gauche, en laissant libre le limbe pour amener la lunette supérieure sur le centre, puis arrêtant le limbe en ce point et détachant la même lunette pour la diriger sur l'objet de gauche. En effet, l'arc parcouru par la lunette suivant l'ordre des numéros de division serait évidemment la mesure de l'angle de direction. De cette manière la formule (1) est générale: elle se réduit à un seul terme, lorsque l'une des distances D, G est comme infiniment grande par rapport à r; ainsi, selon que A ou B sera le centre d'un astre, on aura simplement

$$C - O = -\frac{r \sin y}{G \sin 1''}, \quad \text{ou} \quad C - O = \frac{r \sin (O + y)}{D \sin 1''}.$$

De plus, on aurait $C - O = 0$, si A et B étaient deux objets célestes, ou bien si A étant un astre et B un objet terrestre, le centre O du lieu de l'observation était en même temps dans la direction G, *et vice versâ*, auquel cas $y = 0$, ou $y = -O$.

Mais sans supposer infinie aucune distance D, G, on peut encore avoir $C - O = 0$; alors

$$\frac{\sin y}{\sin (O + y)} = \frac{G}{D}:$$

et comme dans le triangle ABC, on a

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin A}{\sin (A + C)} = \frac{G}{D};$$

il s'ensuit que

$$\frac{\sin y}{\sin (C + y)} = \frac{\sin A}{\sin (A + C)}.$$

Maintenant développant les dénominateurs, il vient

$$\frac{\sin y}{\sin C \cos y + \cos C \sin y} = \frac{\sin A}{\sin A \cos C + \cos A \sin C},$$

ou bien

$$\frac{1}{\sin C \cot y + \cos C} = \frac{1}{\cos C + \cot A \sin C};$$

donc

$$\operatorname{tang} y = \operatorname{tang} A = \operatorname{tang} (200^g + A);$$

ce qui signifie que les quatre points A, B, C, O sont sur une même circonférence de cercle.

Il suit de là que pour que l'angle réduit soit égal à l'angle observé, il suffit de se placer de manière à ce que $y = A$ ou $= 200^g + A$, c'est-à-dire sur la circonférence du cercle circonscrit au triangle ABC. Pour éviter tout tâtonnement à cet égard, Delambre observe et démontre (page 24, *Déterm. d'un arc du mérid.*) que l'on peut se placer sur la tangente au cercle ABC, menée par le point C et le plus près de ce point qu'il sera possible, et même à plusieurs mètres sans inconvénient; mais pour cela, il faut connaître l'un des angles A, B, afin de pouvoir déterminer la direction de la tangente.

133. Si plusieurs angles consécutifs O, O', O'', O''' étaient situés dans un même plan, oblique à l'horizon, si l'on veut, on les réduirait tous au centre C, à l'aide d'un seul angle de direction y et de la distance au centre r: alors, par rapport à l'angle O', l'angle de direction serait

$$y' = y + O;$$

par rapport à O'',

$$y'' = y' + O' = y + O;$$

par rapport à O''',

$$y''' = y'' + O'' = y + O + O' + O''.$$

L'angle O''' étant censé achever le tour de l'horizon, la réduction qui lui convient doit être égale à la somme de toutes les autres réductions prises avec un signe contraire. Pour le prouver, soient $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$ les réductions correspondantes des angles O, O', O'', O'''; on aura

$$C = O + \varepsilon, \quad C' = O' + \varepsilon', \quad C'' = O'' + \varepsilon'', \quad C''' = O''' + \varepsilon''',$$

d'où

$$C + C' + C'' + C''' = O + O' + O'' + O''' + (\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''').$$

Or, par hypothèse, les angles C, C',..., aussi bien que les angles O, O',..., font un tour d'horizon; donc l'équation précédente ne peut subsister, à moins qu'on n'ait

$$\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' = 0;$$

donc

$$\varepsilon''' = -(\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'').$$

Enfin, quand même les plans des angles O′, O″,... seraient différemment inclinés à l'horizon, les éléments y et r pourront seuls être employés, pourvu que l'angle O soit horizontal; mais avant de faire usage de la méthode actuelle, il faudra réduire à l'horizon les angles O′, O″,... Au surplus, quand les objets sont fort près de l'horizon de l'observateur, ainsi qu'il arrive toujours dans les triangulations du premier ordre, il est indifférent de réduire d'abord à l'horizon l'angle observé, ou de le réduire au centre de la station pour le ramener ensuite au plan horizontal.

154. Nous avons déjà indiqué la manière d'obtenir l'angle de direction; cependant il est utile ici de faire connaître plus particulièrement le procédé que l'on suit dans cette circonstance. On détache la lunette supérieure pour la diriger sur le centre de la station, en fixant deux points marqués sur le haut du tube, l'un près de l'oculaire, l'autre près de l'objectif; mais la vis du réticule et celle de la petite pièce cylindrique qui entraîne le verre objectif, ont ordinairement assez de saillie au-dessus du tube, pour servir de points de mire.

Supposons, pour fixer les idées, que cette lunette, au moment du départ, marque $9751^g,2$, et qu'arrivée dans la direction du centre, après avoir marché de gauche à droite, c'est-à-dire suivant l'ordre des numéros de division du limbe, elle marque. . . . . . . $10045^g,32$

Qu'au moyen d'un second mouvement donné à la même lunette, en la ramenant sur le centre de la station, elle réponde à. . . . . 10045 ,28

Qu'après un troisième essai tout semblable, elle marque. 10045 ,30

Prenant le tiers de la somme de ces trois quantités, on aura. . . . . 10045 ,30

De ce nombre, retranchant celui du point de départ, 9751 ,20

la différence sera l'angle de direction y. . . . . $=294^g,10$.

Il faut bien prendre garde, à chacun de ces essais, que l'instrument ne se dérange : on s'assure qu'il a gardé sa position primitive, lorsque l'axe optique de la lunette est resté dans la direction de l'objet de droite :

s'il s'en était écarté, il faudrait l'y ramener en tournant la vis du tambour, et diriger de nouveau la lunette supérieure sur le centre de la station. Quelque attention que l'on prenne pour avoir la mesure exacte de l'angle de direction, il reste toujours à cet égard une petite incertitude, mais elle n'est d'ailleurs d'aucune conséquence. Il n'en est pas de même de la mesure de la distance du centre de l'instrument à l'axe du signal: celle-ci doit être prise avec beaucoup de soin, et l'on peut se servir à cet effet d'un cordeau que l'on dirige dans le sens de la lunette supérieure dont l'axe répond au centre de la station.

135. Nous ferons remarquer en outre que si la lunette supérieure était excentrique, il faudrait, à la rigueur, faire une correction à l'angle de direction observé; mais les cercles actuels en dispensent.

Passons maintenant au calcul de la réduction au centre, et pour cela donnons à l'équation (1) la forme

$$\varepsilon = \frac{r}{\sin 1''}\left[\frac{\sin(O+y)}{D} - \frac{\sin y}{G}\right],$$

en faisant $\varepsilon = C - O$.

Soit l'angle de position	$O = 48^g,756$,	
l'angle de direction	$y = 294,1$,	
la distance au centre	$r = 3^m,257$,	
la distance à l'objet de droite	$D = 17528^m$,	$\log D = 4,24373$,
celle à l'objet de gauche	$G = 20345$,	$\log G = 4,30846$.

1er terme de la correction.			2e terme.
c. log sin 1". . .	5,80388		
log r.	0,51282		
	+ 6,31670		− 6,31670
log sin (O + y)	− 9,89310	log sin y. . . .	− 9,99807
c. log D.	5,75627	c. log G.	5,69154
− 92",483	− 1,96607	+ 101",465	+ 2,00631

première partie.		− 92 ,483
réduction.	ε =	+ 8 ,982
angle observé.	O =	48^g,7560 ,
angle réduit au centre.	C =	48 ,7568 ,982

Ce calcul suppose que les distances à l'objet de droite et à celui de gauche sont connues, du moins par approximation. Ces distances peuvent se prendre sur le canevas trigonométrique dressé d'après une échelle, et sur lequel les angles construits à l'aide d'un rapporteur représentent ceux de position; ce qui est suffisamment exact. Mais on évite cette construction préliminaire en résolvant tous les triangles supposés rectilignes, comme si les observations avaient été faites aux sommets mêmes, après avoir toutefois réduit à 200^g la somme des trois angles de chaque triangle (art. **100**). Ce calcul, dans lequel on peut n'employer que les logarithmes à cinq décimales, s'effectue avec beaucoup de promptitude (*voyez* la résolution des triangles, art. **150**).

La réduction au centre s'obtient aussi à l'aide d'un seul terme; en effet, la formule précédente pouvant s'écrire ainsi

$$C - O = \frac{r.G.\sin(O+y) - r.D\sin y}{D.G},$$

et le triangle ABC (*fig.* 21) donnant

$$G = \frac{D.\sin A}{\sin(A+C)},$$

on a, à cause de $O = C$, du moins à peu de chose près,

$$G = \frac{D.\sin A}{\sin(A+O)},$$

et par suite

$$C - O \text{ ou } \varepsilon = \frac{r\sin A.\sin(O+y) - r\sin y\sin(A+O)}{D.\sin A};$$

puis développant et réduisant en secondes,

$$\varepsilon = \frac{r\sin O.\sin(A-y)}{D.\sin A.\sin 1''}.$$

Quoique cette formule soit moins rigoureuse que celle dont elle dérive, elle est cependant d'une exactitude suffisante. Il faut bien re-

marquer que le sommet de l'angle A est l'objet de droite. Il est bien rare qu'on se trouve dans la nécessité d'en faire usage.

Centres invisibles des tours à bases circulaires.

136. Lorsqu'on observe au dehors ou au dedans des clochers, des tours, etc., leurs centres sont souvent invisibles ou inaccessibles. Voici les moyens les plus simples pour lever cet obstacle.

Si l'on est placé en O, extérieurement à la tour circulaire TzT′ (*fig.* 22), on mènera les tangentes OT, OT′, sur lesquelles on prendra deux distances égales et arbitraires Ox, Ox', de manière cependant que la ligne xx' soit le plus près possible de la tour dont C est le centre : on fera $xm = x'm$, et Om sera évidemment dans la direction de ce centre. On mesurera alors l'angle $COB = y$, et à la distance Oz on ajoutera le rayon Cz pour avoir $CO = r$.

S'il était impossible de mesurer le rayon ou la circonférence du cercle TzT′, on mesurerait l'une des tangentes OT, par exemple, et l'on aurait

$$Oz = \frac{\overline{OT}^2}{Oz},$$

puisque toute tangente au cercle est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure. Le reste de l'opération n'a maintenant aucune difficulté.

Il est à propos de remarquer que l'on a plus simplement l'angle y ou $COB = \frac{TOB + T'OB}{2}$; ainsi, l'on fera coïncider d'abord l'axe de la lunette supérieure avec la tangente OT, ensuite avec la tangente OT′, et l'on tiendra compte, chaque fois, du nombre de degrés marqué par cette lunette, qui doit toujours marcher dans le sens de la graduation : on opérera ensuite comme dans l'art. **134**, pour trouver chacun des angles TOB, T′OB, dont la demi-somme $= y$.

Lorsque l'on sera placé dans l'intérieur d'une tour circulaire, on fera en sorte que le centre de l'instrument soit sur le milieu de la corde qui passe par ce point ; et la perpendiculaire à cette corde sera la direc-

tion du centre de la tour. Tous ces procédés sont si simples, qu'il est inutile d'insister sur leur développement.

Centres invisibles des tours à bases polygonales.

137. Si l'on était en dehors de la tour rectangulaire DD' (*fig.* 23), en O par exemple, et que de ce point l'on pût voir les extrémités de l'une des diagonales DD', *dd'*, on aurait l'angle de direction COB $= y$ par la méthode suivante :

On mènera une droite parallèle à DD', en partageant en parties proportionnelles les côtés OD, OD' du triangle ODD', et le milieu de cette parallèle sera sur la direction OC.

Autrement, on mesurera exactement la droite O*p* perpendiculaire à *d*D', ainsi que la partie *pm* comprise entre O*p* et la perpendiculaire C*m* imaginée abaissée du centre de la tour sur le côté *d'*D. Comme C*m* est censé connu, on aura *mq* par la proportion

$$Cm + Op : pm :: Cm : mq.$$

Ainsi la droite O*q*, dont la direction est maintenant déterminée, passera nécessairement par le centre C; on mesurera donc O*q*, et l'on aura

$$qC = \sqrt{\overline{Cm}^2 + \overline{mq}^2},$$

et enfin

$$r = Oq + qC.$$

Ainsi, les deux éléments de la réduction de l'angle observé en O seront connus.

Il est visible que ce dernier procédé est général pour tous les polygones réguliers, soit que l'on soit placé dans l'intérieur, soit que l'on se trouve au dehors : toute la difficulté consiste, lorsque le centre est inaccessible, à déterminer l'apothème C*m* du polygone qui l'entoure, et c'est ce que la Géométrie enseigne (*voyez* aussi sur ce sujet le Mémoire de Delambre sur la *détermination d'un arc du méridien*).

Cependant s'il arrivait que l'on ne pût mener la perpendiculaire O*p*, on tirerait la droite O*m*, et l'on élèverait à D*p* une perpendiculaire vers le milieu de *pm*. La partie de cette perpendiculaire comprise dans le triangle CO*m* sera facile à déterminer par la théorie des lignes proportionnelles; on aura donc la direction du rayon OC, et ce moyen est aussi général que le précédent.

Il est évident que tout ce qui vient d'être dit relativement aux tours rondes ou polygonales, s'applique mot pour mot aux poutres verticales qui peuvent embarrasser le centre de la station.

Les signaux temporaires, contruits comme on l'a dit à l'art. **112**, dispensent de cette réduction, qui est presque toujours une source d'erreurs, quand les éléments n'en sont pas bien connus.

CHAPITRE VII.

DE LA RÉDUCTION AU CENTRE DU SIGNAL OBSERVÉ, OU DE LA PHASE DES SIGNAUX.

138. Lorsque les signaux sont éclairés obliquement par rapport à l'observateur, et qu'ils ne se terminent pas en pointe, les angles observés ont besoin d'une correction; parce que si le signal *abcd* (*fig.* 24) a pour base un rectangle, par exemple, et que *ab*, dont la position est connue par rapport aux stations environnantes, en soit la face éclairée, le rayon visuel OA, dirigé exactement sur le milieu de cette face, ne passera pas par le centre M du signal, si *ab* n'est pas perpendiculaire à AO, et la correction additive ou soustractive sera égale à l'angle AOM.

Or

$$\sin \text{AOM} = \frac{\text{AM} \sin \text{AMO}}{\text{AO}};$$

et le triangle obliquangle AOM donnant

$$\text{AO} = \frac{\text{OM} \sin \text{AMO}}{\sin(\text{AMO} + \text{AOM})},$$

on a, en substituant et développant,

$$\tang \text{AOM} = \frac{\frac{\text{AM}}{\text{OM}} \sin \text{AMO}}{1 - \frac{\text{AM}}{\text{OM}} \cos \text{AMO}} = \tang x;$$

puis réduisant en série (art. **93**), il vient

$$x = \left(\frac{\text{AM}}{\text{OM}}\right) \frac{\sin \text{AMO}}{\sin 1''} + \left(\frac{\text{AM}}{\text{OM}}\right)^2 \frac{\sin 2(\text{AMO})}{\sin 2''} + \text{etc.},$$

ou simplement

$$x = \left(\frac{\text{AM}}{\text{OM}}\right) \frac{\sin \text{AMO}}{\sin 1''},$$

ce qui est toujours suffisant.

Des deux angles BOA, B'OA observés, l'un doit être augmenté de x, l'autre doit en être diminué; cela est évident.

On voit bien à quoi serait égal l'angle A'OM, si l'on avait observé la face *bd*.

Pour plus d'exactitude, il faudrait en outre dégager l'angle AOM d'une très-petite correction due à une illusion d'optique qui résulte de ce que le rayon visuel dirigé du point O sur le milieu apparent de la face *ab*, ne répond pas toujours exactement à son vrai milieu, ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre; mais cette correction peut toujours se négliger, parce qu'elle tombe au-dessous de l'erreur de l'observation, surtout quand les côtés des triangles sont fort grands.

139. Quand le signal est une tour ronde d'un grand diamètre, et que le centre est de même invisible, la correction est un peu plus longue à calculer, parce qu'il faut avoir recours à l'observation du Soleil.

Soit, dans cette circonstance, CS (*fig.* 25) le vertical du Soleil au moment de l'observation, c'est-à-dire l'intersection de l'horizon de la tour AMB avec le plan vertical dans lequel se trouve le centre du Soleil. MS $= z$ sera l'azimut de cet astre compté depuis midi, et le demi-cercle ASB, dont le milieu est S, sera entièrement éclairé; parce que les rayons lumineux tangents à la tour peuvent être considérés comme parallèles. Mais l'observateur en O, supposé très-éloigné du point C, et qui verrait à très-peu près la demi-circonférence DPE de la tour, si elle était assez éclairée, n'en verra au contraire de bien distincte que la partie APE dont le milieu apparent est p; puisque l'arc AD est dans l'ombre.

Cela posé, lorsque du point O l'on observe l'angle entre un signal et la tour C, on pointe dans la direction Op, au lieu de pointer dans la direction OC; on commet donc l'erreur angulaire CO$p = \theta$ qu'il s'agit d'évaluer. Or si l'on désigne par φ l'angle OCS entre le Soleil et

la station O, par D la distance OC qui diffère extrêmement peu de OA, par u l'angle AOp moitié de AOE, enfin par r le rayon AC; le triangle obliquangle AOC donnera, sans erreur sensible,

$$\sin(u - \theta) = \frac{r}{D}\sin(90^\circ - \varphi) = \frac{r}{D}\cos\varphi,$$

et le triangle rectangle COE donnera exactement

$$\sin(u + \theta) = \frac{r}{D}.$$

Soustrayant ces deux équations l'une de l'autre, après en avoir développé les premiers membres, il viendra

$$2\cos u \sin\theta = \frac{r}{D}(1 - \cos\varphi) = 2.\frac{r}{D}\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi;$$

d'où l'on tire

$$\sin\theta = \frac{r}{D}\frac{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos u}.$$

Mais l'angle u, moitié de AOE, étant très-petit, l'on peut faire $\cos u = 1$; partant

$$(1) \qquad \theta = \frac{r}{D}\frac{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\sin 1''} = \frac{r}{D\sin 1''}\sin^2\tfrac{1}{2}(x - z),$$

en désignant respectivement par x et z les azimuts de la station O et du Soleil S sur l'horizon de la tour.

Si le Soleil et l'objet auquel on compare la tour sont du même côté, la correction θ est additive; s'ils sont de différents côtés, la correction est soustractive; enfin si $x > z$, le Soleil est à droite de l'observateur: tout cela est évident.

Il ne reste plus, pour calculer la formule précédente, qu'à déterminer $x - z$ ainsi qu'il suit, lorsqu'on peut voir le Soleil de la station O.

Après avoir mis le limbe du cercle dans une situation verticale, et avoir fixé le mieux possible la lunette supérieure sur le centre du signal, on tiendra compte du nombre de degrés marqué par l'index du cercle azimutal; ensuite on fera tourner l'instrument sur sa colonne, suivant l'ordre des n[os] de division de ce cercle, pour amener la même lunette dans le vertical du Soleil. L'arc parcouru par l'index sera, dans tous les cas, le supplément à deux angles droits de l'angle $x - z$; car par ce mouvement l'index a décrit l'arc de droite ou de gauche COS', dont le supplément est PCS $= x - z$.

Si l'instrument n'a point de cercle azimutal, on le disposera horizontalement, et ensuite on dirigera sur le signal la lunette supérieure dont l'index est arrêté à zéro; on y amènera de même la lunette inférieure. L'instrument étant fixe dans cette position, on imprimera un mouvement à la lunette supérieure jusqu'à ce qu'elle soit dans le vertical du Soleil, plan qui sera indiqué par un fil à plomb placé près de l'objectif, et dont l'ombre devra se projeter sur la lunette dans le sens de son axe. L'arc parcouru sur le limbe sera l'angle COS' observé entre le Soleil et le signal, ou le supplément à deux droits de l'angle $x - z$.

A la rigueur, cet azimut, au commencement de l'observation, n'est pas le même qu'à la fin, parce que le Soleil s'approche ou s'éloigne continuellement du méridien du signal; mais pour un petit intervalle de temps, le mouvement de cet astre peut être considéré comme uniforme. Donc, si l'on prend un milieu entre les deux azimuts dont nous venons de parler, on aura l'azimut pour le milieu de l'observation, et c'est celui qu'il faut employer pour plus d'exactitude.

Supposons l'azimut COS' pris avant l'observation. . . .	=	$175^g,35$
et pris aussitôt après.	=	175 ,65
l'azimut pour le milieu de l'observation sera.	=	175 ,50
dont le supplément à deux droits.		200
sera la valeur de l'angle $x - z$.	=	24 ,50

Maintenant si, dans la formule (1), on a

$$r = 4^m,75, \text{ et } D = 18432^m,$$

on en obtiendra le résultat ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned}
\log R''. \; . \; . &= 5.80388 \\
\log r.. \; . \; . &= 0.67669 \\
\log . \sin \tfrac{1}{2}(x - z). \; . \; . &= 9.28157 \\
\textit{Idem}. \; . \; . &= 9.28157 \\
c. \log D. \; . \; . &= 5.73443 \\
\hline
\log \theta. \; . \; . &= 0.77814 = 6''.
\end{aligned}$$

La correction θ à faire à l'angle observé est donc $\pm 6''$; et le choix du signe est certain, d'après ce qui a été dit précédemment.

140. Ce sont surtout les phases des signaux, auxquelles personne avant Delambre n'a eu égard, qui produisent de grandes discordances dans les séries relatives à un même angle. Un Mémoire manuscrit que voulut bien me communiquer cet illustre astronome, et qui avait pour titre : *Réflexions sur les différentes espèces de signaux,* confirmait cette remarque, et faisait mention de toutes les différences entre l'angle plus grand et l'angle plus petit parmi ceux obtenus entre deux objets, dans l'opération de la méridienne. Il est donc bien important de faire un bon choix de signaux, et d'éviter parmi les monuments existants ceux qui, comme le belvéder de Cullan, auquel est dû le grand écart de 18″,86 (*Base du Système métrique,* t. I, p. 221), ont la forme d'une pyramide octogone écrasée ; car si, à une grande distance, les sommets de ces pyramides deviennent invisibles, le calcul des phases est nécessairement incertain, parce qu'on ignore à quelle hauteur on a visé. Un autre écart de 14″,98 se trouve p. 322, entre deux séries, l'une du matin, l'autre du soir, où les signaux étaient éclairés en sens contraires. « Méchain, dit Delambre, n'a publié que la moyenne entre les » deux séries, et cette moyenne est confirmée par une autre série ob- » servée dans l'ombre. Ces observations prouvent l'effet considérable » des phases ; elles prouvent en même temps qu'on peut les éluder » et les anéantir. » Néanmoins les signaux de réverbères paraissent à cet égard mériter la préférence, quoique ceux qui en ont fait usage aient trouvé des écarts de plus de 4″ ; aussi M. Laplace avait-il désiré

qu'on les employât pour la mesure de la grande perpendiculaire de Strasbourg à Brest, ainsi que nous l'avons déjà annoncé (art. **112**). Quant à nous, nous croyons qu'il est plus sûr d'établir des mires au centre même des stations choisies sur le haut des édifices, comme on l'a fait pour la triangulation primaire de la nouvelle carte de France, et qu'il vaut mieux observer de jour. Quelquefois un signal situé sur une hauteur qui borde l'horizon et qui réfléchit vivement la lumière du Soleil couchant s'observe de très-loin, même quand l'atmosphère n'est pas très-transparente. Par exemple, des disques réflecteurs construits d'après les idées de M. Gauss, et que ce célèbre géomètre appelle *héliotropes*, ont été employés avec succès par M. le général Schubert dans les opérations géodésiques qu'il a faites en Russie en 1823, et sans lesquels il lui aurait souvent été impossible d'apercevoir ses signaux.

CHAPITRE VIII.

DE LA MESURE DES BASES, DES MOYENS D'EN RAMENER LES LONGUEURS A UNE TEMPÉRATURE UNIQUE, ET DE LES RÉDUIRE AU NIVEAU DE LA MER.

141. La mesure des bases est une des opérations les plus délicates et les plus importantes de la Géodésie, lorsqu'il s'agit de déterminer rigoureusement les côtés d'un réseau trigonométrique. Il est essentiel que les bases soient, sinon les plus longues possible, du moins en rapport avec les côtés des triangles auxquels elles appartiennent; qu'elles soient établies sur un terrain de niveau, ou plutôt que les lignes géodésiques qui les représentent soient situées dans des plans verticaux, et fassent par conséquent partie des grands cercles de la Terre; que leurs longueurs soient déduites d'une unité de mesure parfaitement connue et ramenée au même état de température; car on sait que les métaux, les bois, etc., passent par différents degrés de dilatation ou de contraction lorsque la température de l'atmosphère varie; enfin, il importe que ces bases soient projetées sur une surface unique, telle que celle de la mer.

Les règles qu'on emploie dans la mesure des bases sont de métal, ou de bois, et représentent un multiple de l'unité de mesure, du mètre par exemple; elles doivent être étalonnées avec la plus scrupuleuse attention, c'est-à-dire comparées à cette unité, afin d'en connaître exactement les longueurs. Lenoir, qui fut un de nos plus habiles artistes, imagina pour cet effet un instrument nommé *comparateur*, parce qu'en superposant deux règles appuyées par un de leurs bouts sur une pièce d'arrêt de cet instrument, les plus petites différences qu'elles pré-

sentent à l'autre bout sont agrandies et mesurées avec une extrême précision, sur un arc de cercle gradué. On peut en voir la description et l'usage dans le 3e volume de la *Base du Système métrique décimal*, p. 447.

Nous venons de faire observer que l'influence du calorique sur les corps se manifeste par l'augmentation ou la diminution de leurs volumes, et Borda a trouvé que par chaque degré du thermomètre centigrade, le platine se dilate de 0,00000 8565 dans chacune de ses dimensions, le fer de 0,00001156, et le cuivre jaune de 0,00001783; mais pour l'objet actuel, la dilatation linéaire des règles est la seule qu'il importe de connaître, afin de pouvoir prendre pour longueur d'une base celle qui répond à une température unique adoptée pour terme de comparaison.

Supposons, dans la vue de fixer les idées à cet égard, qu'une règle de cuivre, étalonnée à la température de 10 degrés du thermomètre centigrade, ait été trouvée précisément de même longueur que la règle de platine soumise à la même température, mais ne représentant le mètre qu'au terme de la glace fondante; supposons en outre que l'on ait mesuré avec la règle de cuivre une longueur K à la température moyenne de 18°, on saura combien cette longueur contient de mètres ainsi qu'il suit:

Désignons d'abord par *dilatation absolue* la dilatation totale et linéaire qu'une règle de métal, d'une longueur déterminée, acquiert en passant d'une température quelconque à une autre plus haute: désignons de plus, dans les mêmes circonstances, par *dilatation relative* l'accroissement de longueur évalué en parties de la règle prise pour unité, au terme de la température la plus basse.

Cela posé, si P et C sont les dilatations relatives du platine et du cuivre, pour chaque degré du thermomètre centigrade, et que x soit le degré de température auquel il faut ramener la règle de cuivre, afin que sa longueur représente réellement le mètre; on aura, en prenant pour unité de longueur chacune des règles à la température de l'étalonnage,

$$\text{mètre de platine}\ldots = 1 - 10P,$$
$$\text{mètre de cuivre}\ldots\ldots = 1 - (10 - x)\,C;$$

égalant ces deux valeurs, on tire

$$x = \frac{10(C - P)}{C}.$$

Or en supposant, comme ci-dessus,

$$C = 0{,}00001783, \quad \text{et} \quad P = 0{,}000008565,$$

on obtiendra

$$x = 5^\circ{,}2 \text{ centigrades}:$$

c'est la température que doit avoir la règle de cuivre pour représenter le mètre.

Mais la base K ayant été mesurée à la température moyenne de 18°, et trouvée par conséquent trop courte, il faut, pour l'exprimer en mètres, la diviser par la longueur de la règle de cuivre ramenée à la température de 5°,2, ou, ce qui est de même, tenir compte de l'excès de température de 18° — 5°,2 = 12°,8; partant,

$$\text{longueur de la base en mètres} = \frac{K}{1 - 12{,}8C} = \frac{K}{1 - 0{,}000\,228\,390\,4}$$
$$= \frac{K}{0{,}999\,771\,609\,6}.$$

Donc, une longueur K égale à 10 000 fois la règle de cuivre vaudrait $K + 12{,}8\,CK = 10000^m + 2^m{,}2839$; d'où l'on voit que la *correction* de température étant ici de $2^m{,}2839$, il n'est pas permis de négliger cette correction, quand les bases et les distances des stations qui en dérivent doivent être mesurées avec une grande exactitude.

Remarquez qu'il est plus simple d'étalonner une règle d'un métal quelconque sur une règle de même matière, parce qu'alors il est inutile de constater le degré de température à laquelle cette opération a été faite. Si, par exemple, une barre de fer a été étalonnée sur un mètre de même métal, elle représentera la longueur réelle du mètre à la température de la glace fondante, c'est-à-dire $3^{pi}\ 11^{lig},296$ de l'ancienne toise de l'Académie, prise à 13° du thermomètre de Réaumur.

Les astronomes français qui furent chargés de la grande opération

relative à la fixation du mètre définitif employèrent, pour mesurer leurs bases, des règles de platine et de cuivre, formant, par leur superposition, des thermomètres métalliques. Ces règles ne furent point mises en contact, afin d'éviter l'émoussement de leurs extrémités et l'effet du recul; mais le petit intervalle qui les séparait fut mesuré avec une *languette* ou réglette graduée, comme on le verra bientôt.

Dans les opérations géodésiques ordinaires, on peut, sans inconvénient, mettre les règles ou les perches bout à bout; mais il est utile de mesurer deux fois, et en sens contraire, la même base, et de prendre pour vrai résultat la moyenne des deux mesures obtenues. A défaut de règles de fer, on se sert avec avantage de verges de bois de sapin trempées dans l'huile bouillante, puis recouvertes d'un vernis épais; parce que, par cette opération, elles sont très-peu sensibles aux variations hygrométriques de l'air. La *fig.* 26 représente la forme d'une de ces verges; les branches du losange ABCD et la traverse CD servent d'arcs-boutants à la règle AB, et l'empêchent par conséquent de se courber latéralement. On a au moins deux de ces verges, qu'on étalonne avec beaucoup de soin, et à chacune desquelles on donne communément 5 mètres de long. Leurs extrémités doivent être très-peu épaisses, garnies en fer et à vives arêtes, afin d'obtenir un contact parfait. Le mieux est que ces extrémités soient représentées l'une par un clou à tête ronde, l'autre par un clou à tête plate.

Avant de procéder à la mesure d'une base, on trace un alignement avec la plus grande précision possible, à l'aide de jalons ou perches bien droites garnies par le haut d'un petit carré de carton, et par le bas d'une pointe de fer, afin de pouvoir les ficher en terre. On fait disposer tous ces jalons en ligne droite ou dans un même plan vertical, au moyen d'une lunette placée à une extrémité de la base, et dirigée sur l'autre extrémité. Cette lunette doit se mouvoir dans le sens vertical, à la manière des lunettes des passages, afin de pouvoir l'élever ou l'abaisser selon que le terrain l'exige. Ensuite on place les règles sur un pont formé de plusieurs madriers calés solidement sur des trépieds ou chevalets : on les aligne avec le plus grand soin, et on les fixe sur le pont au moyen de brides, afin qu'en ôtant la première pour la placer en avant des autres, celles-ci n'éprouvent aucun dérangement. Comme il importe d'observer la température des règles, on

leur adapte des thermomètres, mais on prend la précaution de les préserver de l'action directe du soleil. Si ces règles, dont on doit soigneusement éviter la flexion, ne pouvaient être disposées horizontalement, on mesurerait leur inclinaison à l'aide d'un niveau à perpendicule gradué, comme on le voit (*fig.* 27); mai sen les mettant constamment dans une situation horizontale (ce qui, du reste, fait perdre beaucoup de temps), il est nécessaire, à cause des inégalités du terrain ou de son inclinaison, de leur faire faire des ressauts comme bc, de (*fig.* 28). Dans ce cas, on fait correspondre exactement l'extrémité postérieure de la règle cd à l'extrémité antérieure b de la règle ab: et c'est à quoi l'on parvient à l'aide d'un fil-à-plomb.

Nous terminerons nos remarques à ce sujet, parce que l'ingénieur intelligent saura suppléer à nos omissions, modifier selon les circonstances les moyens d'exécution et les procédés pratiques que nous indiquons, et donner aux divers instruments à employer dans la mesure des grandes bases, tout le degré de perfection dont ils pourraient être susceptibles.

142. La réduction des règles à l'horizon s'effectue très-facilement. En effet, soient l une longueur quelconque, θ son inclinaison, et x sa réduction à l'horizon, ou sa projection horizontale; on aura évidemment

$$x = l\cos\theta.$$

Mais comme θ, qu'il n'est pas nécessaire de connaître très-exactement, est toujours un très-petit angle, cette formule ne pourrait donner x avec assez de précision (art. **91**); il vaut mieux alors calculer le petit excès de l sur x: ainsi l'on aura, en supposant θ donné en minutes,

$$l - x = l(1 - \cos\theta) = 2l\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \tfrac{1}{2}l\theta^2\sin^2 1'.$$

Dans la pratique, on met cette formule en table, afin d'abréger considérablement les opérations numériques; et si les observations donnent le double de l'inclinaison θ, on le prend pour argument, ce qui

dispense de faire chaque fois une division, et rend le résultat plus sûr. Dans ce cas, la formule se met sous cette forme :

$$l - x = \frac{1}{8}\, l \sin^2 (2\theta).$$

Quant à la différence dn de niveau des extrémités de la longueur l, on voit bien qu'elle est égale à

$$dn = l \sin\theta = l.\theta \sin 1';$$

ainsi, la somme algébrique des dn donnera la différence de niveau des extrémités de la base. Toutefois il ne faut pas considérer cette différence comme étant rigoureusement déterminée par cette méthode; car d'une part, les inclinaisons θ ne sont pas évaluées avec assez de précision, et de l'autre, les dn sont trop peu exactes et par trop multipliées.

En insistant sur la nécessité de faire les extrémités des règles d'une très-petite épaisseur, on a pour but d'atténuer les erreurs des contacts, qui ne s'opèrent pas toujours de la même manière, à cause des diverses positions des règles à l'égard de l'horizon : éclaircissons ceci par un exemple. Supposons que ab, bc, de, fg soient quatre règles consécutives mises en contact, la première horizontale, et les trois autres inclinées, comme le représente la *fig.* 29. La longueur totale de ces quatre règles réduites à l'horizon, sera $a'b' + b'c + d'e' + f'g$, tandis que la distance horizontale $a'g$, ou la longueur réellement mesurée, sera plus grande que celle observée, de la somme des intervalles cd', $e'f'$. Or, relativement à cd', l'épaisseur de la deuxième règle est $cd = \varepsilon$; si donc θ est l'inclinaison de cette règle, on aura $cd' = \varepsilon \sin\theta$. A l'égard de la troisième règle, son épaisseur sera seulement représentée par $ef = \varepsilon'$; si donc θ' est son inclinaison, on aura $e'f' = \varepsilon' \sin\theta'$; ainsi l'erreur des contacts est

$$\varepsilon \sin\theta + \varepsilon' \sin\theta',$$

quantité qu'il faudra ajouter aux quatre longueurs des règles réduites à l'horizon, pour avoir la longueur vraiment mesurée; mais cette correction pourra être considérée comme nulle par la précaution indiquée précédemment.

143. Il est sans doute beaucoup plus commode de choisir pour base un ligne droite, ou, pour mieux dire, une ligne exactement située dans un même plan vertical; mais il est des cas où cela est impossible. Les bases de Melun et de Perpignan mesurées par Delambre, offrent en effet chacune l'exemple d'une ligne géodésique brisée, dont les extrémités étaient même à quelque distance des deux termes choisis pour centres des stations.

Soient ACB (*fig.* 30) une ligne brisée; S, V les extrémités de la véritable base, SA et VB des droites respectivement perpendiculaires aux deux arcs sphériques AC, BC mesurés, et C l'angle horizontal que forment ces deux arcs. Le triangle ABC étant réellement sphérique, il faudra, avant de calculer la distance AB pour en déduire ensuite VS, trouver l'excès sphérique de ce triangle (art. **100**), retrancher de l'angle C le tiers de cet excès, et faire usage de la méthode de l'art. **92** pour calculer la base AB et les angles CAB, CBA.

Si au contraire on adoptait le procédé de Delambre (art. **139**), on retrancherait de chacune des deux parties AC, BC de la base brisée, la quantité dont elles surpassent leurs cordes respectives, ainsi que nous allons le faire voir; on réduirait à ces cordes l'angle horizontal, et l'on prendrait pour base véritable la corde qui joint les points A et B, et qui s'obtient par la résolution d'un triangle rectiligne.

En désignant par b le côté d'un triangle sphérique très-peu courbe, pour une sphère dont le rayon $= 1$, et par k la corde correspondante, on aura, par la première des séries de l'art. **91**,

$$b - 2\sin\tfrac{1}{2}b = b - k = \frac{b^3}{24}.$$

Lorsque B est la longueur d'un arc, et K celle de sa corde, pour un rayon $= \rho$, on a évidemment

$$b = \frac{B}{\rho};$$

donc

$$b - k \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \tfrac{1}{24}\frac{B^3}{\rho^3}.$$

Tel est l'excès de l'arc sur sa corde, dans la supposition que b fait

partie du rayon pris pour unité; mais cet excès sera donné en même mesure que le rayon de la Terre, en multipliant par ρ la valeur de ε, c'est-à-dire qu'alors

$$B - K \quad \text{ou} \quad \Sigma = \frac{1}{24}\frac{B^3}{\rho^2}.$$

Enfin, l'on aura Σ en secondes, à l'aide de la formule

$$\frac{1}{24} R'' \frac{B^3}{\rho^3} = \frac{1}{24}\frac{B^3}{\rho^3 \sin 1''}.$$

L'arc ou la corde AB, ainsi que les angles CAB, CBA, étant déterminés par le moyen que l'on vient d'indiquer, on résoudra les petits triangles rectangles SAa, VBb, dans lesquels on connaîtra les angles et les hypoténuses SA, VB; et il ne s'agira plus, pour obtenir SV, que de calculer son excès sur $Va' = ba$: or, dans le triangle rectangle $Sa'V$, on a $\overline{VS}^2 = \overline{Va'}^2 + \overline{Sa'}^2$, d'où

$$VS = Va'\left(1 + \frac{Sa'^2}{Va'^2}\right)^{\frac{1}{2}} = Va'\left(1 + \frac{1}{2}\frac{Sa'^2}{Va'^2}\right);$$

donc l'excès cherché, ou

$$VS - Va' = \frac{1}{2}\frac{(Sa')^2}{Va'},$$

sans erreur sensible.

144. Voici maintenant comment on réduit une base au niveau de la mer.

Soient ρ (*fig.* 31) le rayon de la Terre réputée sphérique, pour le niveau de la mer; $\rho + h$ le rayon pour le sol de la base AMB, supposé de niveau; h sera l'élévation Aa du sol au-dessus de la surface des eaux. Soient de plus B la base mesurée AMB, et b la base réduite amb.

Cela posé, puisque les arcs semblables sont entre eux comme leurs rayons, l'on aura

$$\frac{B}{b} = \frac{\rho + h}{\rho};$$

prenant la valeur de b, et ajoutant de part et d'autre $-$ B, il viendra

$$B - b = \frac{Bh}{\rho + h} = \frac{Bh}{\rho}\left(1 + \frac{h}{\rho}\right)^{-1};$$

puis développant la puissance négative par la formule du binome, on aura

$$B - b = \frac{Bh}{\rho} - B\frac{h^2}{\rho^2} + B\frac{h^3}{\rho^3} - \ldots\ldots$$

Tel est l'excès de B sur b. Nous apprendrons au chapitre des différences de niveau à déterminer h.

Tous les côtés des triangles que l'on calculera d'après la base réduite b, seront des arcs de grand cercle d'une même sphère. Si au contraire on prend pour base la corde de l'arc b, ces côtés seront les arêtes mêmes du polyèdre inscrit dans la sphère dont le rayon $= \rho$.

Comme la surface des mers s'élève et s'abaisse chaque jour par l'effet des marées, l'on est convenu de prendre pour niveau *absolu* celui qui tient le milieu entre la plus haute et la plus basse mer, lors des syzigies des équinoxes; c'est en effet, ainsi que M. Laplace l'a démontré, à très-peu près la hauteur à laquelle les eaux de l'Océan se trouveraient constamment, sans l'action de la Lune et du Soleil. On suppose alors tous les triangles d'un réseau projetés sur le prolongement de la surface d'une mer tranquille.

DESCRIPTION ET USAGE DES RÈGLES DE PLATINE QUI ONT SERVI DANS L'OPÉRATION DE LA MÉRIDIENNE DE FRANCE.

145. Les règles de platine, dont nous avons déjà parlé à l'art. **141**, sont au nombre de quatre; elles ont 12 pieds de long sur 6 lignes de largeur environ et une ligne d'épaisseur. Chacune est recouverte d'une règle de cuivre qui est de six pouces plus courte que la règle de platine; l'une et l'autre sont seulement fixées ensemble par une des extrémités, afin que la dilatation des métaux ne se manifeste que du côté de l'autre extrémité qui se trouve libre (*voyez* fig. 32). On apprécie alors à chaque moment l'effet de la température, par la quantité dont

le cuivre se dilate plus que le platine : cette quantité ou différence des deux dilatations s'estime à l'aide des divisions *ab* tracées vers l'extrémité de la règle de cuivre, sur une petite pièce de ce métal, adaptée à la règle de platine. Chaque division est $\frac{1}{20000}$ de la longueur de la règle de cuivre, et le vernier *n* donne des parties dix fois plus petites, ou des 200 millièmes de la même longueur. Les divisions se lisent aisément, au moyen des microscopes L, L'.

La languette *cd* est une petite règle de platine divisée aussi en 20 millièmes de la règle de même métal, assujettie à glisser entre deux rainures du côté du thermomètre métallique; elle sert à mesurer le petit intervalle qu'on laisse entre les règles, lorsque l'on mesure une base, et son vernier est en *n'*. Pour préserver ces règles des accidents qui pourraient survenir dans le transport, et pour les rendre même plus propres à l'usage auquel elles sont destinées, chacune est enchâssée dans une pièce de bois de sapin, de manière à être maintenue constamment en ligne droite. Sur le petit toit TT' qui couvre le tout, sont deux pointes de fer *pp'* placées aux extrémités de chaque règle, et que l'on aligne dans la direction de la base, quand on opère. Les toits des règles sont peints de couleurs différentes, pour les distinguer, et sont en outre numérotés.

Les trépieds sur lesquels on pose les règles, ont chacun à leurs angles des vis qui donnent le moyen d'élever ou d'abaisser ces règles, pour pouvoir faire usage des languettes.

L'instrument ACB (*fig.* 33) est une espèce d'équerre composée d'un arc de cercle gradué, et d'une branche de cuivre à laquelle, vers son milieu, est fixé un niveau à bulle d'air *ef*. Cet instrument se place sur chaque règle à la manière des maçons, et lorsque la verticalité de la branche est indiquée par le niveau, on écrit le nombre de degrés que marque la ligne de foi de l'extrémité de cette règle. On retourne ensuite l'instrument, et l'on remet la branche dans la situation verticale; alors l'arc qu'elle a parcouru est le double de l'inclinaison de la règle de platine.

Borda, qui est l'inventeur de ces règles, a reconnu, par des expériences très-délicates et répétées avec beaucoup de soin, que le thermomètre métallique de la règle n° 1, marque $385^{\text{part}},3$ à la température de la glace, et que l'allongement de chaque règle est de $0^{\text{part}},9245$

pour une partie des thermomètres. Cela posé, si t' est le terme moyen de toutes les observations du thermomètre métallique de la règle n° 1, faites pendant la mesure de la base,

$$(t' - 385^p,3) \times 0,9245$$

sera la correction moyenne de température relative à cette règle prise pour *module* au degré de la glace; module que nous désignerons par M.

Les mêmes expériences ont fait connaître que la règle n° 2, exposée à la même température, est plus courte que la première de 0,2, et que son thermomètre marquait alors $383^p,5$; par conséquent la correction qui convient à cette règle est

$$(t'' - 385,5) \times 0,9245 - 0^p,2.$$

On a vu aussi que les corrections respectives des règles n° 3 et n° 4, sont, dans les mêmes circonstances,

$$(t''' - 380,3).0,9245 - 0^p,4,$$
$$(t^{\text{IV}} - 384,3).0,9245 - 0\ ,4.$$

Or, en multipliant chacune de ces corrections par le nombre de fois que les règles correspondantes ont été portées sur la base, on aura la correction pour les quatre règles. Mais ce résultat peut se trouver plus simplement; car si t désigne le terme moyen des observations des quatre thermomètres, faites pendant la mesure de la base, auquel cas $t =$ somme des thermomètres divisée par le nombre de fois qu'ils ont été lus, la correction moyenne cherchée sera évidemment

$$(t - 383^p,8).0,9245 - 0^p,25 = \text{P}.$$

Les parties de cette expression exprimeront des deux cent-millièmes de la longueur fixe M. Observons cependant que le thermomètre *fictif* de la règle *moyenne* P a été supposé, par Delambre, marquer $383^p,3$ au lieu de $383^p,8$, et l'on ne sait trop pour quel motif, si ce n'est pas par inadvertance.

Maintenant, soit n le nombre de fois que les règles ont été employées dans la mesure de la base; on aura, pour la correction totale, nP. Mais il faut encore corriger les petites distances d'une règle à l'autre, mesurées par les languettes; et, à cet égard, il s'agit de faire séparément une correction de température à chaque distance observée, et une autre correction des verniers, qui est la même pour toutes les distances. La première correction est toujours additive, si la température est au-dessus de zéro; la seconde s'est trouvée soustractive et $= - 0^p,15$.

La première correction pourrait être donnée au moyen d'une petite table qui aurait pour premier argument les parties de thermomètre métallique observées pendant la mesure, et pour deuxième argument les parties données par les languettes. Si, par exemple, le thermomètre marquait 450^p, et la languette n° 1, 2000^p, la table de correction de température devrait donner $0^p,6$. En effet, on sait, par ce qui précède, que chaque règle s'allonge de 0,9245 pour une partie de son thermomètre; par conséquent, pour $450 - 385,3 = 64^p,7$, elle s'allongera de 60^p; et puisque la languette marque 2000^p, l'allongement relatif à cette longueur sera le quatrième terme de la proportion suivante, dans laquelle le premier terme exprime la longueur de la règle,

$$200\,000 : 2000 :: 60 : x = 0,6;$$

c'est ainsi que l'on formerait la table dont il s'agit; mais nous verrons plus loin qu'on peut éviter cette table.

Pour concevoir la raison de la seconde correction, il faut remarquer que la ligne de foi du vernier n° 1 ne tombait pas exactement sur le zéro de la division à l'instant du contact des règles, puisque alors elle marquait $0^p,7$; la vraie distance de la règle n° 1 à la suivante doit donc être diminuée de cette quantité, ou, ce qui est de même, la correction du vernier n° 1 $= - 0^p,7$. Celles des trois autres verniers étant respectivement $+ 0,9$; $- 1$; $+ 0,2$, il s'ensuit que le quart de ces quatre nombres, ou que la correction moyenne des verniers est, comme nous l'avons rapporté, $- 0^p,15$.

Enfin l'on calculera, pour chaque règle, la correction de l'inclinaison à l'horizon; puis l'on réduira toutes les distances horizontales par-

tielles, au niveau d'une des extrémités de la base, par exemple, et ensuite la longueur totale de cette base au niveau de la mer, comme nous l'avons expliqué plus haut.

Borda fit aussi la comparaison de la toise de l'Académie avec la règle n° 1. Il trouva, en dernière analyse, que cette règle = 2 toises + $5^p,4$, quand son thermomètre marque $386^p,2$; qu'elle est = 2 toises − 2^p lorsque le thermomètre marque $413^p,4$, et qu'à 16° ¼ du thermomètre centigrade, le thermomètre métallique indique $415^p,4$.

Il est donc aisé de déduire de là, par une interpolation, qu'à ce même degré de température choisi par Bouguer, pour étalonner les perches dont il fit usage au Pérou, la règle n° 1 = M + $27^p,8$ = 2 toises − $2^p,5$, et par conséquent que les 2 toises = M + $30^p,3$.

Postérieurement à ces expériences, une commission de savants fit, en 1799, une nouvelle comparaison de la toise du Pérou avec les 4 règles de platine qui avaient servi pour la mesure des bases de Melun et de Perpignan. Elle reconnut, 1° que la règle n° 1 était exactement le double de cette toise à la température de 13° de Réaumur; 2° que le quart de la longueur de 4 règles mises bout à bout, ou que la *règle moyenne* surpassait la règle n° 1, de $0^t.0000020$; 3° que le véritable point de la glace à ces mêmes règles, était de $0^t.00380.8$, et non pas $383^p,3$ comme l'avait cru Borda; 4° que 10 degrés du thermomètre de Réaumur valaient $23^p,16$ du thermomètre métallique, ou que 1° centigrade valait $1^p,853$; 5° enfin, que la correction moyenne du vernier des languettes était − $0^t.00000.3644$. Nous ferons bientôt usage de ces résultats.

En 1784, pour mesurer la base de Honslowheath, des savants anglais employèrent avec beaucoup de succès des tubes de verre, dont la dilatation est moindre que celle de l'acier, du fer fondu, et de toute espèce de cuivre. Les expériences qui furent faites à ce sujet firent même connaître qu'une verge massive de verre est plus dilatable qu'un tube de même matière. Mais ensuite ces savants jugèrent à propos de mesurer une base de vérification avec une chaîne d'acier parfaitement bien construite, aussi exacte et plus solide que les tubes de verre. Les deux bases, situées à 60 milles de distance l'une de l'autre, ayant été liées par un réseau de 24 triangles, il ne se trouva que 4 pouces ½ de différence entre la mesure directe de l'une d'elles et le résultat du calcul.

CHAPITRE IX.

APPLICATION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AU CALCUL DES BASES.

PREMIER EXEMPLE.

146. Je choisirai pour premier exemple la base dite de la *Goldalch,* mesurée en Bavière par les ingénieurs-géographes français, parce qu'elle est susceptible d'un grand nombre de réductions.

Pour mesurer cette base, l'on fit usage de 5 règles de bois de sapin, qui avaient chacune 5 mètres, et qui étaient construites comme nous l'avons dit précédemment. Ces règles, mises bout à bout et en ligne droite, composaient une longueur appelée *portée.* Chaque portée, placée sur des poutrelles soutenues par des chevalets, fut mise de niveau, afin d'éviter la réduction à l'horizon, et de pouvoir mettre plus intimement les règles en contact. On observa la température de chacune de ces règles avant de les changer de place, et l'on considéra la moyenne des cinq températures, comme la température de la portée que représentait ce système de règles. Enfin, après avoir procédé de la sorte, en allant d'une extrémité de la base à l'autre, on trouva $866^{\text{portées}}, \frac{1486}{10000}$ dans la longueur de cette base.

Il restait à étalonner la portée, et à connaître exactement sa dilatation, pour appliquer à la base mesurée la correction de température et l'évaluer en mètres. Or, afin d'atteindre ce but, l'on jugea à propos d'établir sur le terrain un *étalon invariable:* c'étaient deux pieux implantés en terre, et distants l'un de l'autre d'un peu plus de 25 mètres. Il fallait alors connaître rigoureusement la longueur de cet étalon, c'est-à-dire la distance fixe des centres des pieux, et ensuite comparer

cette longueur à celle de la portée. On employa à cet effet un mètre provisoire en cuivre qui représentait exactement, à la température de 10 grades, 3 pieds 11 lignes $\frac{44}{100}$ de la toise du Pérou prise à la température de 13° de Réaumur, ou de $16^g,25$. Mais pour mesurer l'excès de l'étalon sur la portée, l'on se servit d'un autre mètre de cuivre, divisé en millimètres, et auquel on avait adapté un vernier (art. **113**). Ce mètre auxiliaire fut trouvé un peu plus court que le mètre provisoire, dans le rapport de 30 000 à 30 014.

Voici maintenant les principaux résultats des expériences dont il s'agit.

Expériences relatives à la longueur E *de l'étalon.*

A la tempér. de $9^g,375=t$, on a trouvé $E=25^{m\cdot p}+0,08775=25+\varepsilon$,
$16,875=t'$ . . . . . . $E=25+0,08390=25+\varepsilon'$,
$26,250=t''$ . . . . . . $E=25+0,07888=25+\varepsilon''$.

Remarquez que les unités représentent des mètres provisoires, aux températures t, t', t'', et les fractions ε, ε', ε'', des parties du mètre auxiliaire: ces parties doivent donc être multipliées par le rapport $\frac{30000}{30014}$, puisqu'elles sont trop grandes.

Expériences relatives à l'excès ϖ *de l'étalon sur la portée.*

A la température de $9^g,375 = t$, on a trouvé $\varpi = 0,09232$,
$26,250 = t''$. . . . . . . $\varpi'' = 0,09032$.

Ces valeurs sont de même des fractions du mètre auxiliaire; il est donc nécessaire de les multiplier aussi par le rapport $\frac{30000}{30014}$, pour les évaluer en parties du mètre provisoire.

Soient $E_{(10)}$ la longueur de l'étalon invariable, exprimée en mètres provisoires à 10 grades de température; d la dilatation relative du cuivre, pour chaque degré du thermomètre centigrade; et, comme ci-dessus, t la température observée, ε l'excès de l'étalon sur 25 fois la longueur du mètre, enfin k le rapport $\frac{30000}{30014}$: il est évident qu'on aura,

en vertu des trois premières expériences,

$$E_{(10)} = [25 + \varepsilon k]\ [1 + d(t - 10)],$$
$$E_{(10)} = [25 + \varepsilon' k]\ [1 + d(t' - 10)],$$
$$E_{(10)} = [25 + \varepsilon'' k]\ [1 + d(t'' - 10)];$$

ou bien faisant, pour abréger,

$$25 + \varepsilon k = A, \qquad t - 10 = B,$$
$$25 + \varepsilon' k = A', \qquad t' - 10 = B',$$
$$25 + \varepsilon'' k = A'', \qquad t'' - 10 = B'',$$

on aura plus simplement

$$E_{(10)} = A\ (1 + dB),$$
$$E_{(10)} = A'\ (1 + dB'),$$
$$E_{(10)} = A''\ (1 + dB'').$$

Ces trois équations ne renfermant que deux inconnues, savoir, $E_{(10)}$ et d : l'une d'elles serait satisfaite par les valeurs de $E_{(10)}$ et d déduites des deux autres, si les observations étaient exemptes d'erreurs; mais comme il n'en est jamais ainsi, on pourra, par exemple, combiner ces équations deux à deux, et prendre une moyenne arithmétique entre les différentes valeurs d'une même quantité; de cette manière on trouvera

$$E_{(10)} = 25^{\text{m.p}},08741;$$

c'est la longueur de l'étalon en mètres provisoires, à la température de 10 grades. On aura en outre, par un milieu,

$$d = 0{,}000\,020\,92\,;$$

c'est la dilatation relative de la règle de cuivre, employée dans la mesure de l'étalon.

Maintenant désignons par Π_0 la longueur de la portée au terme de la glace fondante, mais évaluée en mètres provisoires à 10 grades de température; par Δ sa dilatation absolue pour chaque degré du ther-

momètre centigrade, c'est-à-dire sa dilatation évaluée en fraction de mètre provisoire; on aura, d'après les deux dernières expériences rapportées plus haut, et en désignant toujours par $E_{(10)}$ la longueur de l'étalon,

$$E_{(10)} = \Pi_0 + \Delta t + \varpi k [1 + d(t - 10)] = \Pi_0 + \Delta t + \varpi k (1 + dB),$$
$$E_{(10)} = \Pi_0 + \Delta t'' + \varpi'' k [1 + d(t'' - 10)] = \Pi_0 + \Delta t'' + \varpi'' k (1 + dB'').$$

De ces deux équations du premier degré, l'on tirera aisément les valeurs des inconnues Π_0 et Δ : faisant le calcul, on aura

$$\Pi_0 = 24^{m.p},99404, \qquad \Delta = 0^{m.p},00011657.$$

Or, par le tableau des températures des portées, inséré dans le Registre des observations, l'on voit que toutes ces températures sont positives, c'est-à-dire au-dessus de zéro; ainsi la correction totale à laquelle elles donnent lieu est additive et de $1^{m.p},97734$. Cette correction, comme on le conçoit bien, est l'expression de la somme des corrections partielles. Si, par exemple, n portées eussent été observées à la même température T, la correction qui leur est relative serait évidemment $nT\Delta$. Mais le nombre de portées contenues dans la base était de 866,1486, par conséquent on a

Longueur de la portée..................	$\Pi_0 =$	24	$^{m.p}$,99404
multipliée par..........................		866	,1486
produit...........		21648	,55275
Correction de température.............	+	1	,97734
Longueur de la base en mètres provisoires,	B' =	21650	,53009.

Postérieurement à la mesure de cette base, le mètre, déduit des opérations géodésiques de Delambre et Méchain, fut définitivement fixé à 3 pieds 11 lignes $\frac{296}{1000}$ de la toise du Pérou; le rapport entre le mètre légal et le mètre provisoire étant donc $\frac{443,296}{443,440}$, il est clair qu'il faut multiplier par $\frac{443,440}{443,296}$ la valeur précédente de B'

trouvée trop courte; partant l'on a

$$\text{base exprimée en mètres définitifs ou } B = B' \times \frac{443,440}{443,296} = 21657^{m},5630.$$

La différence de niveau des extrémités de la base étant très-petite, on peut considérer la longueur B comme celle d'un arc de grand cercle terrestre compris entre les verticales de ces mêmes extrémités, et représentant le *sol moyen* de la base. Or, il résulte d'un grand nombre d'observations barométriques, que ce sol est élevé de 486^{m} au-dessus du niveau de la mer; la réduction de la base à ce niveau, évaluée au moyen de la formule de l'art. **144**, sera donc — $1^{m},6532$; de là

$$\text{base réduite au niveau de la mer} = 21655^{m},9098;$$

c'est cette longueur qu'on emploie immédiatement dans le calcul des triangles, quand on les considère comme sphériques.

On devait mesurer une base de vérification avec des règles de fer que le Dépôt de la guerre français avait fait construire, et dont l'appareil était assez commode, comme j'eus occasion de m'en convaincre en mesurant, en 1811, avec ces règles, une petite base dans la plaine du Vésinet, près de Saint-Germain-en-Laye, dans la vue de déterminer la hauteur de l'aqueduc de Marly au-dessus de la Seine. Mais malgré la précision qu'on obtient par un pareil procédé, elle n'équivaut pas à celle qui résulte de l'emploi des règles de platine dont il a été parlé à l'art. **145**. Pour ne laisser rien à désirer à ce sujet, voici un exposé succinct de la mesure de la base de Melun et des diverses réductions qui y sont relatives.

DEUXIÈME EXEMPLE.

147. Delambre, qui fut contraint de mesurer une ligne brisée, le long de la route de Lieursaint à Melun, employa quatre règles de platine de 2 toises chacune, et construites comme nous l'avons dit (art. **145**) : les toits de ces règles étaient peints de différentes couleurs, afin d'éviter toute méprise. A la fin de chaque journée, et après avoir employé plus de dix-sept fois ces quatre règles, on enfonçait dans la terre un pieu dont la tête était carrée et recouverte

d'une lame de plomb sur laquelle on marquait, par deux traits croisés, le point où tombait le fil-à-plomb abaissé de l'extrémité de la dernière règle.

L'arc de cercle du niveau qui servit pour évaluer l'inclinaison des règles était de 10 degrés, formant 120 parties, dont chacune valait par conséquent 5 minutes, et le milieu de cet arc était numéroté 60. L'alidade mobile à laquelle était adapté un petit niveau à bulle d'air, portait un vernier donnant la minute. (*Voy.* la *fig.* 33.)

On jugeait que la règle allait en montant, en allant du premier au deuxième terme de la base, lorsque l'arc était plus petit dans l'observation directe qu'après le retournement (art. **145**). En général, l'élévation de la partie de l'avant au-dessus du niveau de la partie de l'arrière, est égale à la moitié de l'excès du second arc θ'' sur le premier θ', c'est-à-dire $\frac{\theta''-\theta'}{2}$. On aura une idée de l'ordre que Delambre mit dans ses observations, par le tableau suivant.

N° I.

N^{os} des RÈGLES.	THERMOM. métallique.	LANGUETTES.	NIVEAU, vers BRIE.	NIVEAU, vers MALVOISINE.	INCLIN. double.	RÉDUCT. à l'horizon	$dN+$	$dN-$
1	416,0 part.	409^{p}8	53^{p}2	66^{p}2	13^{p}0	9^{p}0	189	
2	416,5	235,9	81,4	38,0	43,4	101,4	....	637
3	415,0	346,4	50,4	68,4	18,0	17,3	262	
4	420,4	506,6	72,1	48,1	24,0	30,5	....	349
1								
2								
3								
4								
.								
.								
.								
48^r								− 13230
96^t	20182^{p}3	25736^{p}3				1481^{p}2	+669	− 12561

Dans ce tableau, les parties des thermomètres métalliques et des languettes sont des 100 000^{ièmes} d'une toise (art. **145**); mais les unités des nombres contenus dans les colonnes dN sont des dix-millièmes de toise.

La colonne intitulée *Réduction à l'horizon* comprend les nombres qu'il faut ôter de la longueur de chaque règle non compris sa languette, pour la réduire à l'horizon. Cette réduction se calcule au moyen de la formule

$$2 . 2^t \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta = 4^t \sin^2 \tfrac{1}{4}(2\theta),$$

dans laquelle θ est l'inclinaison de la règle. On aurait de même, pour la réduction de la languette l,

$$2l \sin^2 \tfrac{1}{4}(2\theta) = \tfrac{1}{2}\, l\, 4^t \sin^2 \tfrac{1}{4}(2\theta).$$

On voit donc que

réduct. de la languette = réduct. de la règle × ½ long. de la lang.

Mais Delambre a employé à cet effet la formule suivante, qui est suffisamment exacte, et qui a l'avantage de donner la réduction totale, savoir :

$$\text{réd. des lang.} = \frac{\tfrac{1}{2}\text{ som. des languettes} \times \text{réd. des règles}}{\text{nombre des règles}}.$$

Le tableau précédent n'offre que les résultats de la première journée, ou de la première page du Registre des observations. Voici un second tableau où se trouvent réunis les résultats de chaque page.

N° II.

PAGES.	NOMBRE des règles.	SOMME des thermomètres.	SOMME des languettes	SOMME des réductions à l'horizon.	SOMME des différences de niveau.	
1	48	20182^p,3	25736^p,1	1481^p,2	— 12561	
2	52	....	....	1556,1	— 518	
3	52	....	....	830,7	....	+ 6414
4	48	....	....	893,1	....	+ 3714
5	52	....	....	431,4	....	+ 6342
. . 30						
	1504	6.33488,3	16.55062,8	23458,1	— 56696	+ 111331
31 . . . 61						
	3021^r 6042^t	12^{t}75863,8	34^{t}26068,3	0^{t}32711,3 178,8	— 7^{t}2922	+ 14^{t}6562 — 7.2922
				0^{t}32890,1		+ 7^{t}3640

Les regles, comme nous l'avons dit, ont été réduites séparément à l'horizon, ce qui a produit........................ 0^{t}32711,3

Et les languettes, réduites de même, ont donné..... 178,8

En sorte que la réduction totale à l'horizon est..... 0^{t}32890,1.

On fit correspondre, à l'aide d'un fil-à-plomb, l'extrémité de la première et de la dernière règle aux deux termes de la base; ainsi, la longueur mesurée doit être augmentée d'une épaisseur de cordonnet évaluée à 0^{t}00057,8.

On a donc

Longueur mesurée.		6042^t
Languettes.		34.26068,3
Épaisseur du fil-à-plomb.	+	0.00057,8
Réduction des règles à l'horizon. . .	—	0.32711,3
Réd. des languettes à l'horizon. . .	—	178,8
Base mesurée. .		$6075^t 93236,3$

Thermomètres..	$12^t 75863,8$
Somme des dN.	$7^t 364$

Mais la dernière règle, ou la 3021ième, dépassait réellement le terme austral, et l'intervalle réduit à l'horizon fut trouvé de $0^t 05492,8$, quantité évidemment soustractive.

De plus, les deux parties de la base, dont l'une = 3945^t, l'autre 2131^t, formaient un angle horizontal de 179° 10′ 47″,09 : en le réduisant au plan des cordes (art. **150**), on le trouve de 179° 10′ 40″,91 ; d'où l'on conclut, pour la réduction à la ligne droite (art. **92**), — $0^t 142371$.

Enfin une petite correction, évaluée à + $0^t 00002,78$, est résultée de ce que la dernière règle était éloignée du coude où était placé le centre du poteau, de 1 pied 7 pouces 8 lignes.

Delambre ayant substitué la corde à l'arc, il faut en outre réduire chacune des parties de la base, à l'aide de cette formule :

$$\text{différence de l'arc à la corde} = -\frac{(\text{arc})^3}{24R^2},$$

dans laquelle R désigne le rayon moyen de la Terre (art **150**). Faisant le calcul, on trouve

Pour la partie 3945^t.	—	$0^t 00023,88$
Pour la partie 2131	—	3,76
Réduction aux cordes. . .	—	0.00027,64
Correct. du vernier des languettes (art. **145**)	—	0.01100,48

C'est-à-dire la correction moyenne $0^t 00000,3644$ multipliée par le nombre des règles.

— 0.01128,12

Report.		—	0^t01128,12
Réductions précédentes	1°.	—	0.05492,80
	2°.	—	0.14239,10
	3°.	+	0.00002,78
Somme.		—	0.20855,24
Résultat immédiat.			6075.93236,35
Base corrigée.			6075.72381,11

Les éléments de la réduction de la base au niveau de la mer sont donnés par ce qui suit.

Le sol du terme austral est élevé au-dessus de la mer de	36^t,11
Celui du terme boréal, de.	45 ,91
Moyenne entre les deux termes..	41^t,00
Le sol au coude est élevé de..	42 ,00

En regardant l'élévation moyenne entre les deux termes comme l'élévation moyenne de la base, la réduction calculée par la formule de l'art. **144** serait — 0^t,07615. En partageant la base en sept arcs différents, Delambre a trouvé — 0^t,07735; c'est ce dernier résultat qu'il a employé. Ainsi,

Base réduite à la ligne droite.	6075,72381
Réduction au niveau de la mer..	— 0,07735
Base au niveau de la mer. . . .	6075^t,64646

Il s'agit maintenant d'avoir égard à la température des règles. Or, la somme 12^t75863,8 des thermomètres métalliques divisée par 3021, nombre des observations ou des règles, donne le quotient 0^t00422,30; c'est la température moyenne des règles.

En partant d'une remarque de Delambre, le point de la glace de ces mêmes règles est, selon Borda, de. . . . . 0^t00383^p,3

Mais des expériences ultérieures citées précédemment (page 238) ayant démontré que le thermomètre centigrade répondait plus exactement à + 1^G,35, il faut soustraire du nombre précédent. . . . . 2 ,5

Reste donc pour le véritable terme de la glace des quatre règles. 0^t00380^p,8

et comme 10 degrés de Réaumur valent $23^p,16$, il s'ensuit que pour 13 degrés du même thermomètre on a. .	$30^p,1$
donc 13 degrés de Réaumur répondent à.	410 ,9
mais à la température moyenne de la base, on a eu. . .	422 ,3
Ainsi la différence est de.	11 ,4
L'allongement de la règle de platine étant de $0^p,9245$, celui qui correspond à la différence 11,4 sera.	$10^p,539$
Ces parties sont des deux cent-millièmes de la règle; en les multipliant par 3038, nombre des règles, on aura pour la réduction totale à 13 degrés de Réaumur. . . .	0,32017
Ajoutant cette correction à la base exprimée en demi-modules, savoir.	$6075^t,64646$
on trouvera que cette base, réduite à cette dernière température et à la ligne droite, vaut en demi-modules.	6075,96663
Ajoutant la différence de l'arc à la corde.	0,00087
L'arc de la base.	= 6075,96750
Cette valeur est donnée en parties du demi-module qui surpassait la demi-règle n° 1 de $0^t00000,10$, d'après des expériences faites au retour de la base de Perpignan; ainsi la réduction additive sera de $0^t,00000,1 \times 6076$. .	= + 608
Donc, la base réduite =	6075,97358
et comme à cette température de 13 degrés de Réaumur le demi-module ne valait que 1 toise $- 0^t,00001574$, il s'ensuit que cette base doit être encore diminuée de $0^t,00001574 \times 6076$.	= − 0,07032
donc enfin, la base réduite vaut en toises du Pérou. . .	6075,90326
Delambre a trouvé.	6075,90338
Différence entre son calcul et le nôtre. . . .	$0^t,00012$

Toutefois on peut s'arrêter au nombre $6075^t,9$, à cause des petites erreurs inévitables dans l'alignement et l'épaisseur des règles; mais il est à remarquer que Delambre présenta en dernier lieu, à la commission des poids et mesures, pour la base réduite à la ligne droite, la valeur $6075^t,899\,197$ qu'il faut augmenter de $0^t,000\,872$, pour la

changer en arc, ce qui donne $6075^t,900\,069$; et c'est en effet sur cette base que tous ses derniers calculs ont été faits (page 45 du tome IIe de la *Base du Système métrique*).

Il est évident que, par la manière dont on a mesuré cette longueur, chaque règle ou les deux toises formaient à la surface de la Terre deux tangentes d'une toise chacune. Or, la somme de toutes ces tangentes ayant été prise pour l'arc correspondant, on a nécessairement commis une erreur; mais cette erreur est-elle sensible? c'est ce qu'il s'agit de savoir.

Soit A un arc terrestre dont le rayon est R; on a, comme l'on sait,

$$A = \text{tang } A - \tfrac{1}{3}\frac{\text{tang}^3 A}{R^2} + \tfrac{1}{5}\frac{\text{tang}^5 A}{R^4} - \text{etc.};$$

série qui donne l'arc A en toises, si la tangente est donnée en unités de cette espèce. Mais, dans la supposition actuelle, tang $A = 1^t$; on a donc simplement

$$\text{tang } A - A = \tfrac{1}{3}\frac{\text{tang}^3 A}{R^2} = \frac{1}{3R^2}.$$

Cette différence entre la tangente et l'arc doit être multipliée par le nombre de toises contenues dans la base, c'est-à-dire par 6076^t; ainsi, à cause de $\log R = 6,51406$ à très-peu près, l'on a $0^t,00000\,00001\,89$ à retrancher de $6075^t,90326$, pour avoir le véritable arc de la base. Il est donc toujours permis de négliger cette correction.

A la rigueur, cette base étant un arc du sphéroïde terrestre, se trouve douée d'une double courbure, qu'on peut néanmoins considérer comme nulle. Observons en outre, que l'analyse des probabilités offre une règle fort simple, à l'aide de laquelle on détermine, dans certains cas, l'erreur moyenne commise dans la mesure d'une base; la voici :

En désignant par α l'erreur accidentelle due à une lecture inexacte des verniers de chaque règle, l'erreur totale ε à craindre sur la longueur d'une base contenant n règles, sera

$$\varepsilon = + \alpha\sqrt{n}.$$

Par exemple, les parties du vernier des languettes de chaque règle de platine étant des cent-millièmes de toise, il n'est guère possible de commettre dans la lecture une erreur d'*estime* de plus de $\frac{1}{4}$ de partie

ou de $0^t,0000025 = \alpha$, soit en plus, soit en moins; ainsi, pour une longueur de $3021 = n$ comme la base précédente, on aurait seulement

$$\varepsilon = \pm\, 0^t,0000025 \sqrt{3021} = \pm\, 0^t,000137;$$

quantité assez petite pour n'en tenir aucun compte.

Quant à l'erreur due à un défaut d'alignement des règles et à leur épaisseur, Delambre trouva à peine cinq millièmes de toise à ôter d'une longueur de 6076 toises.

Le grand canevas trigonométrique de la nouvelle Carte de France, dont les lignes primordiales ont été mesurées par l'ex-corps des Ingénieurs-Géographes militaires, se rattache aux bases de Melun et de Perpignan mesurées par Delambre, et à cinq autres, pour lesquelles on a employé pareillement les règles de platine; mais seulement au nombre de trois, parce qu'il a été décidé que celle n° 1 resterait en dépôt au Bureau des Longitudes, pour servir désormais de terme de comparaison aux trois autres. On trouvera, page 42 du Discours préliminaire de notre *Nouvelle description géométrique de la France* (tom. I), un autre exemple du calcul précédent appliqué à la mesure de la base d'Ensisheim près de Colmar.

CHAPITRE X.

DU CALCUL DES TRIANGLES, ET DE QUELQUES PROBLÈMES DE GÉODÉSIE.

148. Puisque les bases mesurées et réduites à une même surface de niveau sont ou peuvent être considérées comme des arcs de grand cercle de la sphère terrestre, et qu'elles sont liées à la chaîne des triangles, de manière à en représenter les côtés principaux, il serait naturel de calculer ces triangles par la voie de la Trigonométrie sphérique; mais leur courbure étant peu sensible, on peut aussi les traiter comme des triangles rectilignes, en faisant toutefois usage du théorème de Legendre, démontré à l'art. **100**, ou bien substituer à ces triangles sphériques les triangles rectilignes formés par les cordes qui en soutendent les côtés. Exposons successivement ces trois méthodes.

Résolution des triangles géodésiques considérés comme des triangles sphériques.

149. Lorsque les angles de position d'un réseau du premier ordre sont réduits à l'horizon de leurs sommets respectifs et au centre, qu'ils sont corrigés de l'excentricité de la lunette inférieure ou supérieure, et des phases des signaux, s'il y a lieu, la somme des trois angles d'un même triangle doit excéder deux angles droits d'une quantité qui, en faisant abstraction de l'erreur totale des observations, est uniquement due à la courbure de la Terre, et est précisément égale à la surface du triangle réduite en secondes (art. **100**). Pour résoudre les triangles de cette espèce par la règle des quatre sinus (art. **55**), il faut d'abord dégager les angles d'un même triangle de l'erreur des observations.

Dans les opérations faites avec beaucoup de soin, il est rare que l'erreur du triangle aille à 4″ sexagésimales; et quand les triangles sont bien conditionnés, cette erreur n'a aucune influence sensible sur les côtés.

Par exemple, choisissons le 43e triangle de la *Base du Système métrique décimal*, dans lequel la distance de Lieursaint à Melun est la base mesurée, et cherchons, au moyen de cette base et des trois angles, les deux autres côtés.

Il faut passer préalablement des angles observés aux angles sphériques. Or, on a, tome I, page 524,

NOMS des stations.	ANGLES OBSERVÉS réduits.
Malvoisine................	40° 36′ 56″,81
Lieursaint...............	75.39.29,81
Melun..................	63.43.33,79
	180° 0′ 0″,41
Excès sphérique.......	+ 0,49
Somme des erreurs.....	− 0,08

Dans ce tableau, les angles observés et réduits sont les angles de position réduits au centre et à l'horizon; leur somme = 180°0′0″,41 : l'excès sphérique déterminé par la méthode de l'art. **100**, ou ainsi qu'il sera expliqué plus particulièrement à l'article suivant, est de 0″,49; l'erreur du triangle est donc − 0″,08, et elle est négative, parce que la première somme est plus petite que la seconde: on l'affecterait du signe + si le contraire avait lieu. En la répartissant également sur les trois angles, on aura ce nouveau tableau :

NOMS des stations.	ANGLES SPHÉRIQUES.		LOG. SINUS DES ANGLES.
Malvoisine........	40° 36′ 56″,84	A	9,81356 99297
Lieursaint........	75.39.29 ,83	B	9,98625 01102
Melun...........	63.43.33 ,82	C	9,95264 12944
	180° 0′ 0″,49		

Faisant usage de la notation de l'art. **54**, le côté a sera connu; ainsi, par la règle des quatre sinus, on aura ces deux proportions pour déterminer les deux autres côtés b, c,

$$\sin A : \sin B :: \sin a : \sin b,$$
$$\sin A : \sin C :: \sin a : \sin c.$$

Mais elles supposent que la base a, donnée en mètres, est un arc de grand cercle réduit en parties de l'unité ou du rayon des Tables. On peut cependant exprimer en mètres le sinus de a, et pour lors $\sin b$ et $\sin c$ seront donnés en pareille mesure. En effet, lorsque le rayon est l'unité, on a (art. **91**)

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \ldots\right);$$

mais le rayon de la Terre étant désigné par ρ, l'on a

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6\rho^2} + \frac{x^4}{120\rho^4} - \ldots\right).$$

$\sin x$ sera donc donné en mètres, si l'arc x est lui-même exprimé en unités de cette espèce. De là

$$\log \sin x = \log x + \log\left(1 - \frac{x^2}{6\rho^2}\right)$$
$$= \log x - \frac{\mu x^2}{6\rho^2},$$

en négligeant les autres termes de la série, qui sont toujours insensibles dans la pratique de la Géodésie, et représentant par μ le module 0,434294, dont le log = 9,63778.

Le passage de l'arc au sinus, ou réciproquement, se fera donc très-promptement, en remarquant que le coefficient de x^2, c'est-à-dire $\frac{\mu}{6\rho^2}$, a pour log. 5,25187 lorsque $\rho = 6\,366\,198^{m}$.

Si l'on désigne par D le degré moyen et par π la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est 1, on aura $\rho = \frac{180^\circ.D}{\pi}$, et par suite

$$\log \sin x = \log x - \left(\frac{\mu}{6}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \frac{x^2}{D^2}.$$

Delambre, qui le premier a fait usage de ce procédé, et évalué tous les côtés de ses triangles en toises, a supposé D = 57020^{t}.

On a aussi en parties du rayon

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\rho^2} + \ldots;$$

de là

$$(\cos x)^{\frac{1}{3}} = \left(1 - \frac{x^2}{2\rho^2} + \ldots\right)^{\frac{1}{3}},$$

et

$$\tfrac{1}{3} \log \cos x = \log\left(1 - \frac{x^2}{6\rho^2}\right) = -\frac{\mu x^2}{6\rho^2};$$

enfin,

$$\log \sin x = \log x + \tfrac{1}{3} \log \cos x.$$

Pour application, soit, comme Delambre, $x = 14088^{t},2858$; en convertissant cet arc en secondes, on aura, d'après la valeur de D ci-dessus,

$$\begin{aligned} \log x &= 4,14886 \\ \log\ 3600'' &= 3,55630 \\ \text{c.} \log 57020 &= \underline{5,24397} \\ \log x'' &= 2,94913, \text{ d'où } x'' = 14'49'',5; \end{aligned}$$

puis, par les Tables de Vlacq à 10 décimales, on aura

$$\begin{aligned} \log 14088^t{,}2858 \ldots\ldots &= 4{,}14885\ 84218 \\ +\tfrac{1}{3}\log\cos 14'\,49'',5 \ldots\ldots &= \underline{9{,}99999\ 86539} \end{aligned}$$

et enfin, $\log .\sin x$ en toises. . . . . $= 4{,}14885\ 70757$

Lorsque le sinus de x est donné en mesures connues, et qu'on veut avoir x de la même manière, on a, par ce qui précède,

$$\log x = \log\sin x + \frac{\mu}{6\rho^2}\sin^2 x,$$

ou

$$\log x = \log\sin x - \tfrac{1}{3}\log\cos x.$$

Soit, comme ci-dessus,

$$\begin{aligned} \log\sin x \text{ en toises} &= 4{,}14885\ 70757 \\ -\tfrac{1}{3}\log\cos x &= \underline{9{,}99999\ 86539} \end{aligned}$$

de là

$$\log x = 4{,}14885\ 84218$$

La valeur de x, ou plutôt de a, dans le 43e triangle que nous prenons pour exemple, est, en arc, $6075^t{,}9001$, dont le $\log.\sin = 3{,}78361\ 03721$; ainsi les deux proportions précédentes donneront

c. log sin A $= 0{,}18643\ 00703$		. . . .	$= 0{,}18643\ 00703$
log sin a $= 3{,}78361\ 03721$		. . . .	$= 3{,}78361\ 03721$
log sin B $= 9{,}98625\ 01102$		log sin C	$= 9{,}95264\ 12944$
log sin b $= 3{,}95629\ 05526$		log sin c	$= 3{,}92268\ 17368$

Passant du sinus à l'arc, comme ci-dessus, on a

$$b = 9042^t{,}5539, \qquad c = 8369^t{,}1673.$$

C'est ainsi que Delambre a obtenu tous les côtés des triangles de la méridienne; mais il observe que l'on peut très-bien s'en tenir aux Tables de Callet, et résoudre dans tous les cas les triangles géodésiques, au moyen des logarithmes à 7 décimales.

Lorsqu'une chaîne de triangles est terminée par deux bases, on est dans l'usage d'en calculer chaque moitié avec la base qui en fait partie : alors on prend pour côté de jonction la moyenne arithmétique entre

les deux résultats. Mais Delambre, pour ne pas laisser accumuler ainsi toute l'erreur sur un côté, aime mieux faire accorder exactement les deux bases, en modifiant tant soit peu les angles des triangles. Cette manière de répartir, tout le long de la chaîne, l'erreur entre une base calculée et mesurée, quoique étant tout à fait arbitraire, ne donne lieu cependant qu'à des corrections qui sont bien en deçà des limites des erreurs probables d'observation. Laplace, dans l'ouvrage que j'ai déjà cité (art. **110**), donne à ce sujet une méthode certaine et toute fondée sur une analyse rigoureuse; je la ferai connaître à l'art. **207**.

Résolution des triangles sphériques peu courbes, par la Trigonométrie rectiligne.

150. La méthode par laquelle on ramène, à l'aide du théorème de Legendre, la résolution des triangles sphériques à celle des triangles rectilignes, est généralement adoptée à cause de sa simplicité. Ainsi, pour calculer les différents côtés des triangles ABC, BCD,... (*fig.* 34), on ôte de chacun des angles horizontaux de ces triangles le tiers de l'excès de leur somme sur deux angles droits; après quoi l'on applique successivement à chaque triangle le principe de l'art. **48**.

Je choisirai pour exemple un des triangles du réseau trigonométrique que je fis servir, en 1816, d'exercice aux élèves du Corps royal des ingénieurs-géographes, savoir : le triangle *Panthéon — Saint-Martin-du-Tertre — Dammartin*. Dans ce triangle, le seul côté de commun avec la méridienne de France est la distance du Panthéon à Saint-Martin, laquelle $= 29\,269^{m},30$, réduite en arc et au niveau de la mer. Voici les résultats de nos observations et de nos calculs.

NOMS DES STATIONS.	ANGLES RÉDUITS.
Dammartin (église paroissiale).....	$64^{g}\,3126''5 = A$
Panthéon.....................	$51.5278,4 = B$
Saint-Martin..................	$84.1598,2 = C$
Somme.........	$200.0003''\,1$.

Les angles réduits, rapportés dans ce tableau, sont ceux de position réduits au centre et à l'horizon (art. **132** et **129**); leur somme étant de $200^g.0003'',1$, l'excès sur deux angles droits $= 3'',1$.

Désignant par A′, B′, C′ les *angles moyens*, ou les angles A, B, C diminués chacun du tiers de cet excès, on aura

ANGLES MOYENS.	LOG. SINUS.
$A' = 64^g 3125''$	9,9278567
$B' = 51.5278$	9,8596612
$C' = 84\ 1597$	9,9864152
200.	

Cela posé, le triangle ABC supposé rectiligne, donnera, en adoptant la notation de l'art. **100**,

$$\sin A' : \sin B' :: a : b,$$
$$\sin A' : \sin C' :: a : c;$$

les côtés b et c, c'est-à-dire *Dammartin—Saint-Martin,* et *Panthéon-Dammartin,* seront donc connus. Opérant par logarithmes, on a

$$\begin{aligned} \text{c. log} \sin A' &= 0,0721433 \\ \log a &= 4,4664126 \\ \log \sin B' &= 9,8596612 \\ \hline \log b &= 4,3982171 = 25\ 016^m,0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. log} \sin A' &= 0,0721433 \\ \log a &= 4,4664126 \\ \log \sin C' &= 9,9864152 \\ \hline \log c &= 4,5249711 = 33\ 494^m,30. \end{aligned}$$

Il est utile, dans la pratique, de mettre de l'ordre dans les calculs de cette espèce, et de les abréger autant que possible. Voici comment les ingénieurs-géographes les disposent sur leurs registres.

NOMS des stations.	ANGLES réduits.	ANGLES sphériques.	ANGLES moyens.	LOG. SINUS.	CALCUL des côtés.	COTÉS en mètres.
Dammartin (égl. parois.)	$64^g 3126''$, 5	27", 3	$64^g 3125$	9,9278567	4,4664126 0,0721433 9,8596612	29269^m,30
Panthéon............	51,5278, 4	79, 2	51,5278	9,8596612	4,3982171	25016, 00
					4,5385559 9,9864152	
St.-Martin (clocher.)...	84,1598, 2	99, 1	84,1597	9,9864152	4,5249711	33494, 30
	200,0003", 1	200.0005, 6	200,0000			
Excès sphérique.......	5, 6					
Somme des erreurs....	— 2, 5					

Dans ce tableau, les mètres qui sont sur la même ligne qu'un angle expriment la longueur du côté opposé à cet angle, et ainsi des autres. La première longueur est toujours la base ou le côté connu.

Si le triangle ABC (*fig.* 34) représentait celui qu'on vient de calculer et qu'il fût le premier du réseau, le second triangle BCD aurait évidemment pour base le côté BC, et se calculerait de la même manière que le premier triangle. En allant ainsi de proche en proche, on arriverait au dernier côté KL du réseau.

151. Pour obtenir les angles sphériques dont on déjà vu l'usage à l'article précédent, il faut connaître l'excès sphérique de chaque triangle; d'ailleurs cet excès met à même d'apprécier la somme des erreurs des observations. On le détermine ainsi qu'il suit.

Par l'art. **100**, l'excès sphérique $\varepsilon = \frac{sR''}{\rho^2}$, s dénotant l'aire du triangle que l'on considère, ρ le rayon de la Terre, et $R'' = \frac{1}{\sin 1''}$ le nombre de secondes contenues dans le rayon. Or, on a $s = \frac{ab \sin C}{2}$,

et, par ce qui précède,

$$C = 84^{g},1598,$$
$$\log a = 4,46641,$$
$$\log b = 4,39822;$$

mais avant d'évaluer ε, nous remarquerons que $\frac{R''}{\rho^2}$ est une quantité constante, dans laquelle ρ et R doivent être exprimés par les mêmes unités qui ont été choisies pour la mesure des côtés et des angles des triangles. Ainsi, pour avoir le logarithme de l'excès sphérique ε exprimé en secondes, au logarithme de l'aire du triangle on ajoutera la quantité

$$\log R - 2 \log \rho.$$

Si l'on part des anciennes mesures et de la division du cercle en 360°, on aura

$$\log \rho = 6,51406, \quad \log R'' = 5,31443,$$
$$\log R - 2 \log \rho = 2,28631.$$

Si l'on fait usage des nouvelles mesures et de la division du cercle en 400^{g},

$$\log \rho = 6,80388, \quad \log R^{s} = 5,80388,$$
$$\log R - 2 \log \rho = 2,19612.$$

Enfin, si les côtés du triangle sont exprimés en mètres, et qu'on emploie la division du cercle en 360°, on aura

$$\log R - 2 \log \rho = 1,70667.$$

La valeur ci-dessus de s étant calculée par les logarithmes, on aura, en vertu des données précédentes,

$$\begin{aligned}
\log \tfrac{1}{2}, \text{ ou } 0,5 &= 9,69897 \\
\log \sin C &= 9,98642 \\
\log a &= 4,46641 \\
\log b &= 4,39822 \\
\hline
\log s &= 8,55002 \\
\log \text{constant} &= 2,19612 \\
\hline
\log \varepsilon &= 0,74614 = 5^{s},57;
\end{aligned}$$

l'excès sphérique est donc tel que l'indique le tableau ci-dessus. Or, la somme des trois angles observés étant de $200^g,0003,1$, l'erreur totale est de $2'',5$; c'est la quantité dont il s'en faut que le triangle ne *ferme* exactement. Chacun des angles étant augmenté du tiers de $2'',5$, on a les angles sphériques cherchés.

Il arrive souvent, quand le triangle a peu d'étendue, que la somme des erreurs des observations, lorsqu'elle est négative, surpasse, abstraction faite du signe, l'excès sphérique de ce triangle. Dans ce cas, la somme de trois angles observés est nécessairement moindre que 200^g. Néanmoins, l'on forme les angles sphériques en corrigeant chaque angle du tiers de l'erreur totale, si les observations ont été faites à chacun des sommets, dans des circonstances favorables; c'est en effet la répartition la plus avantageuse, comme Laplace l'a démontré dans le second Supplément à sa *Théorie analytique des Probabilités*. Cependant si la mesure de tel angle méritait plus de confiance que celle de tel autre, on modifierait cette règle de répartition, de manière à faire supporter à l'angle le plus douteux la plus forte correction.

152. Puisque l'excès sphérique du triangle ABC (*fig.* 15) est égal à la surface s multipliée par $\frac{R''}{\rho^2}$, et que cette surface se compose de celle des deux triangles rectangles ABD, CBD, on a, en désignant par s', s'' ces deux triangles partiels,

$$\varepsilon = \frac{s}{\rho^2}R'' = \frac{s'+s''}{\rho^2 \sin 1''};$$

mais, d'après l'art. **100**,

$$s' = \tfrac{1}{2}c^2 \sin A \cos A \qquad s'' = \tfrac{1}{2}a^2 \sin C \cos C$$
$$= \tfrac{1}{4}c^2 \sin 2A, \qquad = \tfrac{1}{4}a^2 \sin 2C;$$

donc

$$\varepsilon = \frac{c^2}{4}\frac{\sin 2A}{\rho^2 \sin 1''} + \frac{a^2}{4}\frac{\sin 2C}{\rho^2 \sin 1''}.$$

Telle est la forme qu'il convient de donner à la valeur de ε, pour calculer une table qui donne l'excès sphérique en deux parties; mais

comme cette table est très-peu utile, je me suis dispensé de la reproduire dans cette 3e édition. Au surplus, Delambre l'a donnée en toises (*Base du Système métrique décimal*), et il a même formé une table à l'aide de laquelle on a tout d'un coup l'excès sphérique. Quant à celle-ci je l'ai donnée en nouvelles mesures; on la trouvera à la fin de ce volume, sous le n° III : pour s'en servir, on cherchera sur la carte des triangles, et au moyen de son échelle, les nombres de mètres contenus dans leur base et dans leur hauteur, et avec ces deux nombres, pris pour arguments, on entrera dans la table comme dans toutes celles à double entrée. Quoique cette table s'arrête aux nombres 10 000 et 50 000, on voit bien qu'elle peut servir pour des nombres multiples.

Désignant par b la base, et par h la hauteur d'un triangle, on a évidemment

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{R''}{\rho^2}\right) bh.$$

Veut-on faire usage des anciennes mesures, c'est-à-dire de la toise et de la division du cercle en 360°? Dans ce cas,

$$\log\frac{R''}{2\rho^2} = 1,98528, \text{ ou bien } \varepsilon = 0'',00000\,00096\,66 . bh.$$

Veut-on au contraire employer les nouvelles mesures? On a

$$\log\frac{R''}{2\rho^2} = 1,89509, \text{ ou bien } \varepsilon = 0'',00000\,00078\,54\ bh.$$

Dans l'application de ces formules, il est suffisant d'exprimer les longueurs en unités de mille toises; ainsi l'on a, en secondes sexagésimales, ou dans la première hypothèse,

$$\varepsilon = 0'',009666\, bh;$$

et en secondes centésimales, ou dans la seconde hypothèse,

$$\varepsilon = 0'',007854\, bh.$$

C'est d'après cette dernière valeur que j'ai calculé la table en question.

153. Pour donner une autre application de l'excès sphérique, résolvons le triangle géodésique dans lequel on connaît seulement l'angle C et les deux côtés adjacents a, b, savoir :

$$\begin{aligned} C &= 120^g{,}2897'',12, \\ \log a &= 4{,}6859571, \\ \log b &= 4{,}5434696. \end{aligned}$$

On trouvera l'excès sphérique de ce triangle de $12'',65$; le tiers $4'',22$ étant ôté de l'angle C, on aura l'angle réduit $C' = 120^g{,}289290$. Il s'agit maintenant de résoudre un triangle rectiligne dans lequel un angle est C′, et les deux côtés adjacents sont a et b, comme ci-dessus. Pour cet effet, l'on aura recours à la méthode de l'art. **49**, qui donne lieu au calcul suivant :

$$\begin{aligned} \log a &= 4{,}6859571 \\ \text{c.} \log b &= 5{,}4565304 \\ \log \operatorname{tang} \varphi &= 0{,}1424875 \\ \varphi &= 60^g{,}260945 \\ \tfrac{1}{2}C' &= 60\ {,}144645 \\ 100 - \tfrac{1}{2}C' &= 39\ {,}855355 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{l.} \operatorname{tang}(\varphi - 50^g) &= 9{,}2110910 \\ \log \cot \tfrac{1}{2}C &= 9{,}8591844 \\ \log \operatorname{tang} \frac{A'-B'}{2} &= 9{,}0702754 \\ \frac{A'-B'}{2} &= 7^g{,}450177 \\ \frac{A'-B'}{2} &= 39{,}855355 \\ A' &= 47{,}305532 \\ B' &= 32{,}405178 \end{aligned}$$

Maintenant le troisième côté c s'obtiendra à l'aide de l'équation

$$c. = \frac{a \sin C'}{\sin A'},$$

$$\begin{aligned} \log a &= 4{,}6859571 \\ \log \sin C' &= 9{,}9775601 \\ \text{c.} \log \sin A' &= 0{,}1696973 \\ \log c &= 4{,}8332145; \end{aligned}$$

et pour preuve de l'opération, l'on calculera b, comme s'il était in-

connu; on aura en effet

$$\begin{aligned} \log a + \text{c. log sin A}' &= 4{,}8556544 \\ \log \sin B' &= 9{,}6878152 \\ \log b &= 4{,}5434696; \end{aligned}$$

ce qui est conforme à l'une des données du problème. Il résulte donc de ce calcul, et en ne supposant aucune erreur dans l'observation de l'angle C, que les parties du triangle géodésique proposé, qu'il fallait trouver, sont

$$\begin{aligned} A &= 47^g{,}305\,954 = A' + \tfrac{1}{3}\varepsilon, \\ B &= 32\ {,}405\,600 = B' + \tfrac{1}{3}\varepsilon, \\ \log c &= 4{,}8332145, \quad \text{ou} \quad c = 68110^m{,}56. \end{aligned}$$

154. On peut toujours employer la méthode de Legendre dans les opérations les plus délicates de la Géodésie, et dans le cas même où les côtés du triangle seraient d'un degré et demi, et plus. Nous donnerons la preuve de cette assertion, en résolvant le grand triangle qui fait partie du prolongement de la méridienne de France sur le territoire espagnol. Ce triangle observé de nuit, a pour sommets *Iviza*, *Montgò*, *Desierto* (*fig.* 35). MM. Biot et Arago trouvèrent, toutes réductions faites, les angles sphériques suivants (*Base du Système métrique décimal*, tome IV, page 179) :

Angle à Iviza	=	59°50′53″,40 = I
à Montgò	=	78. 4. 9 ,53 = M
à Desierto	=	42. 5.36 ,07 = D
Somme	=	180. 0.39,00

Le côté *Montgò-Iviza* étant de 56559,04 toises en arc, on peut calculer les deux autres côtés dans deux hypothèses différentes; d'abord en faisant abstraction de sa courbure, ensuite en le traitant comme sphérique.

1re SOLUTION. Les angles *moyens* du triangle se trouveront en ôtant 13″, c'est-à-dire le tiers de l'excès 39″, de chacun des angles sphériques; ainsi,

Angle à Iviza	=	59°50′40″,40 = I′
à Montgò	=	78. 3.56 ,53 = M′
à Desierto	=	42. 5.23 ,07 = D′
Somme	=	180. 0. 0,00

De là

$$\begin{array}{rlr} \text{c. log sin D}' & = 0{,}1737348 \ldots\ldots & 0{,}1737348 \\ \log \overline{\text{MI}} & = 4{,}7525020 \ldots\ldots & 4{,}7525020 \\ \log \sin \text{M}' & = \underline{9{,}9905099} \quad \log \sin \text{I}' = & \underline{9{,}9368482} \\ \log \overline{\text{DI}} & = 4{,}9167467 \quad \log \overline{\text{DM}} = & 4{,}8630850 \end{array}$$

et par suite, $\overline{\text{DI}} = 82555^{t},62$ $\qquad$ $\overline{\text{DM}} = 72960^{t},0$.

L'excès sphérique, s'il n'était pas connu, se trouverait ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{rl} \log \text{const.} & = 1{,}98528 = \log \frac{\text{R}''}{2\rho^2}. \\ \log \sin \text{M} & = 9{,}99051 \\ \log \overline{\text{MI}} & = 4{,}75250 \\ \log \overline{\text{MD}} & = \underline{4{,}86308} \\ \log \text{excès sph.} & = 1{,}59137 = 39'',03. \end{array}$$

Nous trouvons 0'',03 de plus que la commission du Bureau des Longitudes, probablement parce qu'elle n'a pas tout à fait supposé comme nous $\rho = 3\,266\,330^{t}$ ou $\log \rho = 6{,}5140601$ (*).

2[e] Solution. Le moyen le plus simple pour confirmer les résultats précédents, est de résoudre le triangle par la méthode rigoureuse de l'art **149**. Soit, pour abréger, la base donnée $\overline{\text{MI}} = \delta$; on aura, d'après le même article,

$$\log. \sin \delta = \log \delta - \frac{\mu \delta^2}{6\rho^2};$$

(*) Un grand triangle formé aussi par les ingénieurs-géographes, dans le but de lier à la triangulation de la France le *Monte-Cinto* situé en Corse, a pour base une distance de $78756^{m},9$ qui s'étend le long de la côte de Nice; et les angles à cette base, réduits à l'horizon, sont, l'un de $82^{\circ},0630$, l'autre de $96^{\circ},2662$. Calculant alors l'excès sphérique de ce triangle, par la formule de l'art. **152**, on le trouve de 140 secondes centésimales; d'où il suit que l'angle au sommet, qu'on n'a pu mesurer, est de $21^{c},6848$, et que les deux autres côtés sont $235\,387^{m},5$ et $266\,491^{m},6$. (*Descrip. Géom. de la France*, tome I, page 175.)

mais
$$\log\mu = 9{,}63778$$
$$\log\delta = 4{,}75250$$
$$= 4{,}75250$$
$$\text{c. } \log 6 = 9{,}22185$$
$$2.\ \text{comp. } \log\rho = 6{,}97188$$
$$\overline{5{,}33651} = 0{,}0000217 -$$
$$\log\delta = 4{,}7525020$$
$$\log\sin\delta = \overline{4{,}7524803}$$
$$\text{c. } \log\sin D = 0{,}1737046$$
$$\log\sin M = 9{,}9905157$$
donc,
$$\log\sin\overline{DI} = \overline{4{,}9167006}.$$

Passant du sinus à l'arc, on trouve, à cause de

$$\log\delta = \log\sin\delta + \frac{\mu\sin^2\delta}{6\rho^2},$$

sans erreur sensible,

$$\frac{\mu\sin^2\delta}{6\rho^2} = 0{,}0000462 +$$

mais
$$\log\sin\overline{DI} = 4{,}9167006$$
donc
$$\log\overline{DI} = \overline{4{,}9167468} = 82555^t{,}64.$$

Ce résultat ne différant du précédent que de 2 centiemes de toise, et représentant la valeur du plus grand côté du triangle, il est prouvé par le fait, que la méthode de Legendre est applicable en toute circonstance: elle convient même à tout triangle géodésique formé par des lignes de plus courte distance, sur un sphéroïde quelconque peu différent d'une sphère, ainsi que ce célèbre géomètre l'a démontré. Cette méthode est donc tout à fait indépendante de l'aplatissement de la Terre, et par cela seul, elle nous paraît avoir de l'avantage sur celle que nous allons expliquer.

Résolution des triangles rectilignes formés par des cordes de la sphère terrestre.

155. Lorsqu'au centre de chaque station les angles horizontaux sont réduits aux angles des cordes (art. **150**), ces derniers, relatifs à

un même triangle, et ajoutés ensemble, devraient donner une somme égale à deux angles droits; mais l'excès ou le déficit, qui représente l'erreur totale des observations, se distribue sur chacun des angles, comme dans la méthode précédente. Quant à la ligne géodésique, prise pour base et réduite au niveau de la mer (art. **144**), on la remplace par la distance rectiligne qui joint ses extrémités (art. **143**). De cette manière, le premier triangle du réseau auquel cette base appartient a pour sommets les pieds des signaux projetés suivant la direction de la pesanteur, sur le prolongement de la surface de la mer. En résolvant donc ce triangle rectiligne, et calculant ensuite tous les autres triangles de proche en proche, ils représenteront les faces d'un polyèdre inscrit au globe terrestre. Telle est l'une des méthodes qui furent employées par Delambre, dans le calcul de la méridienne, comme je l'ai déjà dit.

Afin de ne laisser rien à désirer à ce sujet, voici un tableau extrait de ceux de la *Base du Système métrique*, tome I.

	NOMS des stations.	ANGLES observés.	EXCÈS sphérique.	ANGLES sphériques.	ANGLES des cordes.	ANGLES moyens.
43	Malvoisine.	40°36′ 56″81	— 0″13	40°36′ 56″84	36′ 56″71	36′ 56″68
	Lieursaint.	75.39.29,81	— 0,19	75.39.29,83	39.29,64	39.29,67
	Melun.....	63.43.33,79	— 0,17	63.43.33,82	43.33,65	43.33,65
		180° 0′ 0″41	— 0,49	180. 0. 0,49	0. 0,00	0. 0,00
	Somme des erreurs — 0″08					
44	Montlhéri..	55°10′ 0″10	— 0″14	55°10′ 1″18	10′ 1″04	10′ 1″03
	Malvoisine.	43.52. 2,31	— 0,12	43.52. 3,39	52. 3,27	52. 3,25
	Torfou.....	80.57.54,79	— 0,17	80 57.55,86	57.55,69	57.55,72
		179.59.57,20	— 0,43	180. 0. 0,43	0. 0,00	0. 0,00
	Somme des erreurs — 3,23					

La colonne intitulée *angles observés* contient les angles de position réduits à l'horizon et au centre.

La colonne suivante, qui a pour titre : *excès sphérique*, donne pour chaque angle horizontal, l'excès de cet angle sur l'angle des cordes correspondant; il se calcule par la méthode de l'art. **130**, ou plus directement encore au moyen d'une Table que Delambre a donnée, et qui a pour arguments la somme $K + K'$ et la différence $K - K'$ des côtés qui comprennent l'angle à réduire. Les trois excès partiels forment l'excès sphérique du triangle, tel qu'il se trouverait directement par la formule de l'art. **151**.

La cinquième colonne s'explique d'elle-même.

La sixième colonne comprend les angles des cordes, qui s'obtiennent en ôtant des angles sphériques les excès sphériques correspondants.

Enfin, la dernière colonne donne les angles moyens qui servent pour résoudre les triangles sphériques par le procédé de l'art. **150**.

A l'aide de ce tableau, et de la base de Melun à Lieursaint, réduite à sa corde, on aura les éléments nécessaires pour déterminer tous les côtés du réseau, soit par le procédé actuel, soit par les deux précédents.

La méthode de réduction au plan des cordes a été suivie pendant quelque temps au Dépôt de la Guerre; mais depuis 1817, époque à laquelle ont commencé les opérations de la nouvelle Carte de France, tous les registres géodésiques ont été rédigés, d'après ma proposition, conformément au principe de l'art. **100**, qu'on appliquait comme par instinct, même bien avant que Legendre en eût prouvé la légitimité.

Comme je suis entré dans assez de détails sur cette matière, je me bornerai à faire observer que la longueur d'un des côtés les plus éloignés de la base mesurée, doit être le milieu entre tous les résultats qui dériveraient du calcul de différentes chaînes de triangles, auxquelles ce côté serait commun.

156. *Déterminer la position d'un lieu d'où l'on aperçoit trois points donnés sur la carte.*

1[re] Solution. Si du point D (*fig.* 34), élevé au-dessus du plan ABC supposé horizontal, on a observé les angles ADB, ADC, ainsi que les distances zénithales des points A, B, C dont on connaît les distances respectives, on réduira à l'horizon les deux premiers angles,

afin que le point D puisse être considéré comme le pied de la verticale abaissée du lieu de l'observation sur le plan ABC; et pour lors, avec deux des distances horizontales AD, BD, CD déterminées par le calcul, on fixera la projection de ce lieu; c'est ce que l'on va voir.

Nommons β, γ les réductions à l'horizon des angles observés ADC, ADB. Soient en outre DA = D, DB = D′, DC = D″, angles ABD = x, ACD = y; adoptons, pour le triangle ABC, la notation de l'art. **47**, et enfin faisons abstraction de la courbure de la Terre.

Cela posé, dans le quadrilatère ABDC, supposé plan, les quatre angles vaudront ensemble deux angles droits, et les triangles ADC, ADB donneront respectivement

$$\mathrm{D} = \frac{b \sin y}{\sin \beta}, \qquad \mathrm{D} = \frac{c \sin x}{\sin \gamma};$$

d'où

$$\frac{b \sin \gamma}{c \sin \beta} = \frac{\sin x}{\sin y}, \qquad (m)$$

et par suite

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{b \sin \gamma + c \sin \beta}{b \sin \gamma - c \sin \beta}, \text{ ou bien } \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y)} = \frac{1 + \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma}}{1 - \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma}}.$$

Or, si l'on fait

$$\operatorname{tang} z = \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma}, \qquad (1)$$

l'expression précédente deviendra

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y)} = \frac{1 + \operatorname{tang} z}{1 - \operatorname{tang} z} = \operatorname{tang}\left(z + \frac{1^{\circ}}{2}\right);$$

et si, pour abréger, l'on pose

$$\delta = \tfrac{1}{2}(x-y), \quad \mathrm{S} = \tfrac{1}{2}(x+y) = 2^{\circ} - \tfrac{1}{2}(\mathrm{A} + \beta + \gamma), \qquad (2)$$

on aura

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang}\left(z + \frac{1^{\circ}}{2}\right)} = \cot\left(z + \frac{1^{\circ}}{2}\right) \operatorname{tang} \mathrm{S}.$$

δ étant connu, il s'ensuit que

$$x = S + \delta, \qquad y = S - \delta; \qquad (3)$$

δ changerait de signe si sa tangente était négative.

Quant aux valeurs de D, D′, D″, il est évident qu'elles seront données par les équations

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{b \sin y}{\sin \beta} = \frac{c \sin x}{\sin \gamma}, \\ D' &= \frac{c \sin (x + \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{a \sin (y - C)}{\sin (\beta + \gamma)}, \\ D'' &= \frac{b \sin (y + \beta)}{\sin \beta} = \frac{a \sin (x - B)}{\sin (\beta + \gamma)}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Cette solution, que l'on doit à Delambre, n'exige la construction d'aucune figure; elle nous paraît la plus simple et la plus commode de toutes celles que l'on pourrait donner du même problème. Cependant si l'on voulait une formule qui donnât immédiatement l'une des inconnues, x par exemple, on trouverait sans peine, en faisant $y = p - x$ dans la relation (m), et développant,

$$\cot x = \cot p \left(\frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma \cos p} + 1 \right);$$

ou faisant en outre $\tang \varphi = \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma \cos p}$, on aurait

$$\cot x = \cot p \frac{\sin (\varphi + \frac{1}{2} ^{\mathrm{Q}})}{\cos \varphi \cos \frac{1}{2} ^{\mathrm{Q}}},$$

expression dans laquelle $p = 4^{\mathrm{Q}} - A - \beta - \gamma$, et $\cos \frac{1}{2} ^{\mathrm{Q}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Quoiqu'il soit aisé de se rendre compte des changements que les formules ci-dessus éprouvent suivant la position du point D à l'égard du triangle ABC, nous ferons les remarques suivantes: 1° si le point A était dans l'intérieur du triangle BCD, on aurait

$$S = 2^{\mathrm{Q}} - \frac{1}{2}(4^{\mathrm{Q}} - A + \beta + \gamma) = \frac{A - \beta - \gamma}{2},$$

c'est-à-dire qu'il faudrait prendre le supplément à quatre angles droits de l'angle A du triangle ABC;

2°. Dans la même circonstance, il faudrait mettre $x + B$ et $y + C$ dans les valeurs de D″ et de D′, parce que les angles B, C seraient extérieurs au quadrilatère DBAC, au lieu de lui être intérieurs comme dans le premier cas;

3°. Lorsque le point D sera dans l'intérieur du triangle ABC, la somme des angles observés $\beta + \gamma$ surpassera nécessairement deux angles droits;

4°. Si le point D était placé sur la ligne $BC = a$, la somme $B + \gamma$ vaudrait précisément deux angles droits, et l'on aurait

$$\sin\beta = \sin\gamma, \qquad \text{tang}\, z = \frac{c}{b};$$

δ serait la différence des angles connus B, C, et alors

$$x = B, \qquad y = C.$$

Dans le même cas, on aurait

$$D' = \frac{a \sin o}{\sin o}, \quad D'' = \frac{a \sin o}{\sin o};$$

expressions qui laissent D′ et D″ indéterminées; mais ces distances pourront être calculées par les formules

$$D' = \frac{c \sin(B + \gamma)}{\sin\gamma}, \quad D'' = \frac{b \sin(C + \beta)}{\sin\gamma};$$

5°. Enfin, si $x + y = 2^Q$, on a $\sin x = \sin y$, et pour lors l'équation $\frac{b \sin\gamma}{c \sin\beta} = \frac{\sin x}{\sin y}$ se réduit à $\frac{b \sin\gamma}{c \sin\beta} = 1$. Quant à l'équation $\frac{x + y}{2} = 2^Q - \frac{1}{2}(A + \beta + \gamma)$, elle donne, dans la même circonstance, $\frac{1}{2}(A + \beta + \gamma) = 1^Q$, d'où $\beta + \gamma = 2^Q - A$: propriété qui appartient au quadrilatère inscrit. Ainsi, les quatre points D, A, C, B étant sur une même circonférence, le problème est indéterminé.

Ce problème est non-seulement utile pour trouver les positions des points secondaires d'une carte, et savoir d'avance si l'emplacement d'un signal que l'on se propose d'établir donnera des triangles assez bien conditionnés, mais encore pour déterminer les distances qui servent d'éléments aux réductions des angles que l'on aura observés près de ce signal : passons maintenant à son application.

TYPE DU CALCUL.

Supposons que les angles observés en D et réduits à l'horizon soient

$$\begin{aligned} \beta &= 37^g,6310, \\ \gamma &= 60,2535, \\ \beta + \gamma &= 97,8845; \end{aligned}$$

et que dans le triangle ABC

$$\begin{aligned} A &= 86^g,3406, \\ \log b &= 4,0211893, \\ \log c &= 4,1702617, \end{aligned}$$

on aura

$A =$	$86^g,3406$		$\log c =$	$4,1702617$
$\beta + \gamma =$	$97,8845$		$\log \sin \beta =$	$9,7460735$
$A + \beta + \gamma =$	$184,2251$		comp. $\log b =$	$5,9788107$
$\frac{1}{2}(A + \beta + \gamma) =$	$92,11255$		comp. $\log \sin \gamma =$	$0,0907911$
S.. . . . $=$	$107,88745$	$\log \operatorname{tang} z = + 48^g,9694$	$=$	$9,9859370$
δ.	$-8,22976$	50		
x.	$99,65769$	$\log \cot$. de $98,9694$	$=$	$8,2092227$
y.	$116,11721$		$\log \operatorname{tang} S =$	$0,9047133 -$
β.	$37,63100$	$\log \operatorname{tang} \delta = - 8^g,22976$	$=$	$9,1139360 -$
$y + \beta$. . . .	$153,74821$			
x.	$99,65769$			
γ.	$60,25350$			
$x + \gamma$. . . .	$159,91119$			

On a affecté du signe $-$ la tangente de δ, parce qu'elle résulte du

produit de deux facteurs affectés de signes différents; en effet, la tangente d'un angle aigu est positive, et la tangente d'un angle obtus est négative.

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\log b &= 4{,}0211893 \\
\log\sin y &= 9{,}9859308 \\
\text{c.}\log\sin\beta &= 0{,}2539265 \\
\log D &= \overline{4{,}2610466} = 18240{,}29 \\
\log c &= \overline{4{,}1702617} \\
\log\sin(x+\gamma) &= 9{,}7700514 \\
\text{c.}\log\sin\gamma &= 0{,}0907911 \\
\log D' &= \overline{4{,}0311042} = 10742{,}47
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log c &= 4{,}1702617 \\
\log\sin x &= 9{,}9999937 \\
\text{c.}\log\sin\gamma &= 0{,}0907911 \\
\log D &= \overline{4{,}2610465} = 18240{,}92 \\
\log b &= \overline{4{,}0211893} \\
\log\sin(y+\beta) &= 9{,}8223470 \\
\text{c.}\log\sin\beta &= 0{,}2539265 \\
\log D'' &= \overline{4{,}0974628} = 12515{,}92
\end{aligned}$$

Il conviendra de calculer D' et D'' par les autres formules (4), ce qui servira de vérification; et si l'on désire avoir ces distances avec plus d'exactitude, il faudra employer les logarithmes avec 8 décimales.

On détermine encore la position du point D par une construction qui dispense de tout calcul, puisqu'il ne s'agit que de décrire sur AB et AC des arcs respectivement capables des angles observés γ et β : sur quoi, voyez la *Trigonométrie* de Legendre, ou celle de M. Lacroix; mais cette opération graphique n'est en usage que dans les opérations topographiques de détail.

2[e] SOLUTION. Si les points A, B, C étaient les sommets d'un triangle dont l'excès sphérique fût sensible; en d'autres termes si les quatre points A, B, C, D étaient considérés comme ceux d'un réseau trigonométrique du premier ordre, la position du point D à l'égard des trois autres se déterminerait sur la sphère d'une manière toute semblable, et c'est ce que n'a point fait remarquer Delambre. D'abord on ferait abstraction de l'excès sphérique du quadrilatère ACDB, et l'on procéderait comme ci-dessus pour connaître approximativement les angles x, y et pouvoir calculer les excès sphériques ε, ε' des triangles ADC, ADB, dans chacun desquels on connaîtrait deux angles et un côté : ensuite on traiterait ces mêmes triangles comme sphériques, et l'on aurait entre les quatre angles du quadrilatère ABDC cette relation

$$4^{q} + \varepsilon + \varepsilon' = A + \beta + \gamma + (x + y),$$

d'où

$$\tfrac{1}{2}(x+y) = 2^{q} + \tfrac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon') - \tfrac{1}{2}(A+\beta+\gamma).$$

De plus, les triangles sphériques ABD, ADC donnant

$$\sin AD = \frac{\sin c \sin x}{\sin \gamma}, \qquad \sin AD = \frac{\sin b \sin y}{\sin \beta},$$

on aurait

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin b \sin \gamma}{\sin c \sin b},$$

de sorte qu'en faisant $\tan z = \frac{\sin c \sin \beta}{\sin b \sin \gamma}$, il en résulterait, comme dans le cas du quadrilatère plan,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(x+y) \cot(z+50^{g}).$$

Cette solution suppose que les angles observés sont réduits à l'horizon et tout à fait exempts d'erreur.

Appliquons cette seconde solution aux données suivantes, puisées dans le premier volume de la *Nouvelle description géométrique de la France*, p. 306; mais en corrigeant une faute d'impression qui s'y est glissée.

NOMS DES STATIONS.	ANGLES SPHÉRIQUES.	COTÉS.	LOG. COTÉS.
C Monclar.......	$34^{g}2611,29$	$23797^{m}84$	$4.3765385 = \log c$
A Escassefort.....	$128.5778,19$	$41829,06$	$4.6214781 = \log a$
B Romestaing....	$37.1614,83$	$25588,81$	$4.4080501 = \log b$
	$200.0004,31$		

A la station de Xaintrailles, que nous désignerons par D, les angles observés et réduits à l'horizon sont, d'après les registres manuscrits,

$$ADC = \beta = 45^{g}\,7309,7; \text{ excès sphérique } \varepsilon = 6'',7;$$
$$ADB = \gamma = 43\,.1179,3; \text{ excès sphérique } \varepsilon' = 5\,,7.$$

Ainsi, à cause de $A = 128^g.5778,19$, on a

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(A+\beta+\gamma) &= 108^g.7133,60 \\ 2^Q + \tfrac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon') &= 200\ .0006,20 \\ \hline \tfrac{1}{2}(x+y) &= 91\ .2872,60;\ \log\text{tang} = 0,8610617 \end{aligned}$$

Passant ensuite des arcs aux sinus (art. **149**), on obtient

$$\log\sin b = 4,4080489, \qquad \log\sin c = 4,3765375;$$

et calculant l'angle auxiliaire z, il vient

$$\begin{aligned} \log\text{tang}\, z = 9,9897534,\ z &= 49^g.2490,6 \\ &+ 50 \\ \hline z + 50^g &= 99\ .2490,6;\ \log\cot = 8,0717453. \end{aligned}$$

De là

$$\log\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(x-y) = 8\ .9328070$$

et enfin

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(x-y) &= 5^g.4403,6 \\ \tfrac{1}{2}(x+y) &= 91\ .2872,6 \\ \hline x &= 96\ .7276,2 \\ y &= 85\ .8469,0 \end{aligned}$$

Les angles x, y étant trouvés, on traitera les triangles ABD, ACD comme sphériques, et il viendra pour la distance D de Xaintrailles à Escassefort,

$$\log\sin D = \frac{\sin c \sin x}{\sin \gamma} = 4,5789126$$

$$\log\sin D = \frac{\sin b \sin y}{\sin \beta} = 4,5789113;$$

puis revenant du sinus à l'arc, on aura

$$\begin{aligned} \log D = 4,5789152,\ D &= 37924^m,10 \\ \log D = 4,5789139,\ D &= 37923\ ,97 \\ \hline \text{par un milieu},\ D &= 37924\ ,03 \end{aligned}$$

Quant aux distances de Xaintrailles à Romestaing et à Monclar, désignées respectivement par D′ et D″, on trouvera

$$D' = 30776^{m},7, \quad D'' = 34195^{m},2.$$

L'exactitude de ces résultats doit inspirer une grande confiance dans l'application de la méthode qui fait le sujet de cet article.

157. *Trouver la plus courte distance de deux lieux dont on connaît la latitude et la longitude géographiques.*

Par exemple, on demande la plus courte distance de Paris au cap de Bonne-Espérance?

D'après la *Connaissance des Temps*, latitude de l'Observatoire royal de Paris = 48° 50′ 13″, complément ou colatitude. $c = 41^{\circ}\ 9'\ 47''$

Latitude australe de l'Observatoire du cap de Bonne-Espérance = 33° 56′ 3″; de là, distance au pôle boréal.. $b = 123^{\circ} 56'\ 3''$

Longitude orientale du même lieu, comptée de Paris.. . . . . $A = 16^{\circ}\ 8'\ 21''$

Soient donc A le pôle nord, B Paris, C le Cap de Bonne-Espérance; on aura, pour résoudre le triangle sphérique ABC, dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris, les deux formules de l'art. **76**, savoir :

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} c \cos A,$$

$$\cos a = \frac{\cos c}{\cos \varphi} \cos (b - \varphi).$$

Opérant par logarithmes, on a

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tang} c &= 9,9416582 \\ \log \cos A &= 9,9825378 \\ \hline \log \operatorname{tang} \varphi &= 9,9241960 \\ \hline \varphi &= 40^{\circ}\ 1'29'',5 \\ b &= 123.56.\ 3,0 \\ \hline b - \varphi &= 83.54.33,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cos c &= 9,8767024 \\ \text{c.} \log \cos \varphi &= 0,1159041 \\ \log \cos (b - \varphi) &= 9,0257259 \\ \hline \log \cos a &= 9,0183324 \\ a &= 84^{\circ} 0' 45'',9 \end{aligned}$$

Vérifions ce résultat au moyen des deux formules

$$\operatorname{tang} \varphi' = \operatorname{tang} b \cos A,$$
$$\cos a = \frac{\cos b}{\cos \varphi'} \cos(c - \varphi');$$

$\operatorname{tang} b = 0,1720894 -$	$\cos b = 9,7468209 -$
$\cos A = 9,9825378 +$	$\text{comp. } \cos \varphi' = 0,2413107 +$
$\operatorname{tang} \varphi' = 0,1546272 -$	$\cos(c - \varphi') = 9,0301995 -$
$\varphi = -54^\circ 59' 27'',4$	$\cos a = 9,0183311 +$
$c = 41.\ 9.47$	$a = 84^\circ 0' 44'',9$
$c - \varphi' = 96.\ 9.14,4$	

Il s'agit maintenant d'évaluer l'arc a en myriamètres; or le quart du méridien étant de 10 000 000 de mètres, on a $90^\circ = 1000$ myriamètres; et puisque $a = 84^\circ,0125$, on trouve proportionnellement que $a = 933 \frac{47}{100}$ myriamètres, ou à très-peu près 2100 lieues de 25 au degré.

158. *Les trois côtés d'un triangle sphérique étant donnés, trouver les angles au moyen des logarithmes à dix décimales.*

Soient f, g, h les côtés donnés, et F, G, H les angles cherchés. Le tableau suivant fait connaître ces trois côtés, avec leurs log-sinus et log-cosinus tirés des Tables de Vlacq.

COTÉS DONNÉS.	LOG. SINUS.	LOG. COSINUS.
$f = 76^\circ 35' 36''$	9,98800 07512	9,36522 78723
$g = 50\ 10.30$	9,88536 35668	9,80648 17481
$h = 40.\ 0.10$	9,80809 25880	9,88423 62983

Afin de donner un exemple numérique de la méthode de l'art. **105**, nous calculerons la formule

$$\cos F = \frac{\cos f - \cos g \cos h}{\sin g \sin h},$$

dans laquelle nous ferons $A = \frac{\cos f}{\cos g \cos h}$, pour lui donner cette forme:

$$\cos F = -\cot g \cot h\,(1 - A).$$

Or, par l'article cité, l'on a

$$\log A = \log a \pm r,$$
$$\log(1 - A) = \log(1 - a) \mp \frac{a}{1-a} - \frac{a}{(1-a)^2}\cdot\frac{kr^2}{2} \mp \text{etc.};$$

arrêtant cette série au terme en r^2, ainsi que cela est permis quand la différence r est très-petite; puis supposant que

$$\log(1 - A) = \log(1 - a) \pm R, \quad \text{et } r^1 = \frac{r}{1-a},$$

on aura évidemment

$$R = ar^1\left(1 \pm \frac{kr^1}{2}\right);$$

enfin, prenant de part et d'autre le logarithme vulgaire, il viendra, à cause de $\mu k = 1$,

$$\log R = \log a + \log r^1 \pm \frac{r^1}{2}.$$

TYPE DU CALCUL.

$\log.\cos f$ =	9,36522 78723
$-$l. $\cos g \cos h$ =	9,69071 80464
différen. $\log A$ =	9,67450 98259
$\log a$ =	9,67451 20959
r =	0,00000 22700
$\log r$ =	4,35602 59
$-\log(1-a)$ =	9,72212 37
$\log r^1$ =	4,63390 22
$\log a$ =	9,67451 21
$\frac{1}{2}r^1$ =	— 22
$\log R$ =	4,30841 21

valeur approchée a =	0,47262
$1-a$ =	0,52738
$\log A$ =	$\log a - r$
$\log(1-a)$ =	9,72212 36559
R =	+ 20343
$\log(1-A)$ =	9,72212 56902
l. $\cot g \cot h$ =	9,99726 18916
$\log(-\cos F)$ =	9,71938 75818

Cette méthode et cet exemple ont été donnés par Legendre dans la *Connaissance des Temps* de 1819. Des calculs semblables conduiront à

$$\log\cos G = 9{,}86933\ 39724,$$
$$\log\cos H = 9{,}91728\ 60313,$$

et les tables citées fourniront, d'après ces valeurs, les résultats suivants :

$$F = 121^\circ 36' 19'',86390,$$
$$G = 42.15\ 13{,}46007,$$
$$H = 34.15.\ 2{,}77904.$$

On pourrait déterminer le sinus de chacun de ces angles, de F par exemple, en faisant $A = \cos^2 F$, et procédant comme à l'art. **107**. *Voyez* au surplus le Mémoire de Legendre, où l'on trouve ces valeurs :

$$\log\sin F = 9.93027\ 46482,$$
$$\log\sin G = 9.82763\ 74638,$$
$$\log\sin H = 9.75036\ 64850.$$

Observons maintenant que si, dans le triangle actuel, on abaissait de l'angle H une perpendiculaire sur le côté opposé h, cette perpendiculaire tomberait en dehors, parce que le segment φ de ce côté et celui θ correspondant de l'angle opposé seraient tous deux négatifs. En effet, des relations

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} g \cos F, \qquad \cot\theta = \cos g \operatorname{tang} F,$$

démontrées art. **76**, on tire, d'après ce qui précède,

$$\log.\operatorname{tang}\varphi = 9.7982694-; \quad \log.\cot\theta = 0.0173688-;$$

d'où

$$\varphi = -\ 32^\circ 8' 50'', \quad \theta = -\ 43^\circ 51' 16'',5.$$

Ainsi les deux autres segments analogues sont

$$\varphi' = 72^\circ 9' 0'' \qquad \theta' = 78^\circ\ 6' 19'',5$$

puisque d'ailleurs, $h = 40.0.10 \qquad H = 34.15.3.$

Enfin l'arc perpendiculaire dont il s'agit, et que nous désignerons par p, étant déduit de la proportion des quatre sinus, on a

$$\sin p = \sin g \sin F;$$

de là

$$\log . \sin p = 9.8156382, \text{ et } p = 40^\circ 51' 2'',74.$$

Voilà donc onze éléments connus d'un triangle, dont plusieurs pourront servir de données pour vérifier celles des formules trigonométriques que l'on voudra choisir comme exercice de calcul.

Pour donner une nouvelle application de la formule générale d'interpolation rapportée à l'art. **106**, je vais chercher l'angle G, dans une table qui donne les sinus et cosinus logarithmiques de minute en minute; or j'y vois que cet angle, donné par son cosinus, est compris entre $42^\circ 15'$ et $42^\circ 16'$. En s'arrêtant donc à $a = 42^\circ 15'$, et ayant seulement égard aux premières et secondes différences, on a

$$\begin{aligned} \log \cos G &= 9{,}86933\ 39724 = y \\ \log \cos 42^\circ 15' &= 9{,}86935\ 97165 = A \\ y - A &= -\quad 2\ 57441 \end{aligned}$$

La même table donne $\delta A = -1147947$, $\delta^2 A = -571$, $h = 60''$; ainsi

$$n = \frac{y - A}{\delta A} = 0{,}224, \qquad \frac{n-1}{2}\,\delta^2 A = 222,$$

et plus exactement,

$$n = \frac{-257441}{-1147725} = 0{,}22431;$$

enfin

$$G = a + nh = 42^\circ 15' + 0{,}22431 \times 60'' = 42^\circ 15'\, 13'',4586.$$

Si la table était calculée pour des intervalles de $10''$ comme celle de Vlacq, qui a pour titre : *Trigonometria artificialis*, on aurait précisément le résultat ci-dessus.

CHAPITRE XI.

DU TRACÉ ET DU CALCUL DE LA MÉRIDIENNE TERRESTRE, ET DES PERPENDICULAIRES A CETTE MÉRIDIENNE, ETC.

159. En concevant un plan par l'axe de rotation de la Terre, et par le zénith d'un lieu de sa surface, ce plan, prolongé jusqu'aux limites de la sphère céleste, y tracera la circonférence d'un grand cercle qui sera le méridien de ce lieu. Tous les points de la surface de la Terre qui auront leur zénith sur cette circonférence seront sous le même méridien céleste, et formeront le méridien terrestre correspondant. Vu l'immense grandeur du rayon de la sphère étoilée, les verticales de tous ces points peuvent être censées parallèles au plan du méridien céleste : on peut donc définir le méridien terrestre une courbe formée par la jonction des pieds de toutes les verticales parallèles au plan du méridien céleste. Cette courbe s'écarte de ce plan, si la Terre est un sphéroïde irrégulier, et alors elle est à *double courbure;* mais elle est tout entière dans ce plan, si la Terre est un solide de révolution; car toutes les normales à la surface de ce solide rencontrant l'axe de rotation, celles qui passent par les points de la courbe génératrice sont nécessairement dans le plan de cette courbe, et par conséquent dans celui du méridien céleste.

Si, par le moyen d'une lunette dirigée vers le pôle élevé, et dont la propriété est de se mouvoir exactement dans un plan vertical, on place au loin vers le nord et vers le midi deux signaux dans l'axe optique de cet instrument; puis si l'on transporte la lunette à l'un de ces signaux, et qu'on la dirige sur le premier lieu de l'observateur pour faire placer d'autres signaux de la même manière, et ainsi de suite, la ligne menée par tous ces signaux sera la méridienne terrestre, à

laquelle on donnera autant d'étendue que le terrain pourra le permettre.

Au lieu de tracer effectivement cette ligne sur la surface de la Terre, on emploie une construction qui conduit au même résultat sans présenter les mêmes difficultés : voici en quoi elle consiste.

Soit ABCDE.... (*fig.* 34) une chaîne de triangles étendue dans le sens du méridien, et dont les côtés, calculés par la méthode de l'art. **150**, sont de très-petits arcs du sphéroïde terrestre. Supposons que l'on connaisse par l'observation l'*azimut* ou l'inclinaison du côté AC sur le premier côté AM de la méridienne; alors on trouvera, par la Trigonométrie, le point M où cette courbe rencontre le côté BC. Les points A, B, C étant dans un même plan horizontal, la ligne AM sera de même dans ce plan, et représentera par conséquent une tangente à la surface de la Terre; mais le prolongement MM′ de cette ligne se trouvera au-dessus du plan du second triangle horizontal BCD; si donc, sans changer l'angle CMM′, on rabat la ligne MM′ sur le plan de ce second triangle BCD, en la faisant tourner autour de BC comme axe, le point M′ décrira un très-petit arc de cercle qui pourra être considéré comme une droite perpendiculaire au plan BCD; ainsi l'opération se réduit à plier le côté MM′ suivant une verticale, et à calculer la distance AM′ pour trouver la position du point M′. En pliant ainsi de proche en proche les parties de la méridienne sur les triangles horizontaux correspondants, on aura, à l'aide du calcul, la direction et la longueur de cette méridienne, depuis une extrémité de la chaîne des triangles jusqu'à l'autre.

Nous ferons remarquer, à cet égard, que l'on emploie les angles sphériques de chaque triangle, c'est-à-dire les angles horizontaux corrigés chacun du tiers de la quantité dont leur somme diffère de deux angles droits plus l'excès sphérique (art. **151**). Ainsi, dans le premier triangle partiel ACM, on connaîtra les deux angles A, C; le premier est l'azimut supposé observé avec une grande précision, et le second est un des angles sphériques du triangle ABC. Au moyen de ces deux angles et du côté AC connu, l'on évaluera, par la méthode de l'article cité, l'excès sphérique ε du triangle ACM, et le troisième angle sphérique M sera $= 200^g + \varepsilon - A - C$; alors, ôtant $\frac{1}{3}\varepsilon$ de chaque angle, leur somme sera réduite à deux angles droits, et l'on pourra, par ce

moyen, procéder, comme à l'art. 159, pour déterminer le côté AM et le segment CM, c'est-à-dire que l'on aura ces deux proportions :

$$\sin(200^g - A - C + \tfrac{2}{3}\varepsilon) : \sin(C - \tfrac{1}{3}\varepsilon) :: AC : AM,$$
$$\sin(200^g - A - C + \tfrac{2}{3}\varepsilon) : \sin(A - \tfrac{1}{3}\varepsilon) :: AC : CM.$$

Si l'on traite de la même manière le triangle ABM dans lequel les angles sphériques A, B seront connus, on obtiendra le segment BM, et, en l'ajoutant à CM, la somme devra être égale à BC déterminé directement.

Il est évident que le second côté MM′ de la méridienne se déterminera par un procédé tout pareil, puisque dans le triangle BMM′ on connaîtra le côté BM et les deux angles adjacents B, M ; mais la résolution du triangle ABM′ donnerait immédiatement AM′. Pour abréger ainsi le calcul de la méridienne, il faut faire un choix de triangles bien conditionnés (art. 109).

Quant à la partie M′M″ qui se trouve extérieure à la chaîne des triangles, on pourra l'obtenir ainsi qu'il suit : on prolongera CD jusques en N, afin de former le triangle MCN dans lequel le côté CM et les angles C, M seront connus, et l'on déterminera, comme ci-dessus, les côtés MN, CN et l'angle sphérique N. Ainsi, dans le quadrilatère sphérique NDFM″, l'on connaîtra les trois angles, DNM″ supplément à deux droits de CNM, NDF supplément à deux droits de CDF, et DFM″ supplément à quatre droits de DFE + EFG + GFH : on pourra donc résoudre le triangle DNF, c'est-à-dire déterminer, par la méthode exposée à l'art. 153, les angles sphériques DNF, DFN et le côté NF, diagonale du quadrilatère proposé. Il résultera de cette détermination, que dans le triangle NFM″ l'on connaîtra le côté NF et les deux angles adjacents, savoir l'angle FNM″ $= 200^g -$ CNM $-$ CNF, et l'angle NFM″ = DFM″ − DFN; ainsi l'on pourra calculer les côtés NM″ et FM″, passer de là à la détermination de M″ M^{IV} à l'aide du triangle M″HM^{IV} qui offrira pour données le côté M″H = FH − FM″ et les angles sphériques adjacents M″, M^{IV}HM″; enfin, atteindre l'extrémité M^{VI} de la méridienne.

S'il arrivait, cependant, comme dans la partie sud de la méridienne de France, limitée à l'île de Formentera (*Pl.* V), que le réseau de

triangles qui en mesure l'étendue s'éloignât beaucoup trop de cette ligne pour que l'on pût opérer facilement de cette manière, on choisirait le méridien qui traverse la plus grande partie de ce réseau, et l'on supposerait alors que l'arc rectifié de cette ligne auxiliaire est égal à celui de la ligne méridienne principale qui serait comprise entre les mêmes parallèles. On verra au chapitre XVI un exemple numérique pour ce cas particulier.

160. Une ligne tracée ainsi qu'il vient d'être dit, ou déduite de mesures trigonométriques, par le moyen que l'on vient d'indiquer, se nomme *ligne géodésique :* elle a la propriété d'être la plus courte que l'on puisse mener entre ses deux extrémités sur la surface de la Terre, et elle y mesure par conséquent la distance itinéraire des lieux; c'est ce que l'on démontrera plus bas. A la rigueur, cette courbe diffère un peu du méridien terrestre, et c'est un fait dont il est facile de se rendre raison; car pour que la ligne que déterminent les opérations géodésiques coïncidât avec le méridien terrestre, il faudrait que les verticales des points A, M, M', M'' fussent parallèles au plan du méridien céleste, c'est-à-dire à celui qui passe par la verticale du point A et par l'axe du monde; circonstance qui n'a pas lieu lorsque la Terre n'est pas un solide de révolution. Cependant, dans l'état actuel des choses, la différence entre les deux courbes dont il s'agit est si petite, qu'il est inutile d'y avoir égard.

161. Maintenant, si l'on imagine un cercle perpendiculaire au méridien céleste, et passant par la verticale du lieu de l'observateur, il représentera le premier vertical de ce lieu. L'ensemble de tous les points de la surface de la Terre qui auront leur zénith à la circonférence de ce cercle, formera la perpendiculaire à la méridienne, que l'on tracera absolument comme il est indiqué ci-dessus.

Sur la sphère, les perpendiculaires à la méridienne sont des grands cercles qui se coupent tous à l'équateur en deux points diamétralement opposés; mais sur l'ellipsoïde de révolution, et à plus forte raison sur le sphéroïde irrégulier, ces perpendiculaires concourantes sont des courbes à double courbure. En effet, soit A un lieu situé entre le pôle et l'équateur, et ABB' (*fig.* 36) la perpendiculaire à la

méridienne PA; le premier côté AB de cette ligne sera dans le plan AMB déterminé par la verticale AM et par le côté AB. De même le second côté BB′ sera dans le plan BNB′, BN étant la verticale du point B: or on verra, au chapitre suivant, que CM > CN; la verticale BN sera donc inclinée sur le plan AMB. Il en sera de même de la ligne BB′ qui représente le prolongement de AB, plié suivant une droite parallèle à BN. On prouverait pareillement que B′B″ s'écarte du plan BNB′, et ainsi de suite; donc les quatre points A, B′, B″, B‴ ne sont pas dans un même plan; donc enfin la perpendiculaire à la méridienne est en général une courbe à double courbure.

Quelle que soit la nature du sphéroïde terrestre, les parallèles à l'équateur sont des courbes dont tous les points sont à la même latitude : sur le sphéroïde de révolution, ces courbes sont planes et circulaires.

162. La situation d'un lieu est déterminée lorsque l'on connaît la perpendiculaire à la méridienne, ou le parallèle sur lequel il se trouve, et sa position sur cette perpendiculaire ou sur ce parallèle. Donc lorsque tous les triangles qui forment le canevas d'une carte géographique ont été calculés et orientés d'après les principes exposés précédemment, on obtient les positions respectives des sommets de leurs angles, par le moyen de leurs coordonnées ou de leurs distances à la méridienne et à la perpendiculaire du lieu principal. Voici comment on calcule ces distances par la méthode de Legendre, et lorsque les sommets des triangles s'écartent peu de la méridienne.

Supposons, comme ci-dessus, que les triangles ABC, BCD (*fig.* 34) fassent partie d'une chaîne quelconque d'autres triangles dont les côtés soient des arcs de grand cercle d'une sphère ayant pour rayon la distance du niveau de la mer au centre de la Terre, et que l'on connaisse par l'observation l'angle CAX qui mesure l'azimut z du côté AC, ou son inclinaison par rapport à la méridienne AX; on calculera, par la méthode de l'art. **152**, l'excès sphérique ε propre au triangle rectangle AcC, et l'on établira ensuite ces deux proportions, pour trouver Ac, Cc,

$$\sin(100^g - \tfrac{1}{3}\varepsilon) : \cos(z - \tfrac{2}{3}\varepsilon) :: AC : Ac = x,$$
$$\sin(100^g - \tfrac{1}{3}\varepsilon) : \sin(z - \tfrac{1}{3}\varepsilon) :: AC : Cc = y.$$

L'azimut de AB est connu immédiatement à cause de. . . . . . BAX = CAB — CAX ; et, si l'on calcule l'excès sphérique ε' propre au triangle ABM', on aura

$$AM'B = 200^g - M'AB - ABM' + \varepsilon'.$$

Pour déterminer les côtés AM', BM', il faudra, comme nous l'avons déjà dit, ôter de chacun des angles sphériques du triangle ABM' le tiers de ε', et l'on aura ces deux proportions :

$$\sin(200^g - A - B + \tfrac{2}{3}\varepsilon') : \sin(B - \tfrac{1}{3}\varepsilon') :: AB : AM',$$
$$\sin(200^g - A - B + \tfrac{2}{3}\varepsilon') : \sin(A - \tfrac{1}{3}\varepsilon') :: AB : BM',$$

en désignant respectivement par A, B les angles sphériques M'AB, ABM'.

On connaîtra donc dans chacun des triangles rectangles A*b*B, M'*d*D, deux angles et l'hypoténuse, c'est-à-dire tout ce qu'il faut pour déterminer les côtés A*b*, *b*B, et M'*d*, *d*D. Donc les distances des points B, D à la méridienne AX et à la perpendiculaire AY seront connues.

Traitant de la même manière le triangle ACN ou M'DN, pour avoir AN et DN prolongement de CD, et ensuite le triangle DNF, pour connaître le côté NF et les angles DNF, DFN, il sera facile de calculer les coordonnées du point F.

La distance *f*F et les angles DFN, NF*f* étant connus, on aura

$$fFP = 200^g - EFD - DFN - NFf;$$

car tous les angles horizontaux autour d'un même point de station valent quatre angles droits; ainsi dans le triangle rectangle *f*FP on connaîtra deux angles et un côté; on pourra donc calculer l'excès sphérique qui lui convient, l'angle FP*f* et les côtés *f*P, FP. Résolvant ensuite le triangle rectangle *e*EP, on aura de même la position du point E à l'égard de la méridienne AX et de sa perpendiculaire AY, c'est-à-dire les distances E*e*, A*e* = AP — *e*P. Il est nécessaire, avant tout, de figurer, d'après l'échelle, la chaîne des triangles observés, afin de voir si ceux tels que ACN, *e*EP, etc., que l'on forme pour faciliter le calcul des distances à la perpendiculaire et à la méridienne, n'ont pas des angles trop obtus ou trop aigus.

Telles sont en peu de mots deux méthodes de calcul que l'on peut employer pour trouver la longueur d'une ligne géodésique quelconque comprise entre deux points tels que A et X. Mais en considérant la ligne AX comme une méridienne, on voit que l'on détermine en même temps les azimuts d'un grand nombre de côtés de la chaîne; on peut donc vérifier si les azimuts conclus de la série des triangles s'accordent avec ceux qui résultent de l'observation.

Nous exposerons plus tard, à l'art. **201**, plusieurs méthodes analytiques beaucoup plus commodes que les deux précédentes, et applicables, soit à la détermination d'un arc de méridien, soit à celle d'un arc de parallèle.

163. Afin de donner un exemple du calcul rigoureux des distances à la méridienne et à la perpendiculaire, dans le cas où la Terre peut être supposée sphérique, soient A le Panthéon, et B Dammartin. Alors l'azimut BAX compté du nord sera $z = 51^g{,}4003''$, et le logarithme de la distance AB ou K sera $\log K = 4{,}5249711$.

Il s'agit d'abord d'évaluer l'excès sphérique du triangle rectangle AB*b*; or on a art. (**100**)

$$s = \tfrac{1}{2} K^2 \sin z \cos z,$$

s étant l'aire de ce triangle; partant

$$\begin{aligned}
\log \tfrac{1}{2} &= 9{,}69897 \\
2 \log K &= 9{,}04994 \\
\sin z &= 9{,}85883 \\
\cos z &= 9{,}83972 \\
\log s &= 8{,}44746 \\
\log.\text{const.} &= 2{,}19612 \\
\log.\text{excès sph. } \varepsilon &= 0{,}64358 \qquad \varepsilon = 4''{,}401 \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \tfrac{1}{3}\varepsilon = 1{,}467;
\end{aligned}$$

de là $\qquad z - \tfrac{2}{3}\varepsilon = 51^g{,}4000''{,}07, \quad z - \tfrac{1}{3}\varepsilon = 51^g{,}4001''{,}53;$

et à cause de

$$x = \frac{K\cos(z-\frac{2}{3}\varepsilon)}{\cos\frac{1}{3}\varepsilon} = \frac{K\cos(z-\frac{2}{3}\varepsilon)}{1-\frac{1}{18}\varepsilon^2} = K\cos(z-\tfrac{2}{3}\varepsilon)\left[1+\tfrac{1}{18}\varepsilon^2\ldots\right],$$

$$y = \frac{K\sin(z-\frac{1}{3}\varepsilon)}{\cos\frac{1}{3}\varepsilon} = \frac{K\sin(z-\frac{1}{3}\varepsilon)}{1-\frac{1}{18}\varepsilon^2} = K\sin(z-\tfrac{1}{3}\varepsilon)\left[1+\tfrac{1}{18}\varepsilon^2\ldots\right],$$

on aura, en convertissant l'excès sphérique en parties du rayon dans le facteur $[1+\frac{1}{18}\varepsilon^2\ldots]$, pour satisfaire au principe de l'homogénéité,

$\log K =$	4,5249711	. . . .	4,5249711
$\text{l.}\cos(z-\frac{2}{3}\varepsilon) =$	9,8397211	$\text{l.}\sin(z-\frac{1}{3}\varepsilon) =$	9,8588296
log 1[er] terme de x, =	4,3646922	log 1[er] terme de y, =	4,3838007
$\log\frac{1}{18} =$	8,74473	. . . .	8,74473
$2\log\varepsilon =$	1,28716	. . . .	1,28716
$2\sin 1'' =$	8,39224	. . . .	8,39224
log 2[e] terme =	2,78882	log 2[e] terme =	2,80793
2[e] terme =	0^m,0000000615	2[e] terme =	0^m,0000000642.

Ces seconds termes sont tout à fait insensibles; ainsi en s'en tenant aux premiers, on a

$$x = 23157^m{,}53, \quad y = 24199^m{,}18.$$

164. Les géographes emploient pour calculer les distances à la méridienne et à la perpendiculaire, un procédé un peu plus commode et qu'il importe de faire connaître, quoiqu'il ne soit pas aussi exact que le précédent. Ils mènent par tous les sommets des triangles des parallèles à la méridienne et à la perpendiculaire; par ce moyen, les côtés de ces triangles deviennent les hypoténuses de triangles rectangles qu'ils résolvent en partant de l'azimut connu, et sans tenir compte de l'excès sphérique, parce qu'ils considèrent tous les triangles de la chaîne comme décrits sur une surface plane. Par exemple, la résolution des triangles rectangles APM, AP'M' (*fig.* 37) donnera les coordonnées absolues xy, $x'y'$ des points M, M'. La résolution du

triangle $M'M''b$ fera de même connaître les distances relatives bM'', bM'; et comme les coordonnées absolues du point M'' sont x'', y'', on aura

$$x'' = AP' + bM', \qquad y'' = P'M' - bM''.$$

Pareillement, lorsque l'on aura calculé les distances dM'', dM''', on aura, pour coordonnées absolues du point M''',

$$x''' = AP'' + dM'', \qquad y'' = P''M'' + dM''',$$

et ainsi du reste.

C'est de cette manière que les distances des lieux de la France à la méridienne et à la perpendiculaire qui passe par l'Observatoire de Paris, ont été calculées approximativement par Cassini. Nous ne nous arrêterons pas à montrer comment on détermine les angles aigus des triangles rectangles $M'bM''$, $M''dM'''$,..., ou les angles d'inclinaison de leurs hypoténuses par rapport à des parallèles à la méridienne, parce que cette opération ne présente aucune difficulté, dès que l'on connaît l'azimut de départ; mais nous ferons observer que lorsque l'on enregistre les distances à la méridienne et à la perpendiculaire, il importe d'indiquer le sens dans lequel elles doivent être prises; et, à cet égard, on peut adopter la convention établie dans la théorie des courbes, relativement aux signes; par exemple, admettre que dans la région sud-ouest, limitée par la méridienne et sa perpendiculaire, les coordonnées x, y sont positives. Alors les signes seront donnés par le tableau suivant:

Région sud-ouest.	$+x$, $+y$,
Région nord-ouest.. . . .	$-x$, $+y$,
Région nord-est.	$-x$, $-y$,
Région sud-est..	$+x$, $-y$.

Si, dans le calcul des distances à la méridienne et à la perpendiculaire, on désigne par K le côté connu, et par Z son angle d'inclinaison avec le méridien d'une de ses extrémités, compté du sud à l'ouest et depuis zéro jusqu'à 400^g, on aura généralement

$$x = K \cos Z, \quad y = K \sin Z;$$

en sorte qu'en observant la règle des signes de sinus et cosinus (art. 46), on saura tout de suite à quelle région appartiennent x et y.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA LIGNE GÉODÉSIQUE, DÉDUITES DU MODE DE SON TRACÉ.

165. Soient, comme ci-dessus, ABC, BCD (*fig.* 38) deux triangles consécutifs d'un réseau, et $AM = ds$ l'élément ou le premier côté d'une ligne géodésique quelconque; MM′ le prolongement de cette ligne. Si l'on prend $MM' = ds$, et qu'on le plie suivant la verticale M′N au second triangle BCD, on aura MN ou ds' égal à ce prolongement, et cela à un infiniment petit près du troisième ordre; car l'angle $M'MN = i$ étant considéré comme un infiniment petit du premier ordre, on a, à cause du triangle rectangle élémentaire M′NM,

$$ds' = ds \cos i = ds\left(1 - \frac{i^2}{2}\right) = ds - \frac{i^2 ds}{2},$$

en négligeant les termes d'un ordre supérieur à i^2; mais $\frac{i^2}{2} ds$ est une quantité du troisième ordre; donc $ds' = ds$; donc la propriété d'une ligne géodésique s résulte de ce que sa différentielle ds est constante.

D'un autre côté, la normale

$$M'N = ds \sin i = ds\left(i - \frac{i^3}{2.3}\right) = ids - \frac{i^3}{6} ds,$$

ou simplement $M'N = ids$; donc la normale comprise entre le prolongement du premier côté de la ligne géodésique et la surface terrestre est du second ordre. On remarquera que puisque la ligne géodésique AMN est égale à la distance rectiligne AMM′, cette ligne jouit nécessairement de la propriété d'être la plus courte entre toutes celles que l'on peut mener sur la Terre, entre ses extrémités A, N. En effet, $ABM' > AMM' = AMN$: mais $ABM' = ABN$ à un infiniment petit près du troisième ordre: donc $ABN > AMN$.

Maintenant, soient x, y, z les coordonnées rectangles de l'origine de l'élément ds, ou du point A du sphéroïde terrestre; celles de l'extrémité

M de cet élément seront $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, et les coordonnées du point M′, extrémité du second élément $MM' = ds$, seront évidemment

$$x + 2dx = X, \quad y + 2dy = Y, \quad z + 2dz = Z.$$

Mais nous venons de démontrer que la petite normale M′N, ou la perpendiculaire au second triangle BCD, est du second ordre; par conséquent elle peut être considérée comme la diagonale d'un parallélipipède rectangle dont les côtés seraient du même ordre, c'est-à-dire ddx, ddy, ddz. Ainsi les coordonnées du point N, ou du pied de cette normale, seront

$$x + 2dx - ddx = X', \quad y + 2dy - ddy = Y', \quad z + 2dz - ddz = Z'.$$

Or, par la théorie connue des surfaces courbes (*Traité élémentaire du Calcul différentiel* de M. Lacroix, ou mon *Recueil de propositions de Géométrie*, 3e édit., page 434), on a en général, pour les équations des projections de leur normale,

$$X' - X + p(Z' - Z) = 0,$$
$$Y' - Y + q(Z' - Z) = 0,$$

$p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ étant des coefficients aux différentielles partielles; on a donc, pour le cas dont il s'agit,

$$\left.\begin{aligned} ddx + pddz = 0, \\ ddy + qddz = 0. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

D'ailleurs, lorsque $u = f(x, y, z) = 0$ désigne généralement l'équation d'une surface courbe, f étant le signe d'une fonction quelconque, son équation différentielle est, comme on sait,

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz = 0;$$

mais, en supposant aussi l'équation de cette surface représentée par

$z = \varphi(x, y)$, on a de même, pour son équation différentielle,

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy = pdx + qdy;$$

de là on tire aisément

$$p = -\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dz}{du}\right), \quad q = -\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dz}{du}\right).$$

Enfin, substituant ces valeurs dans les équations (A), il vient

$$\left(\frac{du}{dz}\right) ddx - \left(\frac{du}{dx}\right) ddz = 0,$$
$$\left(\frac{du}{dz}\right) ddy - \left(\frac{du}{dy}\right) ddz = 0.$$

Telles sont les équations de la ligne la plus courte sur une surface courbe quelconque, puisqu'elles résultent de la propriété même de cette ligne. Éliminant entre elles $\left(\frac{du}{dz}\right)$, on a, pour troisième équation de la plus courte distance,

$$\left(\frac{du}{dx}\right) ddy - \left(\frac{du}{dy}\right) ddx = 0.$$

Ces trois équations seront donc celles d'une ligne géodésique, si $u = 0$ exprime l'équation de la surface terrestre (*voyez* aussi sur ce sujet le *Calcul des Variations*, par M. Lacroix, ou celui de M. Francœur).

166. Pour première application, supposons $u = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, c'est-à-dire considérons une sphère du rayon r; les trois coefficients aux différentielles partielles seront évidemment

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 2x, \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 2y, \quad \left(\frac{du}{dz}\right) = 2z;$$

ainsi, en divisant par ds chacune des trois dernières équations précé-

dentes, on aura

$$\frac{zd^2y}{ds} - \frac{yd^2z}{ds} = 0,$$
$$\frac{zd^2x}{ds} - \frac{xd^2z}{ds} = 0,$$
$$\frac{xd^2y}{ds} - \frac{yd^2x}{ds} = 0;$$

puis, intégrant, il viendra

$$zdy - ydz = \mathrm{A}ds,$$
$$zdx - xdz = \mathrm{B}ds,$$
$$xdy - ydx = \mathrm{C}ds;$$

A, B, C étant des constantes arbitraires introduites par l'intégration. Enfin, multipliant ces équations respectivement par x, $-y$, $-z$, qui sont les coordonnées courantes de la ligne géodésique que l'on considère; ensuite ajoutant, on aura définitivement

$$\mathrm{A}x - \mathrm{B}y - \mathrm{C}z = 0;$$

c'est, comme l'on sait, l'équation d'un plan passant par l'origine des coordonnées ou le centre de la sphère. Il suit donc de là qu'une ligne de plus courte distance sur la Terre supposée sphérique, est effectivement un arc de grand cercle. Nous examinerons plus tard les propriétés d'une pareille ligne, lorsque $u = 0$ représente l'équation d'un ellipsoïde de révolution, ou d'un sphéroïde quelconque peu différent d'une sphère.

Représentons par λ', λ'' les angles que les rayons de la sphère, menés aux extrémités de la ligne géodésique, font avec le plan des xy, et par φ', φ'' les angles de leurs projections avec l'axe des x. Soient de plus x', y', z', et x'', y'', z'' les coordonnées de ces mêmes extrémités; on aura

$$x' = r\cos\lambda'\cos\varphi', \quad y' = r\cos\lambda'\sin\varphi', \quad z' = r\sin\lambda';$$
$$x'' = r\cos\lambda''\cos\varphi'', \quad y'' = r\cos\lambda''\sin\varphi'', \quad z'' = r\sin\lambda'';$$

et à cause de l'équation précédente du plan, il viendra, par substi-

tution,

$$\frac{A}{C}\cos\lambda'\cos\varphi' - \frac{B}{C}\cos\lambda'\sin\varphi' - \sin\lambda' = 0,$$

$$\frac{A}{C}\cos\lambda''\cos\varphi'' - \frac{B}{C}\cos\lambda''\sin\varphi'' - \sin\lambda'' = 0.$$

Si l'on suppose que la ligne géodésique, partant du plan des xz, lui soit perpendiculaire, on aura $B = 0$, $\varphi' = 0$; ainsi

$$\frac{A}{C} = \operatorname{tang}\lambda', \quad \frac{A}{C} = \frac{\operatorname{tang}\lambda''}{\cos\varphi''},$$

d'où

$$\cos\varphi'' = \frac{\operatorname{tang}\lambda''}{\operatorname{tang}\lambda'};$$

équation qui exprime évidemment une des propriétés connues du triangle sphérique rectangle.

CHAPITRE XII.

FORMULES PAR LESQUELLES ON EXPRIME EN FONCTION DE LA LATITUDE DIFFÉRENTES LIGNES DE L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION, ET APPLICATIONS DE CES FORMULES AU SPHÉROÏDE TERRESTRE.

167. Suivant Newton, la Terre considérée comme une masse fluide homogène, dont les molécules sont soumises à leur attraction mutuelle, aurait la forme sphérique, abstraction faite de son mouvement de rotation sur elle-même ; mais la force centrifuge due à ce mouvement l'a renflée à l'équateur et aplatie aux pôles, en lui donnant la figure d'un ellipsoïde de révolution dont les axes sont dans le rapport de 230 à 229; figure qui se sera conservée à très-peu près durant la solification, si aucune cause n'est venue troubler l'équilibre de la masse. Que la Terre ait été originairement sous l'influence d'une très-haute température, dans un état de fluidité parfaite, c'est ce que semble prouver l'étude physique et géologique de son écorce ; mais il est impossible d'admettre l'hypothèse de l'homogénéité (*). Aussi Clairaut, à qui la science est redevable d'une belle théorie mathématique de la figure de la Terre, a-t-il montré, par la comparaison des longueurs du pendule à secondes,

(*) Une excellente notice scientifique de M. Arago sur ce sujet, insérée dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1834, donne un grand poids à l'hypothèse d'une excessive chaleur d'origine, qui paraît exister encore sous les premières couches solides qui recouvrent notre globe; puisqu'un accroissement régulier de température s'observe partout, à mesure qu'on pénètre à de grandes profondeurs, et qu'il suffit d'un enfoncement de 20 à 30 mètres pour que cet accroissement soit de 1 degré centigrade.

mesurées à différentes latitudes, que l'aplatissement qui en résulte appartient à un sphéroïde hétérogène, et est par conséquent moindre que dans l'hypothèse établie par Newton, c'est-à-dire plus petit que $\frac{1}{230}$. L'illustre auteur de la *Mécanique céleste* a ensuite embrassé cette théorie délicate dans sa plus grande généralité, en l'étendant aux planètes supposées recouvertes, comme la Terre, d'un fluide en équilibre.

En admettant donc que notre globe ait la forme elliptique, la pesanteur, qui agit suivant la verticale du lieu où on la considère, augmente nécessairement d'intensité en allant de l'équateur au pôle, et le calcul fait connaître que son accroissement est proportionnel au carré du sinus de la latitude du lieu dont il s'agit. De plus, la force centrifuge qui s'exerce toujours perpendiculairement à l'axe de rotation est également variable, et sa diminution est aussi proportionelle au carré du sinus de la latitude. Enfin, par la réunion de ces deux causes, la pesanteur observée en un point de la surface de la Terre est l'excès de l'attraction totale sur la force centrifuge décomposée suivant le rayon terrestre; et cette force est, à l'équateur, à très-peu près $\frac{1}{289}$ de la gravité, tandis qu'aux pôles elle est nulle.

Avant de nous assurer, par des mesures géodésiques et astronomiques, si la Terre est réellement un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles, nous la supposerons telle. En conséquence, soient CE (*fig.* 39) le rayon de l'équateur, et P le pôle. Si par le point A on mène la tangente AT à l'arc elliptique PAE, la droite AM, perpendiculaire sur AT, sera la normale en ce point, et l'angle ALT = FAT sera la latitude H du point A.

Soient de plus le rayon de l'équateur CE $= a$, celui du pôle CP $= b$; l'équation du méridien sera

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \qquad (1)$$

x, y étant les coordonnées CF, FA d'un point A quelconque. Or, il résulte des principes du Calcul différentiel, que le rapport $\frac{dy}{dx}$ exprime en général la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente à une courbe fait avec l'axe des x; on a donc

$$\frac{dy}{dx} = \cot H.$$

D'ailleurs, en différenciant l'équation (1), il vient $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$; ainsi

$$-\frac{b^2x}{a^2y} = \cot H. \qquad (2)$$

Combinant entre elles les équations (1) et (2), on obtient aisément

$$x^2 = \frac{a^4\cot^2 H}{b^2 + a^2\cot^2 H}, \quad y^2 = \frac{b^4}{b^2 + a^2\cot^2 H},$$

ou éliminant les cotangentes et extrayant la racine carrée, on trouve

$$x = \frac{a^2\cos H}{\sqrt{b^2\sin^2 H + a^2\cos^2 H}}, \quad y = \frac{b^2\sin H}{\sqrt{b^2\sin^2 H + a^2\cos^2 H}}.$$

Mais si l'on désigne par e le rapport de l'excentricité de l'ellipse du méridien au demi grand axe, on aura $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$; et si en outre l'on change les cosinus en sinus, dans les dénominateurs des valeurs précédentes, il viendra

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a^2\cos H}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 H}} = \frac{a\cos H}{(1 - e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}, \\ y &= \frac{b^2\sin H}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 H}} = \frac{a(1 - e^2)\sin H}{(1 - e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Maintenant désignons par N la grande normale AM; par N′ la petite normale AL; par τ la tangente AT; par τ' la tangente AT′; il est évident qu'on aura, à la seule inspection des triangles rectangles que présente la figure,

$$x = N\cos H, \quad y = \tau\cos H,$$
$$x = \tau'\sin H, \quad y = N'\sin H;$$

partant, et à cause des valeurs de x et y trouvées ci-dessus,

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{x}{\cos H} = \frac{a}{(1 - e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}, \quad \tau = y\ \text{séc}\,H = \frac{a(1 - e^2)\,\text{tang}\,H}{(1 - e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}, \\ N' &= \frac{y}{\sin H} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}, \quad \tau' = x\ \text{coséc}\,H = \frac{a\cot H}{(1 - e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

on a encore

$$\text{sous-normale LF} = \text{N}'\cos\text{H} = \frac{a(1-e^2)\cos\text{H}}{(1-e^2\sin^2\text{H})^{\frac{1}{2}}},$$

$$\text{sous-tangente FT} = \tau\sin\text{H} = \frac{a(1-e^2)\,\text{tang}\,\text{H}\sin\text{H}}{(1-e^2\sin^2\text{H})^{\frac{1}{2}}},$$

$$\text{CL} = x - \text{LF} = \frac{a e^2\cos\text{H}}{(1-e^2\sin^2\text{H})^{\frac{1}{2}}},$$

$$\text{CM} = \text{CL}\,\text{tang}\,\text{H} = \frac{ae^2\sin\text{H}}{(1-e^2\sin^2\text{H})^{\frac{1}{2}}}.$$

Enfin, soit r le rayon AC de la Terre; on aura, par ce qui précède,

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\text{H})^{\frac{1}{2}}}\sqrt{1-e^2(2-e^2)\sin^2\text{H}}. \quad (5)$$

Cette dernière valeur est susceptible de prendre une forme plus simple, et voici comment.

168. Si l'on imagine une sphère paE circonscrite à l'ellipsoïde PAE, laquelle ait pour rayon celui de l'équateur; qu'on prolonge l'ordonnée FA jusques en a, et que par ce point l'on mène la tangente aT : celle-ci et la tangente AT se rencontreront nécessairement au même point T sur l'axe CX; car, remarquons d'abord que l'ellipse donne

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

et le cercle circonscrit

$$y'^2 + x^2 = a^2,$$

y' étant l'ordonnée aF; de là

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \text{ et } y'^2 = a^2 - x^2;$$

et par suite

$$\frac{y'}{y} = \frac{a}{b}.$$

Mais

$$\text{sous-tangente dans l'ellipse} = y\,\frac{dx}{dy} = \text{FT},$$

$$\text{sous-tangente dans le cercle} = y'\frac{dx}{dy'} = \text{FT}';$$

de plus, à cause de $\frac{y'}{y} = \frac{a}{b}$, on a $dy' = \frac{ady}{b}$; par conséquent

$$FT' = y'\frac{dx}{dy'} = y\frac{dx}{dy} = FT.$$

Soit maintenant λ l'angle aCF, et h l'angle ACF ou la latitude géocentrique du point A; on aura

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{y'}{x} \quad \text{et} \quad \text{tang}\,h = \frac{y}{x};$$

divisant ces deux relations l'une par l'autre, on obtiendra définitivement

$$\text{tang}\,h = \frac{b}{a}\,\text{tang}\,\lambda.$$

D'un autre côté, les triangles rectangles AFT, aFT donnant

$$FT = y\,\text{tang}\,H = y'\,\text{tang}\,\lambda,$$

on a

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{b}{a}\,\text{tang}\,H. \quad (6)$$

Dans cette relation, l'angle λ se nomme la *latitude réduite*, et l'angle H la *latitude vraie*, d'après Dionis du Séjour et Legendre; parce que la première est plus petite que la seconde. On a en outre, et par suite,

$$\text{tang}\,h = \frac{b^2}{a^2}\,\text{tang}\,H; \quad (7)$$

mais à cause de la relation (6),

$$\sin^2\lambda = \text{tang}^2\lambda\cos^2\lambda = \frac{\text{tang}^2\lambda}{1+\text{tang}^2\lambda} = \frac{\frac{b^2}{a^2}\,\text{tang}^2 H}{1+\frac{b^2}{a^2}\,\text{tang}^2 H};$$

puis mettant pour tang H sa valeur $\frac{\sin H}{\cos H}$, et faisant attention que $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$, on a définitivement

$$\sin^2\lambda = \frac{(1-e^2)\sin^2 H}{1-e^2\sin^2 H};$$

partant, la valeur ci-dessus de r, désignée par (5), devient plus simplement

$$r = a(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}; \qquad (5')$$

comme nous l'avions annoncé.

Enfin si l'on faisait $e^2 \sin^2 H = \sin^2 \varpi$, $e^2(2 - e^2)\sin^2 H = \sin^2 \varpi'$, on aurait cette autre expression finie

$$r = \frac{a \cos \varpi'}{\cos \varpi}.$$

L'angle CAM de la verticale avec le rayon CA étant représenté par θ, il est évident que l'on a

$$\theta = H - h.$$

Mais

$$\tang \theta = \frac{\tang H - \tang h}{1 + \tang H \tang h} = \frac{\tang H - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}\tang H} = \frac{\tang H - \frac{b^2}{a^2}\tang H}{1 + \frac{b^2}{a^2}\tang^2 H};$$

si donc l'on change les tangentes en sinus, et que l'on ait égard à ce que $\sin^2 H = \frac{1 - \cos 2H}{2}$, et $\sin 2H = 2 \sin H \cos H$, on aura

$$\tang \theta = \frac{(a^2 - b^2)\tang H}{a^2 + b^2 \tang^2 H} = \frac{1}{2}\frac{(a^2 - b^2)\sin 2H}{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 H} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\sin 2H}{1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\cos 2H}. \quad (8)$$

169. Pour achever de compléter ce système de formules, cherchons maintenant l'expression du rayon de courbure du méridien au point A dont les coordonnées sont x, y. Soit ρ ce rayon; on aura, par la théorie connue des osculations, et en supposant dx constante,

$$\rho = \frac{-(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y} = \frac{-\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{-(1 + \cot^2 H)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{-\operatorname{cos\acute{e}c}^3 H}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Mais puisque $\frac{dy}{dx} = \cot \text{H}$, on a, en différenciant,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-d\text{H}}{dx \sin^2 \text{H}} = \frac{-d\text{H}}{dx} \text{cos\'ec}^2\, \text{H},$$

et par conséquent

$$\rho = \frac{dx}{d\text{H}} \text{ cos\'ec H}.$$

Reste à trouver l'expression du rapport différentiel $\frac{dx}{d\text{H}}$; or cela est facile, car, à cause de $x = \frac{a \cos \text{H}}{(1 - e^2 \sin^2 \text{H})^{\frac{1}{2}}}$, on a, en différenciant,

$$dx = \frac{ad.\cos \text{H}}{(1 - e^2 \sin^2 \text{H})^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{2} a \cos \text{H} d.(1 - e^2 \sin^2 \text{H})}{(1 - e^2 \sin^2 \text{H})^{\frac{3}{2}}} = \frac{-a(1 - e^2) \sin \text{H} d\text{H}}{(1 - e^2 \sin^2 \text{H})^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais dans cette différenciation, x et H sont supposées croître en même temps, au lieu que x croît quand la latitude H augmente; il faut donc changer le signe du second membre, pour avoir égard à cette circonstance : ainsi, l'expression cherchée du rayon de courbure du méridien sera définitivement

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \text{H})^{\frac{3}{2}}}. \qquad (9)$$

C'est ce que l'on obtiendrait encore en se rappelant que, dans toutes les courbes du second ordre, le rayon de courbure est égal au cube de la normale N', divisé par le quart du carré du paramètre : or, relativement à l'ellipse, le paramètre $= \frac{2b^2}{a}$.

Cherchons en second lieu l'expression différentielle d'un arc s du méridien, en fonction de la même latitude H, et supposons l'origine de cet arc à l'équateur, c'est-à-dire en E : dans ce cas s croîtra lorsque x diminuera, et l'on aura évidemment

$$ds = -(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = -dx\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = -dx \text{ cos\'ec H}.$$

Substituant ici pour dx sa valeur précédente, il viendra sur-le-champ

$$ds = \frac{a(1 - e^2) d\text{H}}{(1 - e^2 \sin^2 \text{H})^{\frac{3}{2}}}. \qquad (10)$$

En rapprochant cette valeur de celle (9), on remarque cette relation connue d'ailleurs,

$$\rho = \frac{ds}{dH};$$

c'est en effet celle que donne le secteur infinitésimal formé par deux normales consécutives à l'ellipse, et l'élément ds de cette courbe correspondant à l'angle dH infiniment petit.

170. On entend par *aplatissement* ou *ellipticité* de la Terre supposée un ellipsoïde de révolution, la différence α des demi-axes a, b, celui de l'équateur étant pris pour unité; c'est-à-dire que l'on fait

$$\alpha = \frac{a-b}{a}:$$

or, l'aplatissement α et l'excentricité e sont liés l'un à l'autre par une relation facile à trouver. En effet, on a d'abord visiblement $\frac{b^2}{a^2} = (1-\alpha)^2$; et de ce que $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$, on tire en outre $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$; égalant ces deux valeurs, on obtient la relation dont il s'agit, c'est-à-dire

$$2\alpha - \alpha^2 = e^2.$$

On verra bientôt que α est une quantité très-petite, que l'on considère comme du premier ordre; ainsi le double de l'aplatissement est à peu près égal au carré de l'excentricité. Cependant, il est des géomètres qui prennent pour aplatissement de la Terre, l'excès du grand axe sur le petit axe pris pour unité. Soit α' cet excès; dans ce cas

$$\alpha' = \frac{a-b}{b};$$

et comme il est d'usage de faire $\alpha = \frac{1}{m}$, soit aussi $\alpha' = \frac{1}{m'}$. Alors, à cause de

$$\frac{b}{a} = 1 - \alpha = 1 - \frac{1}{m}, \qquad \frac{a}{b} = 1 + \alpha' = 1 + \frac{1}{m'},$$

on a

$$\frac{m'}{m'+1} = \frac{m-1}{m},$$

d'où

$$m = m' + 1.$$

Au surplus, cette conséquence est évidente par elle-même, car on prend ordinairement pour représenter le rapport des demi-axes de la Terre, deux nombres qui ne diffèrent que de l'unité.

Nous pourrions substituer l'aplatissement à l'excentricité dans toutes les formules précédentes, mais elles seraient évidemment moins simples, si l'on ne voulait pas y négliger les termes en α^2, c'est-à-dire les termes du second ordre.

Comme elles sont d'un fréquent usage en Géodésie, rassemblons ici les principales, et désignons par ξ le rayon du parallèle dont la latitude est H, auquel cas $\xi = x$; on aura

Normale terminée au petit axe, $$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}},$$

Normale terminée au grand axe, $$N' = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}};$$

Tangente terminée au grand axe, $$\tau = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{tang} H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}},$$

Tangente terminée au petit axe, $$\tau' = \frac{a \cot H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}};$$

Rayon du parallèle, $$\xi = \frac{a \cos H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}},$$

Rayon de courbure du méridien, $$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}};$$

Rayon de la Terre, $$r = a\left[\frac{1 - e^2(2 - e^2)\sin^2 H}{1 - e^2 \sin^2 H}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{ou } r = a(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}:$$

H et λ étant liés par l'équation $\operatorname{tang}\lambda = \frac{b}{a} \operatorname{tang} H$, démontrée à l'art. **168**.

Enfin, ds étant la différentielle d'un arc s de méridien commençant à l'équateur et se terminant à la latitude H, on a

Différentielle d'un arc du méridien, $$ds = \frac{a(1 - e^2)\, dH}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}.$$

Toutes ces formules peuvent être mises sous une autre forme qui les rende susceptibles d'être développées aisément en séries : en effet, à

cause de

$$\frac{1}{1-e^2\sin^2 H} = \frac{1}{1-\frac{e^2}{2}+\frac{e^2}{2}\cos 2H} = \frac{1}{\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\left(1+\frac{e^2}{2-e^2}\cos 2H\right)},$$

si l'on fait, pour abréger, $n = \frac{e^2}{2-e^2}$, il s'ensuivra que $e^2 = \frac{2n}{1+n}$, $1-\frac{e^2}{2} = \frac{1}{1+n}$, et que par conséquent

$$\frac{1}{1-e^2\sin^2 H} = \frac{1+n}{1+n\cos 2H};$$

par suite

$$N = \frac{a(1+n)^{\frac{1}{2}}}{(1+n\cos 2H)^{\frac{1}{2}}}, \qquad N' = \frac{b^2}{a}\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2H}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\tau = \frac{b^2 \operatorname{tang} H}{a}\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2H}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \tau' = a\cot H\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2H}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\xi = a\cos H\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2H}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \rho = \frac{b^2}{a}\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2H}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Quant au rayon de la Terre, sa première expression précédente prend une forme semblable à celle de la normale N ci-dessus, en y faisant $n' = \frac{e^2(2-e^2)}{2-e^2(2-e^2)}$, comme on a fait $n = \frac{e^2}{2-e^2}$ dans l'expression de N; ce qui établit alors cette relation :

$$n' = \frac{2n}{1+n^2}.$$

En effet l'on a en définitive

$$r = a\left[\frac{(1+n'\cos 2H)(1+n)}{(1+n\cos 2H)(1+n')}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (5'')$$

et par suite

$$ds = \frac{b^2}{a}\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2H}\right)^{\frac{3}{2}} dH.$$

CHAPITRE XIII.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DES FORMULES PRÉCÉDENTES.

SÉRIES FONDAMENTALES.

171. Lorsqu'on élève au carré chacune des expressions finies des lignes de l'ellipsoïde de révolution, le dénominateur se compose d'une quantité de cette forme : $1 + n \cos z$; ainsi l'on peut se proposer de développer en général la fonction $\frac{1}{1+n\cos z}$, ordonnée suivant les cosinus des multiples de l'angle z. Euler, dans son *Calcul intégral,* a résolu complétement ce problème; mais la théorie des exponentielles imaginaires conduit au but d'une manière beaucoup plus simple que celle employée par ce grand géomètre. En effet, feignons que l'on ait

$$\frac{1}{1+n\cos z} = \frac{A+Bc^{z\sqrt{-1}}}{\alpha+\beta c^{z\sqrt{-1}}} + \frac{A+Bc^{-z\sqrt{-1}}}{\alpha+\beta c^{-z\sqrt{-1}}},$$

A, B, α, β étant des coefficients indéterminés, et c la base des logarithmes hyperboliques : or, à cause de $\cos z = \frac{c^{z\sqrt{-1}}+c^{-z\sqrt{-1}}}{2}$, on a

$$\frac{2}{2+n\left(c^{z\sqrt{-1}}+c^{-z\sqrt{-1}}\right)} = \frac{A+Bc^{z\sqrt{-1}}}{\alpha+\beta c^{z\sqrt{-1}}} + \frac{A+Bc^{-z\sqrt{-1}}}{\alpha+\beta c^{-z\sqrt{-1}}},$$

et si l'on réduit au même dénominateur les deux termes du second membre de cette équation, ensuite qu'on égale entre eux les termes

homogènes, on aura ces relations

$$A\alpha + B\beta = 1, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 2,$$
$$A\beta + B\alpha = 0, \quad \alpha\beta = n,$$

desquelles on obtient

$$A(\alpha^2 - \beta^2) = \alpha, \quad \alpha^2 = 1 + \sqrt{1-n^2}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n};$$
$$B(\beta^2 - \alpha^2) = \beta, \quad \beta^2 = 1 - \sqrt{1-n^2}, \quad \alpha^2 - \beta^2 = 2\sqrt{1-n^2};$$

ainsi

$$\frac{1}{1+n\cos z} = \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(\frac{1-\frac{\beta}{\alpha}c^{z\sqrt{-1}}}{1+\frac{\beta}{\alpha}c^{z\sqrt{-1}}} + \frac{1-\frac{\beta}{\alpha}c^{-z\sqrt{-1}}}{1+\frac{\beta}{\alpha}c^{-z\sqrt{-1}}}\right).$$

Si, pour abréger, l'on fait $\frac{\beta}{\alpha} = m$, ensuite que l'on réduise en série chacune des fractions $\frac{1-mc^{z\sqrt{-1}}}{1+mc^{z\sqrt{-1}}}$, $\frac{1-mc^{-z\sqrt{-1}}}{1+mc^{-z\sqrt{-1}}}$, et que l'on ait égard à ce qu'en général $\cos\mu z = \frac{c^{\mu z\sqrt{-1}} + c^{-\mu z\sqrt{-1}}}{2}$, on trouvera définitivement

$$\text{(A)} \quad \frac{1}{1+n\cos z} = \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}(1 - 2m\cos z + 2m^2\cos 2z - 2m^3\cos 3z + 2m^4\cos 4z\ldots).$$

La même méthode s'emploie avec un égal succès pour réduire en série de cette forme la fonction $\log(1 + n\cos z)$. Pour le prouver, soit encore mis ici $\frac{c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}}}{2}$, au lieu de $\cos z$; on aura

$$\log(1 + n\cos z) = \log(2 + nc^{z\sqrt{-1}} + nc^{-z\sqrt{-1}}) - \log 2;$$

et parce que l'on peut supposer que

$$2 + nc^{z\sqrt{-1}} + nc^{-z\sqrt{-1}} = (\alpha + \beta c^{z\sqrt{-1}})(\alpha + \beta c^{-z\sqrt{-1}}),$$

α et β étant indéterminés, on aura, en développant et égalant la quantité rationnelle à la quantité rationnelle, et la partie imaginaire à la partie imaginaire,

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2, \qquad \alpha\beta = n;$$

ainsi

$$2\alpha = \sqrt{2}\left(\sqrt{1+n} + \sqrt{1-n}\right), \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n} = m,$$

$$2\beta = \sqrt{2}\left(\sqrt{1+n} - \sqrt{1-n}\right), \qquad n = \frac{2m}{1+m^2};$$

et comme en général $\log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots$, on trouvera, après les réductions convenables,

$$\text{(B)} \quad \log(1+n\cos z) = \log\frac{\alpha^2}{2} + \log\left(1+mc^{z\sqrt{-1}}\right) + \log\left(1+mc^{-z\sqrt{-1}}\right)$$

$$= -\log\frac{2m}{n} + 2\mu\left[m\cos z - \tfrac{1}{2}m^2\cos 2z + \tfrac{1}{3}m^3\cos 3z - \ldots\right],$$

$\mu = 0{,}43429448$ étant ici le module des tables; ce qui est conforme au résultat auquel Euler est parvenu.

172. Développons, par le même procédé, la fonction $\frac{1}{(1+n\cos z)^2}$. On a d'abord

$$\frac{1}{1+n\cos z} = \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}(1 - 2m\cos z + 2m^2\cos 2z - 2m^3\cos 3z + 2m^4\cos 4z - \text{etc.});$$

et si l'on multiplie, ensuite qu'on divise la valeur précédente de m, par $1+\sqrt{1-n^2}$, on aura

$$m = \frac{n}{1+\sqrt{1-n^2}}.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{(1+n\cos z)^2} = \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1 - 2m\cos z + 2m^2\cos 2z - 2m^3\cos 3z + \text{etc.}}{1+n\cos z}\right);$$

et si l'on suppose que

$$\frac{1}{(1+n\cos z)^2}=\frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}[1+E_{(1)}\cos z+E_{(2)}\cos 2z+E_{(3)}\cos 3z+\text{etc.}],$$

on aura alors

$$\frac{1}{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1-2m\cos z+2m^2\cos 2z-2m^3\cos 3z\ldots}{1+n\cos z}\right)$$
$$=\frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}[1+E_{(1)}\cos z+E_{(2)}\cos 2z+E_{(3)}\cos 3z\ldots];$$

puis, après avoir chassé le dénominateur $1+n\cos z$,

$$\frac{1-n^2}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}(1-2m\cos z+2m^2\cos 2z-2m^3\cos 3z\ldots)$$
$$=\frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\begin{array}{l}1+E_{(1)}\cos z+E_{(2)}\cos 2z+E_{(3)}\cos 3z\ldots\ldots\\ +n\cos z+nE_{(1)}\cos z\cos z+nE_{(2)}\cos z\cos 2z\ldots\end{array}\right].$$

Mais en général $\frac{1}{2}\cos(\nu+1)z+\frac{1}{2}\cos(\nu-1)z=\cos\nu z\cos z$; ainsi on a l'équation identique

$$\begin{aligned}&(1-n^2)[1-2m\cos z+2m^2\cos 2z-2m^3\cos 3z+\text{etc.}]\\ =\ &1+E_{(1)}\cos z+E_{(2)}\cos 2z+E_{(3)}\cos 3z+\text{etc.}\\ &+n\cos z+\tfrac{1}{2}nE_{(1)}\cos 2z+\tfrac{1}{2}nE_{(2)}\cos 3z+\text{etc.}\\ &+\frac{n}{2}E_{(1)}+\tfrac{1}{2}nE_{(2)}\cos z+\tfrac{1}{2}nE_{(3)}\cos 2z+\tfrac{1}{2}nE_{(4)}\cos 3z+\text{etc.}\end{aligned}$$

Égalant les termes semblables, il vient

$$\begin{aligned}1-n^2&=1\ +\tfrac{1}{2}nE_{(1)},\\ -2m\,(1-n^2)&=E_{(1)}+\ n+\tfrac{1}{2}nE_{(2)},\\ +2m^2(1-n^2)&=E_{(2)}+\tfrac{1}{2}nE_{(1)}+\tfrac{1}{2}nE_{(3)},\\ -2m^3(1-n^2)&=E_{(3)}+\tfrac{1}{2}nE_{(2)}+\tfrac{1}{2}nE_{(4)};\end{aligned}$$

. . . .

d'où l'on tire, en mettant pour m sa valeur $\frac{n}{1+\sqrt{1-n^2}}$,

$$E_{(1)} = -2n,$$
$$E_{(2)} = \quad 2.\frac{(2n^2-1+\sqrt{1-n^2})}{1+\sqrt{1-n^2}} = \frac{2n^2(1+2\sqrt{1-n^2})}{(1+\sqrt{1-n^2})^2},$$
$$E_{(3)} = -2.\frac{(3n^3-2n+2n\sqrt{1-n^2})}{(1+\sqrt{1-n^2})^2} = \frac{-2n^3(1+3\sqrt{1-n^2})}{(1+\sqrt{1-n^2})^3},$$
$$E_{(4)} = \quad 2.\frac{(4n^4-3n^2+3n^2\sqrt{1-n^2})}{(1+\sqrt{1-n^2})^3} = \frac{2n^4(1+4\sqrt{1-n^2})}{(1+\sqrt{1-n^2})^4},$$
. . . .
$$E_{(i)} = \pm\frac{2n^i(1+i\sqrt{1-n^2})}{(1+\sqrt{1-n^2})^i};$$

ou enfin, pour abréger,

$$E_{(1)} = -2n,$$
$$E_{(2)} = \quad 2m^2(1+2\sqrt{1-n^2}),$$
$$E_{(3)} = -2m^3(1+3\sqrt{1-n^2}),$$
$$E_{(4)} = \quad 2m^4(1+4\sqrt{1-n^2}),$$
. . . .
$$E_{(i)} = \pm 2m^i(1+i\sqrt{1-n^2}).$$

Telles sont les valeurs que Laplace a obtenues par un procédé différent (*Mécanique céleste*, tome I, page 156).

173. La fonction $(1+n\cos z)^\nu$ peut aussi se développer en série de la forme $A + B\cos z + C\cos 2z + D\cos 3z + \ldots$; mais comme nous n'aurons besoin par la suite que du développement particulier de $\frac{1}{(1+n\cos z)^{\frac{3}{2}}}$, nous effectuerons ce dernier par la méthode naturelle, laquelle consiste à développer d'abord $(1+n\cos z)^{-\frac{3}{2}}$ par la formule du binome, et ensuite à changer dans le résultat les puissances du cosinus de l'arc z en cosinus de ses multiples. Cependant, afin de pou-

voir découvrir aisément la loi des coefficients numériques du développement, nous aurons soin de n'effectuer aucune réduction dans la formule générale,

$$2^{\mu-1}\cos z^{\mu} = \cos \mu z + \mu \cos(\mu-2)z + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\cos(\mu-4)z + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\cos(\mu-6)z + \ldots,$$

qui, comme l'on sait, exige que l'on s'arrête lorsque l'arc devient négatif, et que l'on ne prenne que la moitié du coefficient du cosinus de l'arc nul que l'on trouvera, si μ est pair.

Il résulte de là, que l'on a d'abord

$$(1+n\cos z)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}n\cos z + \frac{3}{2}.\frac{5}{4}n^2\cos^2 z - \frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}n^3\cos^3 z + \frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}.\frac{9}{8}n^4\cos^4 z \ldots\ldots,$$

ensuite, en ordonnant par rapport à $\cos z$, $\cos 2z$, $\cos 3z$,..., il vient, toute opération faite,

$$\begin{aligned}
(1+n\cos z)^{-\frac{3}{2}} = & \left[1 + \frac{3.5}{2^2.2.2}n^2 + \frac{3.5.7.9}{2^4.2.2.4.4}n^4 + \frac{3.5.7.9.11.13}{2^6.2.2.4.4.6.6}n^6 + \frac{3.5.7.9.11.13.15.17}{2^8.2.2.4.4.6.6.8.8}n^8 \ldots\ldots\right] \\
& - 2n\left[\frac{3}{2^1.2} + \frac{3.5.7}{2^3.2.2.4}n^2 + \frac{3.5.7.9.11}{2^5.2.2.4.4.6}n^4 + \frac{3.5.7.9.11.13.15}{2^7.2.2.4.4.6.6.8}n^6 \ldots\right]\cos z \\
& + 4n^2\left[\frac{1.3.5}{2^2.2.2.4} + \frac{2.3.5.7.9}{2^4.2.2.4.4.6}n^2 + \frac{3.3.5.7.9.11.13}{2^6.2.2.4.4.6.6.8}n^4 \ldots\ldots\right]\cos 2z \\
& + 8n^3\left[\frac{1.2.3.5.7}{2^3.2.2.4.4.6} + \frac{2.3.3.5.7.9.11}{2^5.2.2.4.4.6.6.8}n^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\right]\cos 3z \\
& + 16n^4\left[\frac{1.2.3.3.5.7.9}{2^4.2.2.4.4.6.6.8} + \frac{2.3.4.3.5.7.9.11.13}{2^6.2.2.4.4.6.6.8.8.10}n^2 \ldots\ldots\ldots\right]\cos 4z \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

série convergente, lorsque n est plus petit que l'unité. Si l'on désigne respectivement les coefficients de ses termes par q, q', q'', q''',..., on

aura

$$(C)\qquad \left(\frac{1}{1+n\cos z}\right)^{\frac{3}{2}}=q-q'\cos z+q''\cos 2z-q'''\cos 3z+q^{\text{iv}}\cos 4z$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Avec un peu d'attention, l'on reconnaîtra que le terme général du premier polynome q de cette série est, en désignant par h le rang de celui que l'on cherche,

$$+\frac{3.5.7.9\ldots\ldots\ldots[4h-3]}{2^{(2h-2)}\,2^2.4^2.6^2\ldots.[2h-2]^2}.\,n^{(2h-2)},$$

et que le terme général du polynome $q^{(i)}\cos(i-1)z$, occupant le rang i dans cette même série, est

$$\mp 2^{i-1}\,n^{i-1}\left[+\frac{h(h+1)..[i+h-3].3.5.7..[2i+4h-5]}{2^{(i+2h-3)}\,2^2.\,4^2.6^2\ldots\ldots\ldots\ldots[2i+2h-4]}n^{(2h-2)}\right]\cos(i-1)z,$$

le signe $-$ ayant lieu lorsque i est pair, et le signe $+$ lorsque i est impair; et les facteurs $h(h+1)\ldots[i+h-3]$ ne devant être pris que quand $[i+h-3]$ est plus grand que h.

174. Il nous sera encore utile, par la suite, de connaître le développement de la valeur de

$$U^u=\frac{e^u}{(1+\sqrt{1-e^2})^n},$$

procédant suivant les puissances de e. Dans cette vue, soit.... $k=1+\sqrt{1-e^2}=\frac{1}{k_1}$, on aura $k=2-\frac{e^2}{k}$: or, par un théorème de Lagrange, généralisé par Laplace, lorsque $y=a+x\varphi(y)$, on a (*Calc. différ.* de M. Lacroix, tome I, page 282, 2e édit.)

$$f(y)=f(a)+\varphi(a)\frac{d.f(a)}{da}.\,x+\frac{d\left[\varphi^2(a)\frac{d.f(a)}{da}\right]}{da}.\,\frac{x^2}{2}$$
$$+\frac{d^2.\left[\varphi^3(a)\frac{d.f(a)}{da}\right]}{da^2}.\,\frac{x^3}{2.3}+\ldots$$

Comparant donc

$$y = a + x\,\varphi(y)$$

avec la proposée

$$k = 2 - e^2 \frac{1}{k},$$

on a

$$a = 2, \quad x = -e^2, \quad \varphi(y) = \frac{1}{k};$$

par conséquent si l'on veut avoir la valeur de k^u, auquel cas.... $f(y) = k^u$, on aura

$$f(a) = 2^u, \quad \varphi(a) = \frac{1}{2},$$

$$\varphi(a)\frac{d\,f(a)}{da} = \frac{1}{2}.u.\,2^{u-1} = u.\,2^{u-2},$$

$$\varphi^2(a)\frac{d.f(a)}{da} = \frac{1}{2^2}.u.\,2^{u-1} = u.\,2^{u-3},$$

$$\frac{d.\left[\varphi^2(a)\dfrac{d.f(a)}{da}\right]}{da} = u.(u-3).\,2^{u-4},$$

$$\varphi^3(a)\frac{d.f(a)}{da} = \frac{1}{2^3}.u.\,2^{u-1} = u.\,2^{u-4},$$

$$\frac{d^2.\left[\varphi^3(a)\dfrac{d.f(a)}{da}\right]}{da^2} = u.(u-4)(u-5).\,2^{u-6}.$$

Ainsi la substitution de ces valeurs, dans la série précédente, donne

$$k^u = 2^u - u.\,2^{u-2}e^2 + \frac{u(u-3)}{1.3}.\,2^{u-4}e^4 - \frac{u(u-4)(u-5)}{1.2.3}\,2^{u-6}e^6 + \ldots$$

Mais à cause de $k_1 = \frac{1}{k}$, on a $k_1^u = \frac{1}{k^u}$; donc

$$k_1^u = \frac{1}{2^u} + \frac{u.e^2}{2^{u+2}} + \frac{u(u+3)}{1.2}.\,\frac{e^4}{2^{u+4}} + \frac{u(u+4)(u+5)}{1.2.3}.\,\frac{e^6}{2^{u+6}} + \ldots.$$

Donc enfin

$$\text{(D)}\quad U^u = \left(\frac{e}{2}\right)^u \left\{ 1 + \frac{u}{1}\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{u(u+3)}{1.2}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{u(u+4)(u+5)}{1.2.3}\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \ldots \right\}.$$

Cette série, dont le terme général est

$$+\left(\frac{e}{2}\right)^u \left\{ \frac{u(u+i)(u+i+1)(u+i+2)(u+i+3)\ldots[u+(2i-3)]}{1.2.3.4.5\ldots(i-1)} \left(\frac{e}{2}\right)^{2(i-1)} \right\},$$

trouve son application dans les hautes sciences mathématiques (*voy.* le tom. I de la *Mécan. céleste,* page 180), où il est cependant nécessaire de corriger une petite faute non signalée et facile à reconnaître, d'après ce qui précède.

Applications des séries fondamentales.

175. En prenant le logarithme de la valeur de la normale N donnée à l'art. **170**, l'on aura, à cause de la série (B),

$$\begin{aligned}\log N &= \log a + \tfrac{1}{2}\log(1+n) - \tfrac{1}{2}\log(1+n\cos 2H)\\ &= \log a + \tfrac{1}{2}\log(1+n) + \tfrac{1}{2}\log(1+m^2)\\ &\qquad - \mu(m\cos 2H - \tfrac{1}{2}m^2\cos 4H + \tfrac{1}{3}m^3\cos 6H - \ldots)\\ &= \log a + \mu(m - \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{3}m^3 - \ldots\ldots)\\ &\qquad - \mu(m\cos 2H - \tfrac{1}{2}m^2\cos 4H + \tfrac{1}{3}m\cos 6H - \ldots).\end{aligned}$$

Par la même raison,

$$\begin{aligned}\log N' &= \log\frac{b^2}{a} + \mu(m - \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{3}m^3 - \ldots)\\ &\qquad - \mu(m\cos 2H - \tfrac{1}{2}m^2\cos 4H + \tfrac{1}{3}m^3\cos 6H - \ldots),\\ \log\rho &= \log\frac{b^2}{a} + 3\mu(m - \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{3}m^3 - \ldots)\\ &\qquad - 3\mu(m\cos 2H - \tfrac{1}{2}m^2\cos 4H + \tfrac{1}{3}m^3\cos 6H - \ldots),\end{aligned}$$

et ainsi de même pour les logarithmes des autres lignes du sphéroïde.

Pour ce qui concerne le logarithme du rayon de la Terre, son développement en série sera un peu différent; car de l'équation (5″), art. **170**, on tire

$$\begin{aligned}\log\frac{r}{a} &= \tfrac{1}{2}\log(1+n) + \tfrac{1}{2}\log(1+n'\cos 2H)\\ &\qquad - \tfrac{1}{2}\log(1+n') - \tfrac{1}{2}\log(1+n\cos 2H);\end{aligned}$$

et à cause de

$$\log(1+n\cos 2H) = -\log(1+m^2) + 2\mu\left(m\cos 2H - \tfrac{1}{2}m^2\cos 4H + \tfrac{1}{3}m^3\cos 6H - \ldots\right),$$

et de la relation $\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n} = m$, on aura pareillement

$$\log(1+n'\cos 2H) = -\log(1+m'^2) + 2\mu\left(m'\cos 2H - \tfrac{1}{2}m'^2\cos 4H + \tfrac{1}{3}m'^3\cos 6H - \ldots\right).$$

D'ailleurs on sait par ce qui précède, que $n' = \frac{2n}{1+n^2}$; donc $m' = n$, ou $m' = \frac{1}{n}$; mais comme n est plus petit que l'unité, cette seconde valeur de m' ne peut être admise, puisqu'elle rendrait la série divergente; donc

$$\log\frac{r}{a} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+m^2}{1+n}\right) + \mu\left[(n-m)\cos 2H - \tfrac{1}{2}(n^2-m^2)\cos 4H + \tfrac{1}{3}(n^3-m^3)\cos 6H - \ldots\right];$$

et puisque $n = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, $m = \frac{a-b}{a+b}$, à cause de $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$, on a

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+m^2}{1+n}\right) = \log\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right) - \log a;$$

donc enfin

$$\log r = \log a + \log\left[\frac{a^2+b^2}{a(a+b)}\right] + \mu\left[(n-m)\cos 2H - \tfrac{1}{2}(n^2-m^2)\cos 4H + \tfrac{1}{3}(n^3-m^3)\cos 6H - \ldots\right].$$

Dans le second volume de la *Méridienne*, et le discours préliminaire des *Tables du Bureau des Longitudes*, Delambre a donné le logarithme de r en série ordonnée, comme la précédente, suivant les cosinus linéaires de la latitude; mais j'ai préféré d'en rendre la loi des termes manifeste.

Voici ce logarithme, en fonction de l'aplatissement :

$$\log r = \log a - \mu\left[\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{8}\alpha^2 - \tfrac{5}{24}\alpha^3 - \left(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{4}\alpha^2 - \tfrac{1}{8}\alpha^3\right)\cos 2H + \tfrac{3}{8}(\alpha^2+\alpha^3)\cos 4H - \tfrac{7}{24}\alpha^3\cos 6H + \ldots\right].$$

Si, au lieu des logarithmes, on voulait les valeurs mêmes de ces lignes, voici comment on procéderait pour arriver encore à des séries régulières et fort simples.

Par exemple, la valeur de N élevée au carré donne

$$\frac{N^2}{a^2} = \frac{(1+n)}{1+n\cos 2H};$$

et, par la formule (A) de l'art. **171**, on a

$$\frac{N^2}{a^2} = \left(\frac{1+n}{1-n}\right)^{\frac{1}{2}}(1 - 2m\cos 2H + 2m^2\cos 4H - 2m^3\cos 6H + \ldots\ldots)$$
$$= \frac{a}{b}(1 - 2m\cos 2H + 2m^2\cos 4H - 2m^3\cos 6H + \ldots\ldots).$$

Il est évident que les expressions des autres lignes du sphéroïde se transformeraient également en séries de même forme que cette dernière.

Comme toutes ces transformations sont très-faciles à effectuer, je me dispenserai de les donner. J'observerai seulement que, pour parvenir aux valeurs des premières puissances des lignes du sphéroïde, qui ne continssent de même que les cosinus des multiples de la latitude, il serait nécessaire de suivre la méthode donnée à l'art. **173**, pour développer ainsi l'expression du rayon de courbure du méridien; mais alors la loi des coefficients serait bien moins simple que celle ci-dessus.

176. Il est à remarquer que les valeurs de n et de m, élevées à une puissance entière quelconque, peuvent être exprimées aussi en séries régulières; car d'abord puisque $n = \frac{e^2}{2-e^2}$, on obtient sur le champ, par la formule du binome,

$$n = \left(\frac{e^2}{2}\right)^1 + \left(\frac{e^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^2}{2}\right)^3 + \left(\frac{e^2}{2}\right)^4 + \ldots,$$

et ensuite, par la méthode connue de l'élévation d'un polynome à la puissance u,

$$n^u = \left(\frac{e^2}{2}\right)^u \left\{ \begin{array}{l} 1 + u\left(\frac{e^2}{2}\right)^1 + \left[u + \frac{u(u-1)}{2}\right]\left(\frac{e^2}{2}\right)^2 \\ + \left[u + \frac{u(u-1)}{2} + \frac{u(u-1)(u-2)}{2.3}\right]\left(\frac{e^2}{2}\right)^3 + \ldots \end{array} \right\};$$

d'ailleurs

$$n' = \frac{2n}{1+n^2} = \frac{a^4 - b^4}{a^4 + b^4},$$

ou, si l'on veut,

$$n' = 2n(1+n^2)^{-1} = 2n(1 - n^2 + n^4 - n^6 + \ldots).$$

Il s'agit aussi de connaître la valeur générale de m^u : or on a vu, à l'art. **171**, que $\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n} = m$; par conséquent

$$m = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}} = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} = \left(\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^2,$$

expression qui est la même que celle de l'article **174**; on a donc généralement, en vertu de l'équation (D),

$$m^u = \left(\frac{e}{2}\right)^{2u} \left\{ \begin{array}{l} 1 + 2u\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{2u(2u+3)}{1.2}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{2u(2u+4)(2u+5)}{1.2.3}\left(\frac{e}{2}\right)^6 \\ + \frac{2u(2u+5)(2u+6)(2u+7)}{1.2.3.4}\left(\frac{e}{2}\right)^8 + \ldots \end{array} \right\}.$$

177. On ne peut évaluer numériquement toutes les séries précédentes, sans connaître les axes de la Terre. A l'instar de la Commission des poids et mesures, qui fut créée à l'époque où l'on introduisit en France le système métrique décimal, j'emploierai à cette recherche les arcs de méridien, mesurés à l'équateur et sur le territoire français, afin de parvenir aux résultats mêmes dont cette Commission rendit compte à l'Institut national, par l'organe de M. Van-Swinden. (*Voyez* le rapport de ce savant, inséré parmi les Mémoires de cette docte Assemblée, tom. II, page 43). Mais, avant tout, il s'agit d'intégrer l'équation différentielle d'un arc du méridien.

D'abord, à cause de la série (C), et de la valeur de ds donnée à l'art. **170**, on a, en intégrant,

$$s = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left[qH - \frac{q'}{4}\sin 2H + \frac{q''}{2}\sin 4H - \frac{q'''}{6}\sin 6H + \ldots\right];$$

la constante étant nulle, puisque l'arc s s'évanouit en même temps que H.

Il est évident que pour un autre arc s', terminé à la latitude H', on a de même

$$s' = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left[qH' - \frac{q'}{2}\sin 2H' + \frac{q''}{4}\sin 4H' - \frac{q'''}{6}\sin 6H' + \ldots\right];$$

ainsi, entre les limites H et H', considérées comme les latitudes des extrémités de l'arc A, on trouve, d'après l'art. **45**,

$$A = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{\begin{array}{r} q(H-H') - q'\sin(H-H')\cos(H+H') \\ +\frac{q''}{2}\sin 2(H-H')\cos 2(H+H') \\ -\frac{q'''}{3}\sin 3(H-H')\cos 3(H+H')\ldots \end{array}\right\}.$$

Pour un autre arc A compris entre les latitudes Λ et Λ', on a pareillement

$$A' = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{\begin{array}{r} q(\Lambda-\Lambda') - q'\sin(\Lambda-\Lambda')\cos(\Lambda+\Lambda') \\ +\frac{q''}{2}\sin 2(\Lambda-\Lambda')\cos 2(\Lambda+\Lambda') \\ -\frac{q'''}{3}\sin 3(\Lambda-\Lambda')\cos 3(\Lambda+\Lambda')\ldots \end{array}\right\}.$$

Dans la vue d'abréger la notation, soient

$$H - H' = \varphi, \quad H + H' = \Phi,$$
$$\Lambda - \Lambda' = \varphi', \quad \Lambda + \Lambda' = \Phi';$$

alors les deux équations précédentes seront

$$(M)\quad \begin{cases} A=\dfrac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{ q\varphi - q'\sin\varphi\cos\Phi + \dfrac{q''}{2}\sin 2\varphi\ \cos 2\Phi \atop - \dfrac{q'''}{3}\sin 3\varphi\ \cos 3\Phi\ldots \right\}, \\ A'=\dfrac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{ q\varphi' - q'\sin\varphi'\cos\Phi' + \dfrac{q''}{2}\sin 2\varphi'\ \cos 2\Phi' \atop - \dfrac{q'''}{3}\sin 3\varphi'\ \cos 3\Phi'\ldots \right\}. \end{cases}$$

Pour en déduire une relation entre les quantités connues et les puissances de l'excentricité, il faudrait remplacer q, q', q'', q''', par leurs valeurs en e^2; or, en bornant l'approximation aux termes en e^4, on a, par ce qui précède,

$$n = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{4},\quad n^2 = \frac{e^4}{4};$$

et par suite

$$q = 1 + \frac{15}{64}e^4,\quad q' = \frac{3}{4}\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right),\quad q'' = \frac{15}{64}\,e^4;$$

puis substituant ces valeurs dans les équations (M), il vient

$$A = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{ \left(1 + \frac{15}{64}e^4\right)\varphi - \frac{3}{4}\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)\sin\varphi\ \cos\Phi \atop + \frac{15}{128}e^4 \sin 2\varphi\ \cos 2\Phi \right\},$$

$$A' = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{ \left(1 + \frac{15}{64}e^4\right)\varphi' - \frac{3}{4}\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)\sin\varphi'\ \cos\Phi' \atop + \frac{15}{128}\,e^4 \sin 2\varphi'\ \cos 2\Phi' \right\}.$$

Mais il est possible d'obtenir plus promptement d'autres valeurs analogues de A et A', en développant immédiatement en série l'expression différentielle d'un arc de méridien, savoir,

$$ds = \frac{a\,(1 - e^2)\,dH}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}},$$

et en intégrant ensuite entre les limites H et H'. En effet l'on trouve

d'abord

$$ds = a(1-e^2)\left[1+\frac{3}{2}e^2\sin^2 H + \frac{15}{8}e^4\sin^4 H\ldots\right]dH;$$

puis, changeant les puissances des sinus de H en cosinus d'arcs multiples par le procédé connu, et intégrant, il vient

$$s = a(1-e^2)\left[pH - \frac{1}{2}p'\sin 2H + \frac{1}{4}p''\sin 4H - \ldots\right],$$

série dans laquelle

$$p = 1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4,\qquad p'=\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4,\qquad p''=\frac{15}{64}e^4;$$

et où la constante est nulle, puisque s et H s'évanouissent en même temps. On a donc, à l'aide de la notation ci-dessus,

$$(\text{M}')\quad \begin{cases} A = a(1-e^2)\,[p\varphi - p'\sin\varphi\cos\Phi + \frac{1}{2}p''\sin 2\varphi\cos 2\Phi - \ldots], \\ A' = a(1-e^2)\,[p\varphi' - p'\sin\varphi'\cos\Phi' + \frac{1}{2}p''\sin 2\varphi'\cos 2\Phi' - \ldots]. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de déterminer e^2 et a par la combinaison de ces deux arcs : or, en divisant l'une par l'autre les deux dernières séries précédentes, il vient

$$\frac{A}{A'} = \frac{p\varphi - p'\sin\varphi\cos\Phi + \frac{1}{2}p''\sin 2\varphi\cos 2\Phi}{p\varphi' - p'\sin\varphi'\cos\Phi' + \frac{1}{2}p''\sin 2\varphi\cos 2\Phi'},$$

puis, chassant les dénominateurs, on obtient cette relation

$$(m)\qquad \text{M}p - \text{N}p' + \tfrac{1}{2}\text{P}p'' = 0$$

lorsque, pour abréger, l'on fait

$$\begin{aligned} M &= \frac{\pi}{180}(A\varphi' - A'\varphi), \\ N &= A\sin\varphi'\cos\Phi' - A'\sin\varphi\cos\Phi, \\ P &= A\sin 2\varphi'\cos 2\Phi' - A'\sin 2\varphi\cos 2\Phi, \end{aligned}$$

et que π désigne la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est l'unité.

La relation (m) est propre à faire connaître la valeur de e^2 en y substituant pour p, p', p'' leurs valeurs précédentes. En effet l'on a

$$M - \frac{3}{4}e^2(N - M) + \frac{15}{64}e^4(3M - 4N + \tfrac{1}{2}P) = 0;$$

mais pour simplifier un peu le calcul numérique, nous la multiplierons par $1 - \frac{3}{4}e^2$, en ne conservant cependant, dans le produit, que les termes en e^2 et en e^4; alors ce produit sera

$$\frac{3}{4}e^2 N - \frac{3}{64}e^4\left(3M - 8N + \frac{5}{2}P\right) - M = 0.$$

Remarquons d'ailleurs qu'à cause de la petitesse de e^2 et de celle du coefficient de e^4 qu'on obtiendrait en divisant tous les termes par $\frac{3}{4}$ N, on peut, au lieu de résoudre cette équation du second degré, employer la méthode des approximations successives. Dans ce dernier cas, l'on trouve sans difficulté cette série

$$\text{(N)} \qquad e^2 = \frac{4M}{3N} + \frac{5}{32}\frac{P}{N}\left(\frac{4M}{3N}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{4M}{3N}\right)^2 + \ldots,$$

au moyen de laquelle les trois premiers termes donneront toujours e^2 avec une grande précision : souvent même on pourra se contenter du premier terme, et obtenir ainsi avec assez d'exactitude

$$\text{aplat. } \alpha = \frac{A'_m - A_m}{3(A_m \sin^2\frac{1}{2}\Phi' - A'_m \sin^2\frac{1}{2}\Phi)},$$

en faisant $A_m = \frac{A}{H - H'}$ et $A'_m = \frac{A'}{\Lambda - \Lambda'}$, et exprimant les amplitudes φ, φ' en degrés et décimales de degré ; c'est-à-dire les angles $H - H'$, $\Lambda - \Lambda'$.

Applications numériques.

178. Selon les mesures de France et d'Angleterre, l'arc du méridien compris entre Greenwich et Formentera, corrigé de toute erreur (*Nouvelle Description géométrique de la France*, tom. II, p. 610), est. A = $730532^T,8$

Latitude de Greenwich. . . . . H = $51^\circ\, 28'\, 40''$

Latitude de Formentera. . . . . . H' = $38.39.56,11$

$\varphi = H - H' = 12.48.43,89$

Selon les mesures du Pérou, l'arc du méridien coupé par l'équateur et vérifié par Delambre, est. . . . . A' = $176877^T,0$

Latitude boréale de Cotchesqui. . $\Lambda = +\ 0^\circ\, 2'\, 31'',0$

Latitude australe de Tarqui. . . $\Lambda' = -\ 3.4.32,0$

$\varphi' = \Lambda - \Lambda' = +\ 3.7.3,0$

ainsi l'on a d'abord

$\log A = 5.8636398$; $\log A' = 5.2476714$;
$\log \varphi = 1.1076234$; $\varphi = 12^\circ,8121917$; $\Phi = 90^\circ\, 8'\, 36'',1$;
$\log \varphi' = 0.4938065$; $\varphi' = 3^\circ,1175$; $\Phi' = -\ 3^\circ\, 2'\, 1''$.

Opérant ensuite par les logarithmes à 7 décimales, il vient

$$M = 196,41;\quad N = 39771,6;\quad P = 155390;$$

et par la relation (N) on a

1er terme.		2e terme.		3e terme.	
$\log M$	$= 2.2931636$	$\log P$	$= 5.19142$		
$\text{c.}\log N$	$= 5.4004270$	$\text{c.}\log N$	$= 5.40043$		
$\log \frac{4}{3}$	$= 0.1249388$	$\log \frac{5}{32}$	$= 9.19382$	$\log \frac{1}{2}$	$= 9.69897-$
$\log e_0^2$	$= 7.8185294$	$2\log e_0^2$	$= 5.63706$		5.63706
			5.42273		$5.33603-$

1er terme. $+\ 0,00658460$
2e terme. $+\ 0,00002647$
3e terme. $-\ 0,00002168$

$e^2 = 0,00658939$

Le carré de l'excentricité étant connu maintenant, on tirera l'aplatissement α de la relation

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2,$$

laquelle donne, sans erreur sensible,

$$\alpha = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}\right)^2;$$

on a donc

$$\begin{array}{rl} \log e^2 = & 7.81885 \\ & \underline{9.69897} \\ & \underline{7.51782} = 0{,}0032947 \\ & 5.03564 \\ & \underline{9.69897} \\ & 4.73461 = \underline{0{,}0000054} \\ & \alpha = 0{,}0033001 \end{array}$$

De là

$$\log \alpha = 7.51853,$$
$$\text{Compl. arithm. } 2.48147 = 303{,}02\,;$$

donc enfin

$$\alpha = \tfrac{1}{303}.$$

179. Il s'agit maintenant de déterminer la longueur du quart du méridien, et dans ce but l'on remarquera qu'en la désignant par Q, la série

$$s = a(1 - e^2)\left[p\text{H} - \tfrac{1}{2}p' \sin 2\text{H} + \tfrac{1}{4}p'' \sin 4\text{H} \ldots\right]$$

donne, en y faisant $\text{H} = \frac{1}{2}\pi$, quel que soit d'ailleurs le nombre de ses termes,

$$\text{Q} = a(1 - e^2)\,p.\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{2}\pi\, a\left(1 - \tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{3}{64}e^4 \ldots\right).$$

Cette expression exacte étant divisée par la 1re série (M'), pour en éliminer le rayon a de l'équateur, il vient, en supposant toujours

l'amplitude φ exprimée en degrés,

$$(\text{P}) \qquad Q = \frac{\frac{1}{2}\pi A}{\frac{\pi}{180}\varphi - \frac{p'}{p}\sin\varphi\cos\Phi + \frac{1}{2}\frac{p''}{p}\sin 2\varphi\cos 2\Phi}.$$

Dans cette formule on a, d'après ce qui précède,

$$\frac{p'}{p} = \tfrac{3}{4}e^2 + \tfrac{3}{8}e^4; \quad \frac{p''}{p} = \tfrac{15}{64}e^4;$$

coefficients exacts aux termes près en e^6 ou du 3e ordre par rapport à l'aplatissement. Cherchons en outre les deux demi-axes.

De la même expression de Q, et de ce que $b = a(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$, on tire, avec un peu d'attention, ces deux séries

$$a = \frac{2Q}{\pi}(1 + \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{7}{64}e^4\ldots) = \frac{2Q}{\pi}(1 + \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{3}{16}\alpha^2\ldots),$$
$$b = \frac{2Q}{\pi}(1 - \tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{9}{64}e^4\ldots) = \frac{2Q}{\pi}(1 - \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{5}{16}\alpha^2\ldots);$$

puis, prenant les logarithmes de part et d'autre, on a

$$\begin{cases} \log a = \log\frac{2Q}{\pi} + \mu(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{16}\alpha^2 - \ldots), \\ \log b = \log\frac{2Q}{\pi} - \mu(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{7}{16}\alpha^2 + \ldots), \end{cases}$$

séries dans lesquelles le module tabulaire a pour logarithme .... $\log\mu = 9.6377843$.

180. Calculons d'abord numériquement le quart du méridien, et soit $\alpha = \frac{1}{303}$, ainsi que nous l'avons trouvé ci-dessus; ou plutôt prenons $e^2 = \frac{605}{(303)^2}$, puisque $e^2 = \frac{(a-b)(a+b)}{a^2}$; on aura

$$\log e^2 = 7.8188702, \quad \log\frac{p'}{p} = 7.6953591,$$
$$\log p = 0.0021542, \quad \log\varphi = 1.1076234;$$
$$\log\tfrac{1}{2}\frac{p''}{p} = 4.70602; \quad \log\frac{\pi}{180} = 8.2418774.$$

Ensuite, appelant D le dénominateur de Q, on trouvera

$$\begin{aligned} D &= 0{,}2236149 + 0{,}0000027 - 0{,}0000021 \\ &= 0{,}2236155; \end{aligned}$$

d'où l'on voit que l'aplatissement de la Terre a, dans le cas actuel, extrêmement peu d'influence sur la valeur cherchée du quart du méridien. Cette valeur s'obtient ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned} \log \tfrac{1}{2}\pi &= 0.1961199 \\ \log A &= 5.8636398 \\ \text{c. } \log D &= 0.6504981 \\ \hline \log Q &= 6.7102578 \end{aligned}$$

Partant,

$$Q = 5131658^{t} = 10001789^{m}.$$

Le quart du méridien trouvé, les demi-axes a, b, s'en déduiront naturellement, et l'on aura, sans difficulté,

$$\begin{aligned} \log a &= 6.5148549 \text{ en toises,} \\ & 0.2898200 \\ \hline \log a &= 6.8046749 \text{ en mètres,} \\ a &= 6377859^{m} \\ \log b &= 6.5134191 \text{ en toises,} \\ & 0.2898200 \\ \hline & 6.8032391 \text{ en mètres,} \\ b &= 6356809^{m}. \end{aligned}$$

181. Les mesures de France, comprises seulement entre Dunkerque et Montjouy, furent combinées avec celles du Pérou non rectifiées, lors de l'établissement de notre nouveau système des poids et mesures, dont l'unité fondamentale est le mètre ou la dix-millionième partie du quart du méridien; et elles conduisirent à des résultats assez différents de ceux qui précèdent, puisque le quart du méridien fut trouvé de 5130740 toises, et l'aplatissement terrestre de $\frac{1}{334}$. Ainsi le mètre légal est de

443$^{\text{lig.}}$,296 de la toise de fer de l'Académie, prise à 13° de Réaumur; mais, d'après la rectification que Delambre fit ensuite à quelques éléments des calculs des deux arcs cités, l'on aurait, selon nous,

$$Q = 5131110^{t} = 10000722^{m}, \text{ et } \alpha = \frac{1}{309,67};$$

par suite,

$$\log a = 6.8046130; \quad a = 6376950^{m};$$
$$\log b = 6.8032063; \quad b = 6356330^{m}. \ (*)$$

Néanmoins tous les calculs géodésiques relatifs à la triangulation de la carte de France supposent, comme Delambre,

$$Q = 10000724^{m}, \quad \text{et} \quad \alpha = 0,00324 = \frac{1}{308,65};$$

en sorte que l'on a

$$\log p = 0.0021147; \quad \log p' = 7.6894243; \quad \log p'' = 4.99165,$$

et enfin

$$\log a = 6.8046154; \quad \log \alpha = 7.5105450;$$
$$\log b = 6.8032060; \quad \log e^2 = 7.8108714.$$

Ces remarques sont utiles pour le lecteur qui voudrait procéder à la manière de nos ingénieurs-géographes.

En bornant, comme nous venons de le dire, l'arc méridien de France à Dunkerque et à Montjouy, où les latitudes ont été observées, mais prenant pour sa longueur celle que nous avons trouvée de 551616^{t},9 (*voyez* liv. VI, chap. 2), et adoptant les latitudes de ces deux stations telles que Delambre les a données en dernier lieu, l'on a

Latit. de Dunkerque. . . H = 51° 2′ 8″,50
Latit. de Montjouy. . . . H′ = 41.21.46 ,58
Arc mesuré. . . . . A = 551616^{t},9.

(*) Voyez la *Nouv. descript. géom. de la France*, tome II, page 606.

Ces quantités étant alors combinées avec celles relatives à l'arc du Pérou, l'on trouvera

$$M = 153^t,20; \quad N = 31200^t,76; \quad P = 117976^t;$$

et la série (N) donnera

$$e^2 = 0,0065469 + 0,0000253 - 0,0000214$$
$$= 0,0065508;$$

apres quoi l'on aura

$$\log e^2 = 7.8162943 \quad \text{et} \quad \log \alpha = 7.5159798;$$

ainsi

$$\alpha = 0,0032808 = \frac{1}{304,8} \text{ ou simplement } \alpha = \frac{1}{305}.$$

Passant ensuite à l'évaluation du quart du méridien, l'on aura d'abord

$$\log p = 0.0021416; \quad \log \frac{p'}{p} = 7.6927530; \quad \log \frac{p''}{p} = 5.00250;$$

et à cause de $\log A = 5.7416375$, $\log \varphi = 0.9855503$, il viendra, en vertu de la formule (P),

$$\log \text{numér.} = \log \tfrac{1}{2}\pi A = 5.9377574,$$
$$\text{dénom.} = 0,1688215 + 0,0000347 - 0,0000017$$
$$= 0,1688545, \quad \log \text{dénom.} = 9,2275127.$$

De là

$$\log Q = 6.7102447,$$

et enfin

$$Q = 5131505^t = 10001491^m;$$

ce qui porterait la longueur théorique du mètre à $3^{pi} 0^{po} 11^l,362$, et donnerait en valeurs métriques

$$\log a = 6.8046572, \quad \log b = 6.8032304;$$
$$a = 6377600^m, \qquad b = 6356680^m.$$

On voit donc que, malgré la correction que nous avons cru devoir faire à la longueur de l'arc de France employé à la détermination de l'unité fondamentale de notre système métrique, la longueur ci-dessus du mètre excède seulement de $\frac{7}{100}$ de ligne celle fixée par la loi.

En définitive, quels que soient les différents résultats qu'on obtienne pour la longueur du quart du méridien, le mètre légal déposé aux archives du Royaume, est censé la dix-millionième partie du quart du méridien d'un ellipsoïde *fictif* de révolution dont la surface s'écarte le moins possible de celle de la Terre ; et il est évident que s'il venait à se perdre, les mesures géodésiques en feraient retrouver la longueur avec un degré de précision capable de satisfaire aux besoins de la science. Mais les observations du pendule qui seront l'objet du chap. 4 du liv. VI, conduiraient bien plus rapidement au même but.

182. L'expression analytique de Q provenant de la première valeur de s de l'art. **177**, dans laquelle $H = 90°$, se développe en une série régulière et très-remarquable, comme nous allons le faire voir.

D'abord, à cause de

$$Q = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}.\frac{\pi}{2}q \quad \text{et} \quad b^2 = a^2(1-e^2) = a^2\left(\frac{1-n}{1+n}\right),$$

on a

$$Q = a(1+n)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1-n}{1+n}\right)\frac{\pi}{2}.q = a\frac{\pi}{2}q\frac{(1-n^2)}{(1+n)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= a\frac{\pi}{2}q\left(1-\frac{e^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(1-n^2);$$

mais (art. **173**)

$$q = 1 + \frac{3.5}{4^2}n^2 + \frac{3.5.7.9}{4^2.8^2}n^4 + \frac{3.5.7.9.11.13}{4^2.8^2.12^2}n^6$$
$$+ \frac{3.5.7.9.11.13.15.17}{4^2.8^2.12^2.16^2}n^8\ldots$$

Par conséquent,

$$q(1-n^2) = 1 - \frac{1}{4^2}n^2 - \frac{1.3.5}{4^2.8^2}n^4 - \frac{1.3.5.7.9}{4^2.8^2.12^2}n^6 - \frac{1.3.5.7.9.11.13}{4^2.8^2.12^2.16^2}n^8\ldots;$$

et enfin

$$Q = a\left(1-\frac{e^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{4^2}n^2-\frac{1.3.5}{4^2.8^2}n^4-\frac{1.3.5.7.9}{4^2.8^2.12^2}n^6-\frac{1.3.5.7.9.11.13}{4^2.8.12.16^2}n^8\ldots\right).$$

Lorsque $b = 0$, on a $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1$, $n = \frac{e^2}{2 - e^2} = 1$, et $Q = a$; partant

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 1 - \frac{1}{4^2} - \frac{1.3.5}{4^2.8^2} - \frac{1.3.5.7.9}{4^2.8^2.12^2} - \frac{1.3.5.7.9.11.13}{4^2.8^2.12^2.16^2} - \ldots$$

C'est aussi ce que l'on trouve à l'aide d'une valeur générale du quart d'ellipse, donnée par Legendre dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pour l'année 1786.

183. La méthode par laquelle nous avons réduit en séries procédant suivant les multiples des cosinus de la latitude, les logarithmes des diverses lignes du sphéroïde terrestre, est surtout usitée en Astronomie, et dans tous les cas où elle peut rendre les intégrations plus faciles, ou bien lorsque l'on veut calculer les termes d'une série convergente, indépendamment des tables de logarithmes. Mais l'emploi de ces tables permet de développer tout simplement les fonctions $\frac{1}{(1 + n\cos z)^u}$ et $\log(1 + n\cos z)^u$, en séries procédant suivant les puissances des cosinus de l'angle z; parce que l'évaluation de leurs termes ne se fait pas avec moins d'exactitude. On pourrait, par exemple, calculer la valeur du logarithme de la normale N, au moyen de la série suivante:

$$\log N = \log a + \tfrac{1}{2}\log(1 + n) - \tfrac{1}{2}\mu\left(n\cos 2H - \frac{n^2}{2}\cos^2 2H + \frac{n^3}{3}\cos^3 2H - \ldots\right),$$

ou même de cette autre

$$\log N = \log a + \tfrac{1}{2}\mu\left(e^2\sin^2 H + \frac{e^4}{2}\sin^4 H + \frac{e^6}{3}\sin^6 H + \ldots\right),$$

qui dérive de l'une des équations (4) de l'art. **167**, et dans laquelle le module $\mu = 0{,}43429448$. On aurait par le même procédé,

$$\log \rho = \log a + 2\log\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{3}{2}\mu\left(e^2\sin^2 H + \frac{e^4}{2}\sin^4 H + \frac{e^6}{3}\sin^6 H + \ldots\right).$$

Cependant il importe, dans la pratique, de choisir parmi les séries d'une même expression, celles qui convergent le plus rapidement. En voici d'autres qui ne sont pas moins utiles en Géodésie.

Les valeurs ci-dessus de log N et log ρ font voir sur-le-champ que

$$\log \rho = 3 \log \mathrm{N} + 2 \log \frac{b}{a} - 2 \log a = 3 \log \mathrm{N} + \log \frac{b^2}{a^4},$$

et que par conséquent le logarithme du rayon de courbure du méridien peut facilement se déduire d'une table qui donnerait celui de la normale N, connaissant d'ailleurs les logarithmes de a et de b.

Quant à la valeur du rayon r, on la mettra sous cette forme :

$$r = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \mathrm{H})^{\frac{1}{2}}} \sqrt{1 - e^2(2 - e^2) \sin^2 \mathrm{H}}.$$

Passant de là aux logarithmes et faisant, pour abréger, $e^2(1 - e^2) = k^2$, on trouvera facilement cette série régulière :

$$\log r = \log a + \tfrac{1}{2}\mu[(e^2 - k^2)\sin^2\mathrm{H} + \tfrac{1}{2}(e^4 - k^4)\sin^4\mathrm{H} + \tfrac{1}{3}(e^6 - k^6)\sin^6\mathrm{H} \ldots];$$

mais en bornant la série aux termes en e^4, on a simplement

$$\log r = \log a - \tfrac{1}{2}\mu(e^2 - e^4)\sin^2\mathrm{H} - \tfrac{3}{4}\mu e^4 \sin^4\mathrm{H};$$

et en éliminant log a donné précédemment, il vient

$$\log r = \log \frac{2\mathrm{Q}}{\pi} + \tfrac{1}{4}\mu e^2 \cos 2\mathrm{H} + \tfrac{5}{64}\mu e^4 + \tfrac{1}{2}\mu e^4 \sin^2\mathrm{H} - \tfrac{3}{4} e^4 \sin^4\mathrm{H} \ldots,$$

ou en fonction de l'aplatissement,

$$\log r = \log \frac{2\mathrm{Q}}{\pi} + \tfrac{1}{2}\mu\alpha \cos 2\mathrm{H} + \tfrac{3}{16}\mu\alpha^2 + \tfrac{1}{4}\mu\alpha^2 \cos 2\mathrm{H} - \tfrac{3}{8}\mu\alpha^2 \cos 4\mathrm{H} \ldots,$$

Q représentant, comme ci-devant, le quart du méridien, et π le rapport de la circonférence au diamètre.

Si l'on voulait la valeur immédiate de ce rayon, elle serait donnée

par cette série régulière

$$r = a\sqrt{1-(e^2-e^4)\sin^2 H-(e^4-e^6)\sin^4 H-(e^6-e^8)\sin^6 H\ldots.}$$

Faisant disparaître le radical en élevant à la puissance $\frac{1}{2}$ la quantité qu'il renferme, et s'arrêtant, dans le développement, aux termes en e^4, il vient

$$r = a\left[1-\tfrac{1}{2}(e^2-e^4)\sin^2 H-\tfrac{5}{8}e^4\sin^4 H\ldots\right].$$

Remplaçant maintenant e^2 par sa valeur $2\alpha-\alpha^2$, on a enfin, sans erreur sensible et toutes réductions faites,

$$r = a\left(1-\alpha\sin^2 H+\tfrac{5}{8}\alpha^2\sin^2 .\, 2H\right),$$

expression toujours suffisante, à cause de la petitesse du 3e terme, et à plus forte raison, des termes subséquents.

CHAPITRE XIV.

CONTINUATION DE LA RECHERCHE DES EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES DIVERSES LIGNES DU SPHÉROIDE TERRESTRE.

184. On s'est proposé, à l'art. **177**, d'exprimer un arc d'ellipse en fonction des latitudes de ses extrémités; mais, dans la pratique de la Géodésie, il est quelquefois plus commode, lorsque cet arc a une petite amplitude, de l'avoir en fonction de son rayon de courbure.

Soient A un arc du méridien, U son amplitude, H la latitude de son extrémité sud, et ρ son rayon de courbure au même point; on a en général, par le théorème de Maclaurin,

$$A = \left(\frac{dA}{dH}\right) U + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2A}{dH^2}\right) U^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3A}{dH^3}\right) U^3 + \ldots;$$

les valeurs des coefficients différentiels étant déterminées pour le cas où $U = 0$. Mais, par l'art. **170**, $\left(\frac{dA}{dH}\right) = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}} = \rho$; si donc on calcule les coefficients différentiels suivants, en ne conservant que les termes en e^2, on trouvera aisément

$$(\text{I})\quad A = \rho U + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}e^2\rho\frac{\sin 2H}{1-e^2\sin^2 H}U^2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2.3}e^2\rho\frac{\cos 2H}{1-e^2\sin^2 H}U^3 - \frac{3}{2}\cdot\frac{2^2}{2.3.4}e^2\rho\frac{\sin 2H}{1-e^2\sin^2 H}U^4 - \ldots;$$

série régulière et qu'on peut écrire plus brièvement ainsi:

$$A = \rho U \sin 1'' + \frac{3}{4}\frac{e^2}{a^2}\rho N^2 \sin 2H . U^2 \sin^2 1'' + \frac{1}{2}\frac{e^2}{a^2}\rho N^2 \cos 2H . U^3 \sin^3 1'' - \ldots\ldots,$$

en supposant l'amplitude U exprimée en secondes, et désignant par N la normale à la latitude H (*).

Or il est remarquable que tous les termes en U^2, U^4, U^6,... forment cette suite:

$$V = \frac{3}{2}\frac{e^2\rho}{2^2} \cdot \frac{\sin 2H}{1-e^2\sin^2 H}\left[\frac{(2U)^2}{2} - \frac{(2U)^4}{2.3.4} + \frac{(2U)^6}{2.3.4.5.6} - \ldots\right];$$

tandis que les termes en U^3, U^5, U^7,... forment celle-ci:

$$V' = \frac{3}{2}\frac{e^2\rho}{2^2} \cdot \frac{\cos 2H}{(1-e^2\sin^2 H)}\left[\frac{(2U)^3}{2.3} - \frac{(2U)^5}{2.3.4.5} + \frac{(2U)^7}{2.3.4.5.6.7} - \ldots\right];$$

ainsi, en négligeant les termes en e^4, on a

$$V = \tfrac{3}{8}e^2\rho\sin 2H[1-\cos 2U], \quad V' = \tfrac{3}{8}e^2\rho\cos 2H[2U-\sin 2U];$$

et partant, sous forme finie,

$$\begin{aligned} A &= \rho U + \tfrac{3}{8}e^2\rho[\sin 2H(1-\cos 2U) + \cos 2H(2U-\sin 2U)] \\ &= \rho U + \tfrac{3}{8}e^2\rho[\sin 2H - \sin 2(H+U) + 2U\cos 2H]. \end{aligned}$$

Mais si H et H' sont les latitudes des extrémités de A, on a $U = H' - H$, et par conséquent

$$A = \rho(H'-H)\left[1 + \frac{3}{4}e^2\cos 2H - \frac{3}{4}e^2\frac{\sin U\cos(H'+H)}{U}\right].$$

(*) Cette série, qui a la forme $A = \rho U + \rho' U^2 + \rho'' U^3 \ldots$, se rapporterait à un arc de méridien dont l'origine H serait au Panthéon et l'autre extrémité plus au nord, en faisant

$$\log\rho = 5.0460677, \quad \log\rho' = 0.9715463, \quad \log\rho'' = 8.16797;$$

ce qui suppose que les dimensions de l'ellipsoïde sont celles admises dans les opérations géodésiques de la carte de France (**181**), et que l'amplitude U de l'arc est exprimée en degrés sexagésimaux. Cette amplitude devrait être prise négativement si l'arc A s'étendait au sud du Panthéon. (Voyez *Descript. géom. de la France*, tome II, page 636.)

D'ailleurs

$$\sin(H'-H) = U\left(1 - \frac{U^2}{2\ 3} + \ldots\right),$$

$$\cos(H'-H)^{\frac{1}{3}} = \left(1 - \frac{U^2}{2} + \ldots\right)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{U^2}{2.3}\ldots;$$

ainsi l'on a définitivement, en prenant H' — H en degrés sexagésimaux,

$$A = \frac{\pi\rho}{180^\circ}(H'-H)\left[1 + \frac{3}{4}e^2\cos 2H - \frac{3}{4}e^2\cos^{\frac{1}{3}}(H'-H)\cos(H'+H)\right];$$

c'est aussi ce que donnerait, avec un peu d'attention, la 3[e] formule de l'art. **177**. Il est évident qu'il faudrait substituer 200^g à la place de 180°, si les latitudes étaient exprimées en grades.

Faisant $U = 1^\circ$, et de plus $e = \sin I$, ou l'aplatissement $\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}I$, ce qui est permis, puisque e est une fraction moindre que l'unité, la série (I) ou la formule précédente donnera assez exactement, pour l'arc M d'un degré du méridien,

$$(m) \qquad M = \frac{a\pi\cos^2 I}{180^\circ(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}\left(1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{180^\circ}\operatorname{tang}^2 I\sin 2H\right);$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre. Si H désignait la latitude de l'extrémité nord, il faudrait prendre $\frac{\pi}{180}$ négativement. Mais au lieu d'exprimer la longueur du degré du méridien par la latitude de l'une de ses extrémités, on suppose ordinairement le rayon de courbure de cet arc mené par son milieu, dont la latitude est alors $\frac{1}{2}(H+H') = \psi$. Ainsi l'on a simplement

$$M = \frac{\pi}{180}\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}};$$

et si l'on développe en s'arrêtant aux termes en e^2, il vient

$$M = \frac{\pi}{180}a(1-e^2)(1+\tfrac{3}{2}e^2\sin^2\psi),$$

ou, pour abréger,

$$M = P + Q\sin^2\psi,$$

en faisant

$$P = \frac{\pi}{180} a(1 - e^2), \quad Q = \frac{3}{2} e^2 P.$$

On voit donc que les longueurs des degrés sur l'ellipsoïde de révolution croissent de l'équateur aux pôles, sensiblement comme les carrés des sinus des latitudes de leurs milieux.

Pour un autre arc M′ d'un degré, correspondant à la latitude ψ', on a pareillement

$$M' = P + Q \sin^2 \psi';$$

ainsi généralement

$$M - M' = \Delta^{(1)} = Q \sin(\psi + \psi') \sin(\psi - \psi'),$$

et pour deux degrés consécutifs, leur différence est

$$\Delta^{(1)} = \frac{\pi}{180} a e^2 (1 - e^2) \sin(2\psi' + 1^\circ) \sin 1^\circ.$$

Par exemple, à la latitude de 48°50′, et en admettant pour valeurs de a et de e^2 celles de l'art. **181**, on trouve que l'accroissement d'un degré à la latitude de Paris, et en allant vers le nord, est $\Delta^{(1)} = 18^{m},4$.

Les valeurs ci-dessus de M et M′ étant divisées l'une par l'autre, conduisent à celle-ci :

$$\frac{1}{2} e^2 = \frac{M' - M}{3 (M \sin^2 \psi' - M' \sin^2 \psi)} = \alpha;$$

formule attribuée à Maupertuis et qui donne approximativement l'aplatissement de la Terre par la mesure de deux degrés de méridiens, pourvu cependant qu'ils répondent à des latitudes très-différentes, afin que le dénominateur de α soit le plus grand possible. Cette condition étant remplie par les degrés de l'équateur et de France, on a, d'après l'art. **178**, et en vertu de la notation actuelle,

En France,	$M = 111131^{m},2,$	$\psi = \quad 45^\circ\, 4'\, 18'',05;$
A l'équateur,	$M' = 110582^{m},1,$	$\psi' = - \quad 1.31.\ 0,50.$

De là

$$\alpha = \frac{549,1}{3.55351,54} = \frac{183,033}{55351,54} = \frac{1}{302,4},$$

résultat bien peu différent de celui que nous avons obtenu précédemment en poussant plus loin l'approximation.

185. La méthode employée ci-dessus, pour développer un arc en série ordonnée suivant les puissances de son amplitude, s'applique également au problème inverse. En effet, on a généralement

$$U = \left(\frac{dH}{dA}\right) A + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2H}{dA^2}\right) A^2 + \frac{1}{2\ 3}\left(\frac{d^3H}{dA^3}\right) A^3 + \ldots;$$

mais

$$\left(\frac{dH}{dA}\right) = \frac{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}{a(1 - e^2)} = \frac{1}{\rho};$$

cherchant donc les autres coefficients différentiels, et ne conservant que les termes en e^2; puis faisant attention que $e^2 \frac{a^2}{b^2} = \text{tang}^2\ I$, et que $N = \rho' = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$, on obtiendra en parties du rayon,

$$\text{(II)} \quad U = \frac{A}{\rho} - \frac{3}{4}\text{tang}^2 I \sin 2H . \frac{A^2}{\rho\rho'} - \frac{3}{2}.\frac{2}{2.3}\text{tang}^2 I \cos 2H . \frac{A^3}{\rho^2\rho'} + \frac{3}{2}.\frac{2^2}{2.3.4}\text{tang}^2 I \sin 2H . \frac{A^4}{\rho^3\rho'} + \ldots;$$

série encore régulière, et dont la loi des termes est en évidence. Jamais, dans la pratique, on n'a besoin de tenir compte du quatrième terme.

Si l'on bornait la série au terme A^3, et que l'on conservât la quatrième puissance de l'excentricité, on trouverait

$$\text{(III)} \quad U = \frac{A}{\rho} - \frac{3a^2\ e^2 \sin 2H}{4b^2\rho\rho'} A^2 - \frac{a^2e^2}{2b^2}\left[\frac{\cos 2H}{\rho^2\rho'} - \frac{e^2 \sin^2 2H}{4\rho}\left(\frac{3a^2}{b^2\rho'^2} + \frac{\rho'}{a^2\rho}\right)\right] A^3;$$

mais comme, par cette formule, l'amplitude U serait donnée en parties de l'unité, il faudrait, pour l'avoir en grades, multiplier tous les termes du second membre par $\frac{200}{\pi}$, π ayant la même signification que ci-dessus.

186. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que le rayon de courbure de l'ellipse génératrice de l'ellipsoïde de révolution : occupons-nous de la recherche de celui d'une section faite dans ce corps, par un plan mené d'une manière quelconque suivant une des normales; et, pour cet effet, désignons par x', y' les coordonnées rectangles d'un point de la limite de cette section verticale; prenons pour axe des x' la normale à un point du méridien elliptique ayant H pour latitude; plaçons l'origine des x' au point d'intersection du rayon de l'équateur et de la normale dont il s'agit; enfin, désignons par x, y, z les coordonnées rectangles d'un point quelconque de l'ellipsoïde de révolution, de manière que le rayon a de l'équateur soit l'axe des x, b celui du pôle l'axe des y, et la droite perpendiculaire au plan des xy l'axe des z. Cela posé, l'équation de l'ellipsoïde, rapportée au centre, sera

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2(z^2+x^2) = a^2b^2;$$

or, pour trouver en général l'équation de la section faite dans ce corps, il faut, comme l'on sait, substituer à x, y, z les valeurs suivantes :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \gamma + x'\cos\text{H} + y'\sin\text{H}\cos\theta, \\ y &= x'\sin\text{H} - y'\cos\text{H}\cos\theta, \\ z &= y'\sin\theta, \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles θ est l'angle que le plan sécant fait avec le méridien xy, et γ la distance du centre de l'ellipsoïde au point où la normale rencontre le rayon de l'équateur (art. **167**), auquel cas $\gamma = \dfrac{ae^2\cos\text{H}}{(1-e^2\sin^2\text{H})^{\frac{1}{2}}}$; e désignant toujours le rapport de l'excentricité au demi grand axe. Ces substitutions faites, on a un résultat de cette forme :

$$(3) \qquad mx'^2 + ny'^2 - px'y' + qx' + ry' = s;$$

c'est l'équation à l'ellipse, ou celle de l'intersection cherchée. Il est facile de voir que l'on a

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} m &= a^2\sin^2\text{H} + b^2\cos^2\text{H}, & n &= b^2 + (a^2-b^2)\cos^2\text{H}\cos^2\theta, \\ p &= 2(a^2-b^2)\sin\text{H}\cos\text{H}\cos\theta, & q &= 2\gamma b^2\cos\text{H}, \\ r &= 2\gamma b^2\sin\text{H}\cos\theta, & s &= (a^2-\gamma^2)b^2. \end{aligned} \right.$$

Lorsque cette ellipse est perpendiculaire au méridien, on a $\theta = \frac{1}{2}\pi$ et pour lors $\cos\theta = 0$; circonstance qui réduit l'équation (3) à la suivante :

$$(5)\quad (a^2\sin^2 H + b^2\cos^2 H)x'^2 + 2\eta b^2\cos H . x' + b^2 y'^2 = (a^2 - \eta^2)\, b^2,$$

et de laquelle, en faisant $y' = 0$, l'on tire

$$x' = \frac{-b^2\eta\cos H \pm \sqrt{b^2(a^2-\eta^2)(a^2\sin^2 H + b^2\cos^2 H) + b^4\eta^2\cos^2 H}}{a^2\sin^2 H + b^2\cos^2 H}.$$

Soient donc x'_1, x'_2 ces deux racines, abstraction faite de leurs signes; on trouvera, avec un peu d'attention, et après avoir mis pour η sa valeur rapportée ci-dessus,

$$x'_1 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}, \qquad x'_2 = \frac{a(1-e^2)(1+e^2\cos^2 H)}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}(1-e^2\cos^2 H)};$$

la première racine est la normale N' (art. **167**), et la seconde racine, la partie opposée de la corde $x'_1 x'_2$.

Soient en outre a' le demi grand axe de l'ellipse dont il s'agit, et b' son demi petit axe; on aura

$$b' = \frac{x'_1 + x'_2}{2} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}(1-e^2\cos^2 H)}.$$

Pour trouver le demi grand axe, on chassera le second terme en x' de l'équation (5), et cela en faisant $x' = x'' - \frac{b^2\eta\cos H}{a^2\sin^2 H + b^2\cos^2 H}$; de cette manière on aura

$$(a^2\sin^2 H + b^2\cos^2 H)x''^2 + b^2 y'^2 = \frac{b^2(a^2-\eta^2)(a^2\sin^2 H + b^2\cos^2 H) + b^4\eta^2\cos^2 H}{a^2\sin^2 H + b^2\cos^2 H},$$

ou, pour abréger,

$$m x''^2 + n y'^2 = P.$$

Mais à $x'' = 0$ correspond $y' = a'$; partant

$$a' = \frac{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}(1-e^2\cos^2 H)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{P}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si au contraire on faisait $y' = 0$, on aurait $x'' = b'$, et l'on retomberait sur la valeur du demi-axe trouvée ci-dessus, ou, ce qui est de même, on aurait

$$b' = \left(\frac{P}{m}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Enfin, désignant par e' l'excentricité de cette même ellipse, on aura

$$e'^2 = \frac{a'^2 - b'^2}{a'^2} = \frac{m-n}{m},$$

et, à cause des valeurs précédentes,

$$e'^2 = \frac{e^2 \sin^2 H}{1 - e^2 \cos^2 H}.$$

187. Maintenant, pour avoir l'expression générale du rayon R de courbure de la section que l'on considère, quelle que soit d'ailleurs la valeur de l'angle θ, nous ferons usage de la formule connue, savoir :

$$R = \frac{-\left(1 + \frac{dx'^2}{dy'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x'}{dy'^2}},$$

dans laquelle la différentielle dy' est constante; et pour introduire ici les valeurs de $\frac{dx'}{dy'}$ et $\frac{d^2x'}{dy'^2}$, nous différencierons deux fois de suite l'équation (3); mais comme nous avons en vue de trouver le rayon de courbure à l'origine de la normale à l'ellipse du méridien, nous ferons alors $y' = 0$ dans le résultat de la différenciation, en sorte qu'il viendra

$$\frac{dx'}{dy'} = -\frac{(r - px')}{q + 2mx'}, \quad \frac{d^2x'}{dy'^2} = \frac{-2m\left(\frac{dx'^2}{dy'^2}\right) + 2p\left(\frac{dx'}{dy}\right) - 2n}{q + 2mx'};$$

et puisque la section est faite suivant cette normale, on a (art. **167**)

$$x' = \frac{b^2}{a(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} = N'.$$

Il résulte de là et des relations (4), que la quantité $r - px' = 0$; donc quand le rayon de courbure cherché coïncide avec la normale à l'ellipse du méridien, on a simplement

$$R = \frac{q + 2mx'}{2n}.$$

Remplaçant maintenant m, q, n, x' par leurs valeurs précédentes, on a, pour une section verticale quelconque,

$$(6) \qquad R = \frac{ab^2}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}} [b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 H \cos^2 \theta]}.$$

Soient ρ et ρ' le rayon de courbure du méridien et celui de l'arc perpendiculaire au même point; on aura le premier en faisant $\theta = 0$, et le second en faisant $\theta = 100^g$: ainsi, comme l'on sait d'ailleurs, les rayons de plus petite et de plus grande courbure de la Terre sont

$$\rho = \frac{b^2}{a(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \rho' = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}.$$

On voit par là que la valeur de ρ' est égale à celle de la normale N (art. **167**).

Afin de donner à l'expression (6) une forme symétrique et dépendante de ρ, ρ', on pourra d'abord écrire

$$R = \frac{\rho' b^2}{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 H \cos^2 \theta} = \frac{\rho' b^2}{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \theta - (a^2 - b^2) \sin^2 H \cos^2 \theta},$$

et mettre $b^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta$ au lieu de b^2; ce qui donnera

$$R = \frac{\rho' b^2}{a^2 \cos^2 \theta (1 - e^2 \sin^2 H) + b^2 \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\rho' b^2}{a(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{3}{2}} \left[\dfrac{a \cos^2 \theta}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{b^2 \sin^2 \theta}{a(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}} \right]},$$

enfin,

$$(7) \qquad R = \frac{\rho\rho'}{\rho \sin^2 \theta + \rho' \cos^2 \theta}.$$

Tel est le résultat auquel Euler est parvenu le premier, par une autre méthode analytique. Il exprime une propriété remarquable de l'ellipsoïde de révolution; mais cette propriété, commune aux surfaces courbes en général (*voy*. la théorie des osculations de ces surfaces, *Calcul différentiel* de M. Lacroix, tom. I, pag. 372, 2e édit.), se démontre très-directement, par l'analyse précédente.

188. Une ligne géodésique menée dans une direction quelconque, se confondant sensiblement, dans une étendue de plusieurs degrés, avec la section verticale correspondante, ainsi qu'on le prouverait à l'aide des formules que nous donnerons par la suite, il s'ensuit que l'arc d'un degré d'une section perpendiculaire au méridien peut être pris pour l'arc de plus courte distance ayant même amplitude et même direction. Cela posé, si l'on désigne par D, M et P le degré oblique, le degré du méridien et celui qui lui est perpendiculaire, on pourra, dans l'expression (7), remplacer R, ρ et ρ' par D, M et P, puisque les arcs semblables sont entre eux comme leurs rayons; on aura donc

$$D = \frac{M.P}{M\sin^2\theta + P\cos^2\theta} = \frac{M}{1 - \left(\frac{P-M}{P}\right)\sin^2\theta},$$

ou réduisant en série, et n'en conservant que les deux premiers termes, il viendra

$$(8) \qquad D = M\left(1 + \frac{P-M}{P}\sin^2\theta\right).$$

Quoique cette formule ne soit qu'approximative, puisque les arcs D, M, P, en vertu de la propriété des rayons de courbure, devraient être infiniment petits, cependant c'est ce qu'on peut proposer de mieux pour la pratique. Pour en faire usage, il faudrait connaître M et P. Or, nous avons déjà donné M en fonction de son rayon de courbure (art. **184**): cherchons à exprimer P d'une manière semblable. Dans cette vue, remarquons que si, dans la série (I) (art. cité), on suppose $H = 90^0$, alors U sera négative, $\rho = \rho'$, et l'on aura simplement

$$M = \rho' U - \tfrac{1}{2}e^2\rho' U^3 \ldots$$

Mais, par l'art. **186**, l'origine d'un arc P′ perpendiculaire au méridien est l'extrémité du petit axe de cet arc elliptique ; ainsi, à cause de $\rho' = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$, et parce que e^2 se change en e'^2, on a en général

$$P' = \frac{\pi}{180}\rho' U\left(1 - \tfrac{1}{2}e^2 \sin^2 H. \frac{\pi^2}{180^2}U^2\right).$$

Or, à la latitude de 49°, qui est à peu près celle de Paris, pour une amplitude U de 5° et un aplatissement de $\frac{1}{100}$, le second terme de cette valeur serait de 24ᵐ environ, tandis que le troisième terme n'irait pas à un décimètre ; on a donc la longueur du premier degré de l'arc P′ censé mesuré, en prenant la valeur de $\frac{\pi}{180}\rho'$ de l'expression précédente. Soit P cette valeur ; alors

$$(p) \qquad P = \frac{a\pi}{180\,(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}.$$

Maintenant si l'on suppose que les longueurs M et P d'un degré du méridien et d'un degré perpendiculaire à la même latitude H, soient connues, on pourra, par la combinaison des formules (m) et (p), déterminer l'excentricité de la Terre. En effet, on tire de ces deux formules, et à cause de $e^2 = \sin^2 I$,

$$\frac{M}{\cos^2 I\left(1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{180}\operatorname{tang}^2 I \sin 2H\right)} = \frac{P}{1 - \sin^2 I \sin^2 H};$$

par suite,

$$M \sin^2 I + M \cos^2 I - M \sin^2 I \sin^2 H = P \cos^2 I + \frac{3}{4}\frac{\pi}{180} P \sin^2 I \sin 2H;$$

enfin, à cause de $\frac{P}{M} = 1$ à très-peu près, on a

$$\operatorname{tang}^2 I = \frac{P - M}{M \cos^2 H\left(1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\operatorname{tang} H\right)},$$

ou bien

$$\frac{P-M}{M} = \text{tang}^2 I \cos^2 H - \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{180} \text{tang}^2 I \sin 2H.$$

Mais le second terme de cette expression est évidemment très-petit; si on le négligeait, on aurait la relation $\frac{P-M}{M} = \text{tang}^2 I \cos^2 H$, donnée par Delambre, dans la *Connaissance des Temps* pour l'année 1818, page 252 : toutefois, il paraît convenable de conserver ce terme. Tang I étant trouvée par ce moyen, on aura $e = \sin I$, et par suite, aplatissement $\alpha = 2\sin^2 \frac{1}{2} I$, comme on l'a déjà dit (art. **184**).

Dans toutes ces formules, π désigne la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est l'unité. Bien entendu que si H était la latitude de l'extrémité nord de M, il faudrait, dans la dernière formule ci-dessus, faire $\frac{\pi}{180}$ négatif.

Si, au lieu de connaître P, on connaissait l'arc B d'un degré du parallèle à la même latitude, il est facile de s'assurer qu'on aurait

$$B = \frac{a\pi \cos H}{180(1-e^3 \sin^3 H)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{et par conséquent} \quad \frac{B}{\cos H} = P.$$

Nous pouvons actuellement donner à la relation (7) une forme toute nouvelle; il suffit pour cela de remplacer M par sa valeur (m), et de faire attention que $\frac{P-M}{P} = \frac{P-M}{M} \cdot \frac{M}{P} = \frac{P-M}{M}$ à fort peu près; on aura en conséquence

$$(d) \quad D = \frac{\pi\rho}{180}\left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{180} \text{tang}^2 I \sin 2H \cos^2 \theta + \text{tang}^2 I \cos^2 H \sin^2 \theta\right).$$

189. Il est utile de connaître en général la différence des normales N, N' correspondantes aux latitudes H, H'. Pour l'avoir en série développée suivant les puissances de $H' - H = \Delta H$, soit

$$N' = f(\Delta H),$$

f étant le signe d'une fonction quelconque; on aura, par le théorème

de Maclaurin,

$$N' = N + \left(\frac{dN'}{dH'}\right)\Delta H + \left(\frac{d^2N'}{dH'^2}\right)\frac{\Delta H^2}{2} + \left(\frac{d^3N'}{dH'^3}\right)\frac{\Delta H^3}{2.3} + \ldots;$$

les valeurs des coefficients différentiels étant prises pour le point où $\Delta H = 0$. Or, on a

$$N' = a\left[1 + \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 H' + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}e^4\sin^4 H' + \text{etc}\ldots\right];$$

et si l'on fait attention qu'au point où $H' = H$, on a $N' = N$, les coefficients différentiels, pris dans cette hypothèse, seront

$$\left(\frac{dN'}{dH'}\right) = a\left[e^2\sin H\cos H + \frac{1}{2}.\,3e^4\sin^3 H\cos H\ldots\right],$$
$$\left(\frac{d^2N'}{dH'^2}\right) = a\left[e^2\cos^2 H - e^2\sin^2 H + \frac{9}{2}e^4\sin^2 H\cos^2 H - \frac{3}{2}e^4\sin^4 H\ldots\right].$$

Mais à cause de $e^2 = 2\alpha - \alpha^2$, α étant le rapport de l'aplatissement de la Terre au demi grand axe, il s'ensuit que e^2 est de l'ordre de cet aplatissement, comme nous l'avons déjà fait observer (art. **70**). Si donc ΔH est de cet ordre, et qu'on rejette les termes supérieurs au troisième ordre, on aura

$$(n)\quad N' - N = \tfrac{1}{2}ae^2\sin 2H.\left(1 + \tfrac{3}{2}e^2\sin^2 H\right)\Delta H + \tfrac{1}{2}ae^2\cos 2H.\,\Delta H^2,$$

ou, en se bornant au terme du second ordre, ainsi que cela est souvent permis dans la pratique,

$$(n')\qquad N' - N = \tfrac{1}{2}ae^2\,\Delta H\sin 2H.$$

Il est à remarquer que quand $H' < H$, la différence ΔH est négative; ainsi, pour avoir égard à cette circonstance, il faudrait, dans la série (n), changer le signe des termes où ΔH est affectée d'une puissance impaire.

190. Voici encore quelques conséquences de la théorie précédente. La série donnée (art. **179**) pouvant s'écrire ainsi

$$s = Q\left[\frac{H}{90^\circ} - \frac{p'}{p}\frac{\sin 2H}{\pi} + \frac{1}{2}\frac{p''}{p}\frac{\sin 4H}{\pi}\ldots\right],$$

lorsque Q désigne le quart du méridien ; on a, en fonction de l'aplatissement et en s'arrêtant aux termes du second ordre,

$$s = Q\left[\frac{H}{90^\circ} - \left(\frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{4}\alpha^2\right)\frac{\sin 2H}{\pi} + \frac{15}{32}\alpha^2\frac{\sin 4H}{\pi}\ldots\right];$$

par conséquent un arc de méridien quelconque, compris entre les latitudes H, H', est exprimé par

$$A = Q\left[\frac{H-H'}{90^\circ} - \frac{1}{\pi}\left(3\alpha + \frac{3}{2}\alpha^2\right)\sin(H-H')\cos(H+H') + \frac{15}{16}\frac{\alpha^2}{\pi}\sin 2(H-H')\cos 2(H+H')\right].$$

Pour un arc D d'un degré, on fera $H - H' = 1^\circ$; et si l'on part de cette hypothèse que $Q = 10000000^m$ et $\alpha = 0{,}00324$, que de plus $H > H'$; on aura

$$D = 111111^m{,}111 - 540^m{,}848\cos(H+H') + 1^m{,}097\cos 2(H+H'),$$

tandis que pour un arc G d'un grade, on aura

$$G = 100000^m - 486^m{,}763\cos(H+H') + 0^m{,}987\cos 2(H+H').$$

Un arc B de parallèle, dont la latitude est ψ et l'amplitude exprimée en degrés est U, a généralement pour expression

$$B = \frac{2\pi x.U}{360^\circ} = \frac{\pi}{180}aU\frac{\cos\psi}{(1-e^2\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}},$$

et en série

$$B = \frac{\pi}{180}aU\cos\psi\left[1 + \frac{1}{2}e^2\sin^2\psi + \frac{3}{8}e^4\sin^4\psi\ldots\right],$$

ou en fonction de l'aplatissement

$$B = \frac{\pi}{180}aU\cos\psi\left[1 + \frac{1}{2}(2\alpha - \alpha^2)\sin^2\psi + \frac{3}{2}\alpha^2\sin^4\psi\ldots\right];$$

ainsi, en faisant $U = 1^\circ$, on aura la longueur d'un degré de longitude

à la latitude ψ; ou bien en remplaçant 180^0 par 200^G et faisant de même $U = 1^G$, on aura le grade de longitude.

La table V, extraite de la *Base du système métrique décimal*, donne les valeurs des arcs de méridien et de parallèles, en supposant que l'ellipsoïde terrestre a les dimensions ci-dessus énoncées.

191. La recherche des dimensions de l'ellipsoïde osculateur de révolution à la surface de la Terre, en un point dont la latitude est ψ, exige qu'on ait recours à ses deux lignes de courbure qui sont le méridien et le parallèle en ce point, parce qu'elles offrent deux équations distinctes entre le demi grand axe et le carré de l'excentricité, deux principales quantités à déterminer. En effet, l'arc A de méridien a, d'après ce qui précède, la forme

$$\frac{\mathrm{A}}{\varphi} = \mathrm{A}_m = \frac{a\pi}{180}[1 - \mathrm{R}e^2 - \mathrm{T}e^4 \ldots],$$

dans laquelle

$$\mathrm{R} = \frac{1}{4} - \frac{135}{\pi}.\frac{\sin\varphi\cos\Phi}{\varphi},$$

$$\mathrm{T} = \frac{3}{4} + \frac{135}{\pi}.\frac{\sin\varphi\cos\Phi}{\varphi} - \frac{3}{4}.\frac{135}{\pi}.\frac{\sin 2\varphi\cos 2\Phi}{\varphi},$$

ainsi qu'on s'en assurera en ordonnant la série (M') de l'art. **177** suivant les puissances de l'excentricité.

L'arc B de parallèle donne lieu à une série de même forme, en faisant $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{U}} = \mathrm{B}_m$, et $\frac{\mathrm{B}'_m}{\cos\psi} = \mathrm{A}'_m$; puisqu'on a

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{U}\cos\psi} = \mathrm{A}'_m = \frac{a\pi}{180}[1 - \mathrm{R}'e^2 - \mathrm{T}'e^4 \ldots],$$

lorsqu'on fait

$$\mathrm{R}' = -\tfrac{1}{2}\sin^2\psi, \qquad \mathrm{T}' = -\tfrac{3}{8}\sin^4\psi.$$

Telles sont les valeurs analytiques de A_m et A'_m qu'il s'agit de combiner entre elles pour en obtenir celle de e^2. Or, en les divisant l'une par l'autre, on a sur-le-champ

$$e^2 = \frac{\mathrm{A}'_m - \mathrm{A}_m - e^4(\mathrm{A}'_m\mathrm{T} - \mathrm{A}_m\mathrm{T}')}{\mathrm{A}'_m\mathrm{R} - \mathrm{A}_m\mathrm{R}'},$$

et appelant e_0^2 la valeur approchée de e^2, qui résulte d'abord de la suppression du terme en e^4, il vient, par une seconde approximation,

$$e^2 = \frac{A'_m - A_m}{A'_m R - A_m R'} - e_0^4 \frac{A'_m T - A_m T'}{A'_m R - A_m R'}.$$

Mais, vu que le premier terme peut toujours suffire, on a définitivement

$$e^2 = \frac{B_m - A_m \cos\psi}{B_m \left[\frac{1}{4} + \frac{135}{\pi} \cdot \frac{\sin\varphi \cos\Phi}{\varphi}\right] + \frac{1}{2} A_m \cos\psi \sin^2\psi},$$

et même assez approximativement

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}(B_m - A_m \cos\psi)}{B_m (1 - \frac{3}{2}\sin^2 \frac{1}{2}\Phi) + \frac{1}{2} A_m \cos\psi \sin^2\psi};$$

expression dans laquelle $\frac{1}{2}\Phi = \frac{1}{2}(H + H')$, et qui provient des valeurs de A_m et de B_m réduites au même degré d'approximation. Nous ferons, par la suite, une application numérique de cette formule.

CHAPITRE XV.

FORMULES POUR DÉTERMINER LES LATITUDES, LONGITUDES ET AZIMUTS DES OBJETS TERRESTRES.

192. Tous les sommets des triangles d'un réseau sont tellement liés entre eux, que si la position géographique de l'un d'eux était connue, c'est-à-dire sa latitude et sa longitude, et que la ligne géodésique qui joint ce sommet à un autre du réseau fût orientée, la position géographique de tous les points de ce réseau et les azimuts des côtés seraient également connus. Le problème à résoudre en ce moment est donc celui-ci : La latitude et la longitude du point M (*fig.* 40) étant données, ainsi que l'azimut du point M′ sur l'horizon de M, trouver tant la latitude et la longitude de ce second point, que l'azimut de M sur l'horizon de M′.

Avant que les méthodes géodésiques eussent été portées au degré de perfection où elles se trouvent maintenant, les géographes résolvaient cette question par la Trigonométrie sphérique seulement, en prenant pour rayon de la Terre celui qui résulte du degré moyen dans la région du réseau. On conçoit en effet que si, par les points M, M′, on mène les méridiens PM, PM′, le point P sera le pôle de la Terre, et que dans le triangle sphérique MM′P l'on connaîtra l'angle M′MP ou l'azimut de M′, ainsi que deux côtés, savoir : MM′ ou un côté du réseau évalué en secondes (art. **130**), et PM ou le complément de la latitude de M. On pourrait donc, par les Analogies de Néper, déterminer l'angle MM′P, ou l'azimut du point M sur l'horizon de M′, l'angle P ou la différence des méridiens, enfin le côté M′P ou le complément de la latitude de M′; mais par ce moyen, l'on n'obtiendrait pas la latitude particulièrement avec assez de précision. Voici une autre méthode qui est de beaucoup préférable.

PREMIÈRE SOLUTION.

195. L'hypothèse de la sphéricité de la Terre ne pouvant manquer de simplifier la question, considérons une sphère du rayon égal à la normale MN au point M donné sur la Terre elliptique, et les arcs de grand cercle pM, pM' comme les méridiens de M et de M' sur la sphère fictive; puis calculons la position géographique du point M', en résolvant le triangle sphérique pMM', non par les formules finies de l'art. **78**, lesquelles ne donneraient pas assez de précision dans la pratique, à cause de la petitesse de la ligne géodésique MM', mais par les séries de l'art. **98**, qui ont une exactitude indéfinie. Ensuite, nous examinerons l'erreur qui résulte de notre supposition.

Soient à cet effet H la latitude du point M; H' celle du point M'; P, P' les longitudes de ces mêmes points, ou les angles MPa, $M'Pa$; enfin V, V' les inclinaisons de la ligne géodésique $MM'=K$, ou de son prolongement sur les méridiens respectifs pM, pM'. On aura, en transportant cette notation dans le triangle sphérique ABC, résolu à l'art. **98**, et en désignant par u le côté K réduit en parties du rayon,

$$a=100^g-H',\quad A=V,$$
$$b=100^g-H,\quad B=200^g-V',$$
$$c=u,\quad C=P'-P.$$

Telles seraient les valeurs à introduire dans les séries (III), (I), (II); mais on est convenu, dans la pratique, de compter les azimuts et les longitudes, les azimuts surtout, du sud à l'ouest, et depuis 0^g jusqu'à 400^g. Soient alors Z l'azimut de M' sur l'horizon de M, et Z' l'azimut de M sur l'horizon de M', l'un et l'autre étant comptés à partir du sud; on aura, d'après la *fig.* 40,

$$V=200-Z,\quad V'=400-Z';$$

et les séries citées se changeront respectivement en ces trois autres,

$$(a)\quad H'=H-u\cos Z-\tfrac{1}{2}u^2\sin 1''\sin^2 Z\,\mathrm{tang}\,H,$$
$$(b)\quad P'=P+\frac{u\sin Z}{\cos H}-\tfrac{1}{2}u^2\sin 1''\sin 2Z.\frac{\mathrm{tang}\,H}{\cos H},$$
$$(c)\quad Z'=200^g+Z-u\sin Z\,\mathrm{tang}\,H+\tfrac{1}{4}u^2\sin 1''\sin 2Z(1+2\,\mathrm{tang}^2 H),$$

en supposant d'ailleurs l'arc u réduit en secondes (art. **91**).

Il ne serait pas difficile de prouver en outre que

$$Z' = 200^g + Z - u \sin Z \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(H + H') + \tfrac{1}{2} u^2 \sin 1'' \sin Z \cos Z \operatorname{tang}^2 H;$$

mais cette formule ne serait guère plus simple à évaluer que la précédente, à moins qu'on ne jugeât inutile de tenir compte du troisième terme, dans un calcul provisoire.

La première formule (a), bornée aux termes du second ordre, s'obtient encore plus simplement ainsi qu'il suit.

D'abord dans le triangle sphérique pMM' supposé obtusangle, on a cette relation

$$\sin H' = \sin H \cos u - \cos H \sin u \cos Z,$$

et comme la latitude H' ne diffère de H que d'une petite quantité, soit alors $H' = H + x$; on aura

$$\sin(H + x) = \sin H \cos u - \cos H \sin u \cos Z.$$

D'un autre côté, à cause de $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \ldots$, et de $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} \ldots$, il viendra, après les développements nécessaires,

$$x = -u \cos Z - \tfrac{1}{2} u^2 \operatorname{tang} H + \tfrac{1}{2} x^2 \operatorname{tang} H;$$

ainsi, par une première approximation, $x = -u \cos Z$. Mettant alors cette valeur dans le second membre, on aura plus exactement

$$x = -u \cos Z - \tfrac{1}{2} u^2 \sin^2 Z \operatorname{tang} H,$$

et enfin la valeur de $H' = H + x$ sera telle que l'indique la formule (a).

Toutefois cette latitude H' appliquée au point M' sur le sphéroïde terrestre, serait un peu fautive, car la véritable latitude de ce point est l'angle M'N'Q' que la normale M'N' sur l'ellipsoïde de révolution fait avec le plan de l'équateur dont la trace, sur le méridien PE, est la droite CE; tandis que la latitude déterminée par la formule (a) est représentée par l'angle que l'oblique M'N fait avec NQ; N'Q' et NQ étant supposés deux plans parallèles à CE. La correction de lati-

tude, que nous désignerons par ψ, est donc l'angle NM'N', puisque dans le triangle N'M'R l'angle extérieur $M'RQ' = H'$ vaut la somme des deux intérieurs opposés NM'N', M'N'Q', de sorte que

$$\sin\psi = \frac{NN' . \sin PN'M'}{N'M'}.$$

Mais avant de rechercher la valeur exacte de cet angle, nous ferons remarquer que quand la ligne géodésique K est au plus d'un demi-degré, son amplitude $H' - H = dH$ sur la sphère devient ΔH sur l'ellipsoïde, et que ces deux amplitudes d'arcs de même longueur étant entre elles réciproquement comme leurs rayons de courbure N, ρ (art. **170**), on a cette proportion

$$\Delta H : dH :: N : \rho :: 1 : \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 H},$$

d'où l'on tire à très-peu près

$$\Delta H = dH(1 + e^2 \cos^2 H), \quad \text{et par conséquent} \quad \psi = dH e^2 \cos^2 H;$$

donc enfin la latitude H' corrigée est

$$(a') \quad H' = H - (u \cos Z + \tfrac{1}{2} u^2 \sin 1'' \sin^2 Z \tang H)(1 + e^2 \cos^2 H),$$

et l'on a en secondes

$$u = \frac{K(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}{a \sin 1''} = \frac{K}{N \sin 1''}.$$

Les formules (*b*), (*c*) ne sont pas non plus celles dont on fait communément usage, parce que quand la latitude H' est connue sur le sphéroïde, on s'en sert pour déterminer P' et Z'; mais il faut, dans ce cas, introduire H' dans les valeurs de ces deux inconnues : or, c'est à quoi l'on parviendra tout d'abord; car d'une part, le triangle sphérique *p*MM' donnant

$$\sin(P' - P) = \frac{\sin u \sin Z}{\cos H'},$$

on a, à cause de la petitese de u,

$$(b') \quad P' = P + \frac{u \sin Z}{\cos H'};$$

d'autre part, dans le même triangle, l'on a, en vertu de l'art. **78**,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(M + M') = \cot \tfrac{1}{2}(P' - P) \frac{\cos \frac{1}{2}(H - H')}{\sin \frac{1}{2}(H + H')};$$

et puisque $\cot = \frac{1}{\operatorname{tang}}$, on peut écrire

$$\cot \tfrac{1}{2}(M + M') = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(P' - P) \frac{\sin \frac{1}{2}(H + H')}{\cos \frac{1}{2}(H - H')}$$
$$= \operatorname{tang}\left[1^{\text{q}} - \tfrac{1}{2}(M + M')\right];$$

mais $1^{\text{q}} - \frac{1}{2}(M + M')$ et $P' - P$ étant toujours des angles très-petits, on a simplement, à cause de $M + M' = Z' - Z$,

$$(c') \qquad Z' = 200^{\text{g}} + Z - (P' - P) \frac{\sin \frac{1}{2}(H + H')}{\cos \frac{1}{2}(H - H')}.$$

Il est évident que ces formules n'éprouveraient aucun changement dans les signes de leurs termes, si l'on voulait compter les azimuts et les longitudes du sud à l'est; et que si l'on s'en tenait seulement à la convention reçue pour les azimuts, il faudrait affecter du signe positif les longitudes occidentales, et du signe négatif les longitudes orientales.

194. Nous avons fait tout à l'heure, à la formule de latitude, la correction dépendante de l'excentricité des méridiens terrestres. Quant aux formules de longitude et d'azimut, désignées par (b') et (c'), elles s'emploient sans modification, parce que l'aberration de sphéricité n'a sur elles aucune influence sensible. On voit en effet, que l'angle M*p*M' des deux méridiens sphériques est le même que celui des deux méridiens elliptiques PM, PM'. Mais de combien l'azimut *p*M'M, sur la Terre sphérique, c'est-à-dire l'angle des deux plans *p*M'N, MM'N, diffère-t-il de l'azimut PM'M, sur la Terre elliptique, c'est-à-dire de l'angle dièdre PN'M'M? C'est ce qu'il faut chercher.

Si l'on considère le point M' (*fig*. 41) comme le centre d'une sphère, sa surface sera coupée par les trois plans MM'N, N'M'N, MM'N', suivant le triangle sphérique *a*N*m*: or, dans ce triangle, on connaît l'angle *a*N*m*: c'est l'azimut calculé. On connaît en outre l'arc N*m* ou l'angle

$N'M'N = \psi$, qui est la correction de latitude; et à cause de l'angle $MNM' = u$, on a, en considérant le triangle $MM'N$ comme isoscèle, arc $aN = 1^q - \frac{u}{2}$; donc si ξ désigne la correction d'azimut, et z_1 l'azimut vrai compté du nord, on aura $z_1 - \xi = aNm =$ azimut approché z' compté de même. Il résulte de là que dans le triangle sphérique aNm, on connaît deux côtés et l'angle compris, et qu'il s'agit de déterminer l'angle ou l'azimut vrai $m'am = z_1$. Or, $Nm = \psi$ étant très-petit, la solution de ce problème se trouve dans la formule (c) ci-dessus. On a donc, à cause de $mNa = z'$ compté du nord,

$$z_1 = z' + \psi \sin z' \operatorname{tang} \frac{u}{2} + \ldots;$$

d'ailleurs $\psi = e^2 \Delta H \cos^2 H = e^2 u \cos Z \cos^2 H$; il en résulte

$$z_1 = z' + e^2 u \sin z' \cos Z \cos^2 H \operatorname{tang} \frac{u}{2};$$

ou enfin, parce que u est un très-petit arc, et que Z et z' diffèrent peu l'un de l'autre,

$$z_1 = z' + \tfrac{1}{4} e^2 u \sin 2Z \cos^2 H \operatorname{tang} u.$$

La correction d'azimut, représentée par le terme

$$\tfrac{1}{4} e^2\, u \operatorname{tang} u \sin 2Z \cos^2 H,$$

et qui se trouve du troisième ordre, peut donc toujours se négliger.

DEUXIÈME SOLUTION.

195. Quoique les démonstrations des formules précédentes soient très-élémentaires, cependant ceux qui connaissent le Calcul différentiel préféreront sans doute la méthode suivante, à cause de son élégance et de sa généralité, et parce qu'elle conduit plus rapidement aux mêmes résultats.

Conservons d'abord la notation précédente, puis considérons PA (*fig.* 40 *bis*) comme le premier méridien, et AM″ comme un grand cercle

dont la partie AM $= s$ soit constante de direction, mais variable de grandeur, et dont l'autre partie MM′ $=$ K représente un côté de triangle. Cela posé, si l'on mène les autres méridiens PM, PM′ ayant respectivement H, H′ pour latitude, et P, P′ pour longitude; que de plus V, V′ soient les angles PMM′, PM′M″, ou les azimuts de K et de son prolongement, comptés du nord; on aura généralement

$$\text{H} = f(s),\quad \text{P} = f(s),\quad \text{V} = f(s);$$

la lettre f étant le signe d'une fonction indéterminée. En supposant donc que s reçoive un accroissement K, on aura, en vertu du théorème de Taylor,

$$\left.\begin{aligned} \text{H}' &= \text{H} + \frac{d\text{H}}{ds}\text{K} + \tfrac{1}{2}\frac{d^2\text{H}}{ds^2}\text{K}^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3\text{H}}{ds^3}\text{K}^3 + \ldots,\\ \text{P}' &= \text{P} + \frac{d\text{P}}{ds}\text{K} + \tfrac{1}{2}\frac{d^2\text{P}}{ds^2}\text{K} + \frac{1}{2.3}\frac{d^3\text{P}}{ds^3}\text{K}^3 + \ldots,\\ \text{V}' &= \text{V} + \frac{d\text{V}}{ds}\text{K} + \tfrac{1}{2}\frac{d^2\text{V}}{ds^2}\text{K} + \frac{1}{2.3}\frac{d^3\text{V}}{ds^3}\text{K}^3 + \ldots. \end{aligned}\right\}(\text{A})$$

Maintenant, pour déterminer les valeurs des coefficients différentiels, formons le triangle sphérique différentiel APR, dans lequel AR $= ds$, l'angle APR $= d$P et l'angle extérieur PRM′ $=$ V $+ d$V; ce triangle offrira évidemment ces relations:

$$\frac{\sin d\text{P}}{\sin ds} = \frac{\sin(\text{V}+d\text{V})}{\cos\text{H}},$$

$$\frac{\sin(\text{V}+d\text{V})}{\cos\text{H}} = \frac{\sin\text{V}}{\cos(\text{H}+d\text{H})},$$

$$\sin(\text{H}+d\text{H}) = \sin\text{H}\cos ds + \cos\text{H}\sin ds\cos\text{V},$$

puisque AP $= 100^\text{c} -$ H, RP $= 100^\text{c} - (\text{H} + d\text{H})$. Si l'on chasse les dénominateurs, qu'on développe, enfin qu'on réduise conformément à la doctrine des infiniment petits, on obtiendra sans peine

$$\frac{d\text{P}}{ds} = \frac{\sin\text{V}}{\cos\text{H}},\quad \frac{d\text{V}}{d\text{H}} = \text{tang V tang H},\quad \frac{d\text{H}}{ds} = \cos\text{V},$$

et par suite

$$\frac{dV}{ds} = \sin V \operatorname{tang} H.$$

Les trois coefficients différentiels de premier ordre étant connus, l'on passe sans difficulté à ceux des ordres supérieurs, en regardant seulement *ds* comme constant; et tout calcul fait on a, y compris les coefficients du premier ordre,

$$\left(\frac{dH'}{ds}\right) = \cos V, \quad \left(\frac{d^2 H'}{ds^2}\right) = -\sin^2 V \operatorname{tang} H,$$

$$\left(\frac{d^3 H'}{ds^3}\right) = -3\sin^2 V \cos V \left(\frac{1}{3} + \operatorname{tang}^2 H\right);$$

$$\left(\frac{dP'}{ds}\right) = \frac{\sin V}{\cos H}, \quad \left(\frac{d^2 P'}{ds^2}\right) = \frac{\sin 2V \operatorname{tang} H}{\cos H},$$

$$\left(\frac{d^3 P'}{ds^3}\right) = \frac{2\sin V \cos^2 V}{\cos H}(1 + 4\operatorname{tang}^2 H) - \frac{6\sin V}{\cos H}\left(\frac{1}{3} \operatorname{tang}^2 H\right);$$

$$\left(\frac{dV'}{ds}\right) = \sin V \operatorname{tang} H, \quad \left(\frac{d^2 V'}{ds^2}\right) = \frac{1}{2}\sin 2V(2\operatorname{tang}^2 H + 1)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^3 V'}{ds^3}\right) &= -6\sin^3 V \operatorname{tang} H\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^2 H\right) \\ &\quad + 6\sin V \cos^2 V \operatorname{tang} H\left(\tfrac{5}{6} + \operatorname{tang}^2 H\right) \\ &= 6\sin V \cos^2 V \operatorname{tang} H\left(1 + \tfrac{4}{3}\operatorname{tang}^2 H\right) \\ &\quad - 6\sin V \operatorname{tang} H\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^2 H\right).\end{aligned}$$

Si l'on s'arrête aux quantités du second ordre, et que l'on compte les longitudes et les azimuts du sud à l'ouest, ce qui exige que l'on fasse $V = 200 - Z$, et $V' = 400 - Z'$, on retombera précisément sur les séries (*a*), (*b*), (*c*), en supposant d'ailleurs K réduit en secondes et représenté par *u*.

Pour faire à la première de ces formules la correction due à l'ellipticité de la Terre, nous nous appuierons encore sur ce principe, savoir: que les arcs de même étendue sont en raison inverse de leurs rayons; mais au lieu de prendre le rayon de courbure du méridien elliptique à la latitude H de départ, nous considérerons, pour plus de précision,

celui qui répond à la latitude moyenne $\frac{1}{2}(H+H')$. Ainsi, en nommant R ce rayon, et appelant dH la différence de latitude sur la sphère, ΔH la différence de latitude des mêmes points sur l'ellipsoïde, on aura

$$\frac{N}{R}=\frac{\Delta H}{dH}, \quad \text{ou} \quad \Delta H=\frac{N}{R}dH;$$

c'est-à-dire qu'il faudra multiplier par $\frac{N}{R}$ la valeur approchée de $H'-H$ que donne sur la sphère la première série (A), pour avoir cette différence exactement sur l'ellipsoïde de révolution. On a donc en définitive, et en secondes de degré,

$$\left.\begin{aligned} H'-H=-\frac{K\cos Z}{N\sin 1''}\cdot\frac{N}{R}-\frac{1}{2}\frac{K^2\sin^2 Z}{N^2\sin 1''}\operatorname{tang} H.\frac{N}{R} \\ +\frac{1}{6}\frac{K^3}{N^3}\frac{\sin^2 Z\cos Z}{\sin 1''}(1+3\operatorname{tang}^2 H).\frac{N}{R}, \end{aligned}\right\}\ (A')$$

et il suffira de connaître approximativement H' comme dans la première solution (art. précédent), pour déterminer R.

Procédons maintenant au développement en série du rapport $\frac{N}{R}$. D'abord on a

$$N=\frac{a}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}=a(1+\tfrac{1}{2}e^2\sin^2 H+\tfrac{3}{8}e^4\sin^4 H\ldots),$$

et si l'on fait $\frac{1}{2}(H+H')=H+\frac{1}{2}dH=\zeta$, on aura

$$\frac{1}{R}=\frac{(1-e^2\sin^2\zeta)^{\frac{3}{2}}}{a(1-e^2)}=\frac{1}{a}(1+e^2+e^4-\tfrac{3}{2}e^2\sin^2\zeta-\tfrac{3}{2}e^4\sin^2\zeta+\tfrac{3}{8}e^4\sin^4\zeta).$$

Multipliant ces deux séries l'une par l'autre, changeant les sinus en cosinus, et faisant attention que $\sin^2\zeta=\sin^2 H-dH\sin H\cos H$, on aura, toutes réductions faites,

$$\frac{N}{R}=1+e^2\cos^2 H+e^4\cos^2 H-\tfrac{3}{2}e^2\,dH\sin H\cos H,$$

ou mettant pour dH sa valeur approchée $-\frac{K}{N}\cos Z$, on aura enfin

$$\frac{N}{R}=1+e^2\cos^2 H+e^4\cos^2 H+\tfrac{3}{2}e^2\frac{K}{N}\cos Z\sin H\cos H.$$

La correction à appliquer à la latitude H′ calculée sur la sphère, et que nous avons désignée par ψ (art. précédent), est donc

$$\psi = \left(e^2 \cos^2 \mathrm{H} + e^4 \cos^2 \mathrm{H} + \tfrac{3}{4} e^2 \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{N}} \cos \mathrm{Z} \sin 2\mathrm{H}\right) d\mathrm{H},$$

et elle sera donnée en secondes si dH est exprimé en mêmes unités.

Lorsque nous exposerons au chapitre I[er] du sixième livre les principes de la trigonométrie sphéroïdique, nous ferons voir comment on arrive à ces derniers résultats par la considération des propriétés de la ligne de plus courte distance, résultats qui dépassent sans doute les besoins ordinaires. Toutefois lorsque les triangles destinés à la mesure précise d'un arc de méridien sont de la grandeur de celui qui a été mesuré en Espagne (art. **154**), il importe de calculer les différences de latitude par la série (A′) précédente, prolongée jusqu'aux termes du troisième ordre inclusivement, et d'y appliquer la correction ψ que nous venons de trouver, comme on le verra par la suite.

196. La méthode précédente, par laquelle on détermine les positions géographiques des sommets des triangles, à l'aide des distances obliques, avait été proposée, dès 1787, par Legendre, dans un Mémoire sur les opérations géodésiques, imprimé parmi ceux de l'Académie des Sciences; et c'est celle que Delambre a principalement adoptée, à l'occasion de la nouvelle mesure d'un arc du méridien. Legendre, considérant en outre le cas où la ligne géodésique est perpendiculaire, a donné des formules qui dérivent des séries (A), en y supposant $\mathrm{V} = 100^g$, comptant les azimuts du nord, et faisant $\mathrm{V}' = 200^g - z'$.

La première hypothèse introduite dans les coefficients différentiels, donnant

$$\left(\frac{d\mathrm{H}'}{ds}\right) = 0, \qquad \left(\frac{d\mathrm{P}'}{ds}\right) = \frac{1}{\cos \mathrm{H}}, \qquad \left(\frac{d\mathrm{V}'}{ds}\right) = \operatorname{tang} \mathrm{H},$$

$$\left(\frac{d^2\mathrm{H}'}{ds^2}\right) = -\operatorname{tang} \mathrm{H}, \quad \left(\frac{d^2\mathrm{P}'}{ds^2}\right) = 0, \qquad \left(\frac{d^2\mathrm{V}'}{ds^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^3\mathrm{H}'}{ds^3}\right) = 0, \qquad \left(\frac{d^3\mathrm{P}'}{ds^3}\right) = -\frac{2 \operatorname{tang}^2 \mathrm{H}}{\cos \mathrm{H}}, \quad \left(\frac{d^3\mathrm{V}'}{ds^3}\right) = -\operatorname{tang} \mathrm{H}(2 \operatorname{tang}^2 \mathrm{H} + 1);$$

les séries dont il s'agit se réduisent aux suivantes :

$$H' = H - \tfrac{1}{2} K^2 . \text{tang}\, H,$$

$$P' = P + \frac{K}{\cos H} - \frac{1}{3} K^3 \frac{\text{tang}^2 H}{\cos H},$$

$$z' = 100^g - K\, \text{tang}\, H + \tfrac{1}{3} K^3\, \text{tang}\, H \left(\tfrac{1}{2} + \text{tang}^2 H'\right)$$

$$= 100^g - K\, \text{tang}\, H' - \tfrac{1}{3} K^3\, \text{tang}\, H' \left(1 + \tfrac{1}{2}\, \text{tang}^2 H'\right).$$

Mais H' n'étant que la latitude approchée du point M', il faut, d'après ce qui a été dit précédemment, avoir égard au terme dépendant de l'aplatissement de la Terre. Alors si, pour indiquer que la ligne géodésique K est perpendiculaire au méridien de M, on la désigne par y, et qu'on la divise par N pour la ramener à une sphère du rayon pris pour unité, on aura définitivement en secondes

$$(a'') \qquad H_1 = H - \frac{1}{2} \frac{y^2\, \text{tang}\, H}{N^2 \sin 1''} (1 + e^2 \cos^2 H);$$

réciproquement

$$(a_{''}) \qquad H = H_1 + \frac{1}{2} \frac{y^2\, \text{tang}\, H_1}{N^2 \sin 1''} (1 + e^2 \cos^2 H_1);$$

puis longitude

$$(b'') \qquad P' = P + \frac{y}{N \sin 1'' \cos H} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y^2}{N^2}\, \text{tang}^2 H\right),$$

ou bien

$$(b_{''}) \qquad P' = P + \frac{y}{N \sin 1'' \cos H_1};$$

azimut

$$(c'') \quad z' = 100^g - \frac{y}{N \sin 1''}\, \text{tang}\, H + \frac{1}{3} \frac{y^3}{N^3 \sin 1''}\, \text{tang}\, H \left(\frac{1}{2} + \text{tang}^2 H\right);$$

ou, si l'on connaît seulement H_1,

$$(c_{''}) \quad z' = 100^g - \frac{y}{N \sin 1''}\, \text{tang}\, H_1 - \frac{1}{3} \frac{y^3}{N^3 \sin 1''}\, \text{tang}\, H_1 \left(1 + \frac{1}{2}\, \text{tang}^2 H_1\right).$$

Enfin des formules (b'') et (c'') on tire sans difficulté cette relation

$$(d'') \quad (P' - P) \sin H = 100^g - z' + \frac{1}{6} \frac{y^3}{N^3 \sin 1''}\, \text{tang}^3 H,$$

laquelle est, comme on voit, presque indépendante de l'aplatissement terrestre.

Ces formules n'exigent que la recherche d'un très-petit nombre de logarithmes, et elles ont toutes des éléments communs qui en rendent le calcul très-rapide. Elles servent surtout lorsque les sommets des triangles sont connus par leurs distances à une méridienne et à sa perpendiculaire (art. **163**); et comme elles dépendent de la latitude H du pied de la perpendiculaire y, latitude qui le plus souvent n'est pas donnée immédiatement, il est nécessaire de résoudre d'abord cette question :

Connaissant la distance x du pied M de la perpendiculaire y au point principal du réseau trigonométrique dont la latitude connue est h, trouver la latitude de M.

Or, on a par l'art. **185**

$$\Delta H = H - h = \frac{x}{\rho \sin 1''} - \frac{3}{4}\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)\frac{\sin 2h}{\sin 1''}\frac{x^2}{\rho\rho'}, \qquad (1)$$

ρ et ρ' désignant les rayons de courbure du méridien et de l'arc perpendiculaire à l'origine de x; c'est-à-dire que

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 h)^{\frac{3}{2}}}, \quad \rho' = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 h)^{\frac{1}{2}}}.$$

x doit être pris positivement ou négativement, selon que cet arc se trouve au nord ou au sud du lieu principal. On peut presque toujours, dans la pratique, se contenter du terme $\frac{x}{\rho \sin 1''}$; d'ailleurs il est aisé de calculer le second terme, en faisant usage des valeurs numériques données dans l'art. **181**; et il y a cela de remarquable, que les coefficients de x et x^2 sont constants pour toute l'étendue de la carte.

Au surplus, les formules (a'), (b'), (c') étant générales, on pourra les appliquer encore dans cette circonstance, en regardant les coordonnées rectangulaires x, y comme deux lignes géodésiques consécutives K, K'· l'une x ou K ayant pour azimut $Z = 0$, ou $Z = 200^g$, selon que cette abscisse s'étendra vers le sud ou vers le nord; l'autre y ou K' ayant pour azimut $Z = 100^g$ ou $Z = 300^g$, selon que cette ordonnée sera à l'occident ou à l'orient du lieu principal du canevas trigonométrique.

Cependant si l'abscisse x était de plus d'un degré sexagésimal, il faudrait en déterminer l'amplitude par la série (II) de l'art. **185**, prolongée jusqu'aux termes du 3ᵉ ordre.

197. Si l'on désigne toujours par h la latitude du lieu central d'une carte, par H, H′ les latitudes respectives du pied et de l'extrémité de la perpendiculaire y, par P la différence de longitude de ces points, on aura ensuite

$$\mathrm{H} = h + \Delta h,\quad \operatorname{tang} \mathrm{P} = \frac{\operatorname{tang} u}{\cos},$$

amplitude en degrés,

$$u = \frac{180}{\pi}\frac{y}{\rho'} + \tfrac{1}{2} e^2 \frac{180}{\pi} \sin^2 \mathrm{H} . \frac{y^3}{\rho^3} \text{ (art. 188)};$$

et

$$\sin(\mathrm{H} - \mathrm{H}') = \sin \mathrm{H} \sin u \operatorname{tang} \frac{\mathrm{P}}{2} (1 + e^2 \cos^2 \mathrm{H} + \ldots),$$

ou

$$\sin(\mathrm{H} - \mathrm{H}') = \sin \mathrm{H}' \operatorname{tang} u \operatorname{tang} \frac{\mathrm{P}}{2} (1 + e^2 \cos^2 \mathrm{H}' + \ldots);$$

en vertu des art. **62** et **195**.

Ces dernières formules ne dépendant pas de la petitesse de u, doivent, pour cette raison, être substituées à celles de l'art. **196**, lorsque les points de la carte sont très-éloignés du méridien principal. Mais, comme les positions géographiques des sommets d'un réseau se calculent plus aisément et avec plus d'exactitude par la méthode des distances obliques (art. **195**), nous ne prolongerons pas plus loin nos remarques à ce sujet.

Applications numériques.

198. Dans le dessein d'abréger le calcul des formules précédentes, nous avons construit la table IV, pour l'aplatissement 0,00324, et pour le quart du méridien de 10 000 724 mètres; ce sont, en effet, les deux éléments fondamentaux qui furent adoptés en 1817, au Dépôt de la Guerre, pour les calculs de tous les points trigonométriques de la

nouvelle carte de France (art. **181**). Nous aurons recours à cette table pour résoudre la question suivante.

La latitude du Panthéon, à Paris, déduite de celle de l'Observatoire royal, est, selon les opérations de la carte de France, $K = 54^{\circ},2742,55$; sa longitude orientale, comptée du même Observatoire, est.... $P = -0^{\circ},0106,81$; le log. de la distance, en mètres, du Panthéon au clocher de la paroisse de Dammartin, est $\log K = 4,5249711$ (art. **150**); enfin l'azimut de cette distance sur l'horizon du Panthéon est $Z = 251^{\circ},4003$ compté du sud à l'ouest : on demande la latitude H' et la longitude P' de Dammartin, ainsi que l'azimut Z' du Panthéon sur l'horizon de cette ville. (*Voyez Pl. IX.*)

Calcul de la latitude (formule a').

En écrivant cette formule ainsi,

$$H' = H - AK\cos Z - BK^2 \sin^2 Z,$$

on a

$$A = \frac{1 + e^2 \cos^2 H}{N \sin 1''}, \quad B = \frac{1 + e^2 \cos^2 H}{N^2 \sin 1''} \cdot \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} H;$$

et en faisant

$$F = \frac{1}{N \sin 1''}, \quad T = \frac{1}{1 + e^2 \cos^2 H},$$

(N étant la normale au Panthéon), les logarithmes de ces quatre facteurs et de cette normale, qui ont pour argument la latitude H, seront donnés par la table IV; en sorte que les calculs de la position géographique de Dammartin se réduiront à ce qui suit.

$\log K = 4.5249711$	$\log K = 4.5249711$
$l.\cos Z = 9.8397186-$	$l.\sin Z = 9.8588310-$
$\log x = 4.3646897-$	$\log y = 4.3838021-$
(Tab. IV) $\log A = 8.9996822-$	$2\log y = 8.76760$
l. 1er terme $= 3.3643719+$	(Tab.) $\log B = 1.95167-$
1er terme $+ 2314'',05$	log 2e terme $= 0.71927-$
2e terme $- 5,24$	$H = 54^{\circ},2742,55$
$\Delta H + = 2308,81$	$+ 2308,81$
	latitude $H' = 54,5051,36$

Nota. Les $\log x$ et $\log y$ sont ceux des distances à la perpendiculaire et à la méridienne du Panthéon; ainsi la position de Dammartin est parfaitemen connue par ce premier calcul, puisqu'on a

$$x = -\ 23157'',4 \text{ nord},$$
$$y = -\ 24199\ ,3 \text{ est}.$$

Calcul de la longitude (formule b').

$$P' = P + F\frac{K \sin Z}{\cos H'}.$$

(Table IV) $\log F = 8.9984669$
(ci-dessus) $\log y = 4.3838021-$
c. $\log H' = 0.1835335$ $\qquad P = -\ 0^c,0106'',81$
$\log \Delta P = 3.5658025-,$ $\quad \Delta P = -\ 0\ ,3679\ ,61$
Longitude $P' = -\ 0\ ,3786\ ,42$ orientale.

Calcul de l'azimut (formule c').

$$Z' = 200^\circ + Z - \Delta P\frac{\sin\frac{1}{2}(H+H')}{\cos\frac{1}{2}(H-H')},$$

(ci-dessus) $\log \Delta P = 3.5658025+$
$\log \sin \frac{1}{2}(H+H') = 9.8774549$
c. $\log \cos \frac{1}{2}(H-H') = 0.0000007$ $\qquad 200 + Z = 51^\circ,4003,00$
$\log \Delta Z = 3.4432581+$ $\qquad \Delta Z = +\ 0\ ,2774,96$
azimut $Z' = 51\ ,6777,96$

Ces calculs donnent les corrections en secondes centésimales; si l'on voulait les avoir en secondes sexagésimales, il faudrait ajouter aux log. des facteurs A, B, F, le log. 9.5105450, et convertir en grades l'argument de cette table. Enfin le logarithme du rayon de courbure du méridien, à une latitude donnée, se trouvera par la même table, en faisant attention que $\log \rho = 3 \log N + 6.3879504$, d'après l'art. **185**.

Dans ce dernier calcul, la correction d'azimut ΔZ, qu'on nomme

aussi *convergence des méridiens*, est positive, parce qu'on a pris ΔP avec un signe contraire, ainsi que l'exige la formule; et l'on a rejeté de la somme, 400° qui font une circonférence entière.

C'est ainsi qu'en allant d'un sommet de triangle à un autre, on parvient à déterminer géodésiquement leurs positions géographiques, et à retomber sur des points déjà calculés; ce qui sert de vérification.

Par exemple, pour avoir la position géographique de Saint-Martin-du-Tertre, qui est aussi un des sommets du triangle résolu (art. **150**), partons encore du Panthéon où l'angle sphérique compris entre Saint-Martin et Dammartin est de $51^g,5279,2$; l'azimut de premier objet sera évidemment, d'après ce qui précède,

$$Z = 251^g,4003 - 51^g,5279,2 = 199^g,8723,8;$$

et l'on trouvera, en opérant comme ci-dessus,

$$\begin{array}{lll} H = 54^\circ,2742,55 & P = -0^\circ,0106,81, & 200+Z = 399^\circ,8723,8 \\ \Delta H = +\ \ 2924,78 & \Delta P = +\ \ \ \ 8,93 & \Delta Z = -\ \ \ \ 6,7 \\ \hline \text{lat. } H' = 54\ ,5667,33; & \text{long. } P' = -0,0097,88; & \text{azim. } Z' = 399,8717,1 \end{array}$$

Les deux premières valeurs sont la latitude et la longitude de Saint-Martin, et la troisième valeur est l'azimut du Panthéon sur l'horizon du même lieu.

Enfin partons de Dammartin pour retrouver la latitude et la longitude de Saint-Martin. D'abord, si à l'azimut du Panthéon, trouvé de $51^\circ,6777,96$, on ajoute l'angle sphérique compris entre ce monument et Saint-Martin, savoir $64^\circ,3127,4$, on aura $Z = 115^\circ,9905,36$; et à cause de $\log K = 4,3982171$, il viendra, en prenant dans la table IV les log. de A et de B correspondant à la latitude $54^\circ,5$,

$$\begin{array}{ll} H = 54^\circ,5051,4 & P = -0^\circ,3786,4 \\ \Delta H = +\ \ \ 615,9 & \Delta P = +\ 0\ ,3688,5 \\ \hline H' = 54\ ,5667,3 & P' = -\ 0\ ,0097,9 \end{array}$$

Ainsi ces deux résultats sont les mêmes que ci-dessus.

Dans tous les calculs de ce genre, ce sont les angles sphériques qui

concourent avec un azimut primitif à former les azimuts des objets observés d'un même lieu : or il arrive souvent que la somme des angles qui forment un tour d'horizon diffère de quelques secondes de quatre angles droits, et alors on conçoit que les azimuts Z de départ, introduits dans le calcul des coordonnées géodésiques, devraient à la rigueur être corrigés proportionnellement de l'erreur dont il s'agit. Mais, à vrai dire, cette correction est généralement trop minime pour qu'il soit nécessaire d'y avoir égard en géographie. *Voyez* d'ailleurs dans la *Nouvelle Description géométrique de la France*, tom. Ier, p. 65, la note que nous avons donnée à ce sujet.

199. Calculons maintenant la différence des latitudes des stations de Desierto et de Mongò (art. **154**), à l'aide des éléments suivants.

Latitude de Desierto.......	$H = 44^{\circ},5402,79 =$	$40^{\circ}\ 5'\,10'',5$
Azimut de Mongò, sur l'horizon de Desierto, compté du sud à l'ouest.........	$Z = 396,3644,70 =$	$356.43.40,9$
log. de la distance de ces deux stations...........	$\log K = 5.152\,9053.$	

Comme cette distance est considérable, on déterminera d'abord approximativement la latitude H′ de Mongò, au moyen de cette expression

$$H' = H - \frac{K \cos Z}{N \sin 1''} = H - FK \cos Z,$$

et l'on aura

$$\begin{array}{lll}
\text{(table IV)}\ \log F = 9.00032 - & & \\
\log K = 5.15291 & & \\
\text{l. } \cos Z = \underline{9.99929} & & H = 44^{\circ},54 \\
\log \delta H = 4.15252, & & \delta H = \underline{-\ 1,4240''} \\
& \text{latit. appr. } H' = & 43,12
\end{array}$$

De là, latitude moyenne $\frac{1}{2}(H + H') = 43^{\circ},83$.

Cette latitude et celle H de départ seront les nouveaux arguments de la table dont il s'agit, pour déterminer les logarithmes de R et de N,

qui sont aussi des éléments de la formule

$$(\text{A}')\quad H'-H=-\frac{K\cos Z}{R\sin 1''}-\tfrac{1}{2}\frac{K^2}{NR}\frac{\sin^2 Z}{\sin 1''}\tang H+\tfrac{1}{6}\frac{K^3\sin^2 Z\cos Z}{N^2 R\sin 1''}(1+3\tang^2 H)$$

démontrée (art. **195**). Cette opération préliminaire donnera

$$\log R = 6.8035002,\quad \log N = 6.8051987,$$

puisqu'en appelant N_m la normale correspondante à la latitude moyenne $\frac{1}{2}(H+H')$, on a (art. **185**)

$$\log R = 3\log N_m + 6.3879504\,;$$

après quoi le calcul de $H'-H$ s'effectuera ainsi qu'il suit.

1er terme.

$\log K$	$= 5.1529053$	$-$
$\text{l.}\cos Z$	$= 9.9992915$	$+$
$\text{c.}\log R$	$= 3.1964998$	
$\text{c.}\sin 1''$	$= 5.8038801$	
log 1er terme.	4.1525767	$-$

2e terme.

$2\log K$	$= 0.30581$	$-$
$\log\frac{1}{2}$	$= 9.69897$	
$\text{l.}\sin^2 Z$	$= 7.51290$	
$\text{l.}\tang H$	$= 9.92514$	
$\text{c.}\log N$	$= 3.19480$	
$\text{c.}\log R\sin 1''$	$= 9.00038$	
log 2^e terme.	9.63800	$-$

3^e terme.

log 1er terme	$= 4.15257$	$+$
$\log\frac{1}{6}$	$= 9.22185$	
$2\log K$	$= 0.30581$	
$2\ \text{c.}\log N$	$= 6.38960$	
$\text{l.}\sin^2 Z$	$= 7.51290$	
log 3e terme	7.58273	$+$

4e terme.

log 3e terme	$= 7.58273$	$+$
log. 3	$= 0.47712$	
2 log. tang H	$= 9.85028$	
log 4e terme	7.91013	$+$

1er terme	$-$	$1^\circ,4209'',433$
2e terme	$-$	$0\ ,434$
3e terme	$+$	$0\ ,004$
4e terme	$+$	$0\ ,008$
différence de latitude cherchée ΔH	$=$	$-\ 1\ ,4209\ ,855.$

Ainsi la latitude de Mongò $H'=H+\Delta H=43^\circ,1192'',94=38^\circ 48'26'',5.$

Notez bien que la formule précédente pouvant s'écrire ainsi qu'il suit:

$$(A'')\quad H'-H=-\frac{K\cos Z}{R\sin 1''}-\tfrac{1}{2}\frac{K^2}{NR}\frac{\sin^2 Z}{\sin 1''}\operatorname{tang} H\left(1-\tfrac{1}{3}\frac{\delta H}{\operatorname{tang} H}\sin 1''-\delta H\operatorname{tang} H\sin 1''\right),$$

en y désignant la différence de latitude approchée par δH exprimée en secondes, le calcul serait réduit à deux termes, à l'aide d'une petite table à double entrée qui donnerait le log. du facteur trinome

$$1-\tfrac{1}{3}\frac{\delta H}{\operatorname{tang} H}\sin 1''-\delta H\operatorname{tang} H\sin 1''=G.$$

Dans l'exemple actuel, les arguments de cette table seraient δH et H, et l'on aurait

	log. G =	9.98783	
log. 2[e] terme ci-dessus		9.63800 —	
log. 2[e] terme corrigé		9.62583 =	— 0",422
	1[er] terme		— 1°4209,433
	ΔH =		— 1,4209,855.

On verra bientôt un autre moyen d'effectuer ce calcul sans la petite table dont il s'agit. Au surplus il est presque toujours permis de faire G = 1.

Cette latitude H' serait plus forte de 1",85 centésimale en l'évaluant par le procédé ordinaire exposé à l'art. précédent, puisqu'il donne $\Delta H=-1^{\circ},4208=-1^{\circ}16'43'',49$; mais il n'est pas difficile de s'assurer qu'en multipliant ΔH par $T.\frac{N}{R}$, on ramènerait cette différence de latitude à sa vraie valeur, T étant un facteur donné par la table IV.

Quant à la différence de longitude des mêmes stations, elle se déduira également de la formule

$$(B')\qquad \Delta P=F\frac{K\sin Z}{\cos H'},$$

qui est encore assez exacte dans la circonstance actuelle (art **367**). En

voici le calcul :

$$
\begin{aligned}
\text{(Table IV)}\ \log F &= 8.9986814\ + \\
\log K &= 5.1529053 \\
\text{l. } \sin Z &= 8.7564521\ - \\
\text{c. } \log\cos H' &= 0.1083191 \\
\log \Delta P &= 3.0163579\ -
\end{aligned}
$$

Partant

$$\Delta P = - \quad 1038'',38$$

et comme longit. de Desierto, $P = +\ 2\ ,5639\ ,82$ ouest

longit. de Mongò, $P' = +\ 2^{\circ},4601\ ,44 = 2^{\circ}12'50'',87.$

L'azimut de Desierto, sur l'horizon de Mongò, s'obtiendra pareillement, avec une exactitude très-suffisante, par la formule employée à l'art. précédent; nous nous bornerons à dire qu'on le trouvera de $196^{\circ},4304'',5 = 176^{\circ}47'14'',66$.

Si dans la formule (A') tout était connu excepté K, l'on aurait par le retour des suites

$$K = -\frac{R}{\cos Z}(H'-H)\sin 1'' - \frac{1}{2}\frac{\sin^2 Z \operatorname{tang} H}{\cos^3 Z}\cdot\frac{R^2}{N}(H'-H)^2\sin^2 1''\ldots;$$

et en passant aux nombres, il viendrait, à cause de $H'-H$ négatif,

$$K = 142206^{m},1 - 4^{m},3 = 142201^{m},8.$$

C'est de cette manière que, dans la reconnaissance géographique d'un pays, l'on obtiendrait *approximativement* la longueur d'une longue base dirigée à fort peu près dans le sens du méridien, s'il y avait impossibilité de la mesurer directement, et si l'on avait observé avec soin les latitudes de ses extrémités ainsi que son azimut. Mais il est évident qu'une incertitude d'une seconde sexagésimale dans l'amplitude $H'-H$ ferait que la base cherchée ne serait connue qu'à une trentaine de mètres près.

N. B. La formule (A') donne en toute rigueur la différence des latitudes des extrémités de l'un des plus grands côtés de triangles qui aient été mesurés; mais quoiqu'elle ne soit pas très-longue à calculer,

nous avons cherché à la modifier de manière à la réduire à ses deux premiers termes sans en altérer sensiblement l'exactitude, et nous avons remarqué qu'il suffisait pour cela de faire

$$(\alpha) \qquad H' - H = -\frac{K \cos Z}{R \sin 1''} - \frac{1}{2}\frac{K^2 \sin^2 Z}{NR \sin 1''} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(H + H').$$

En effet, si l'on développe $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(H+H') = \operatorname{tang}(H + \frac{1}{2} dH)$, dH étant la différence approchée des latitudes, et si l'on observe que $dH = -\frac{K}{N} \cos Z$, à très-peu près, il viendra, en arrêtant le développement aux termes du troisième ordre,

$$-\frac{1}{2}\frac{K^2}{NR} \sin^2 Z \operatorname{tang} H + \frac{K^3}{N^2 R} \sin^2 Z \cos Z \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \operatorname{tang}^2 H\right),$$

tandis qu'on devrait avoir

$$-\frac{1}{2}\frac{K^2}{NR} \sin^2 Z \operatorname{tang} H + \frac{K^3}{N^2 R} \sin^2 Z \cos Z \left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang}^2 H\right).$$

Mais il est aisé de voir qu'à la latitude de 45 degrés le facteur binome du dernier terme serait $\frac{1}{2}$ d'une part et $\frac{2}{3}$ de l'autre, et qu'en définitive il y a presque compensation. C'est d'ailleurs ce qu'un exemple numérique va mettre hors de doute.

D'après les données ci-dessus, la nouvelle formule (α) donne

$$-\frac{1}{2}\frac{K^2 \sin^2 Z}{NR \sin 1''} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(H + H') = -0'',423,$$

et puisque le premier terme est le même que précédemment, l'on a

$$H' - H = -1^{\circ},4209'',433 - 0'',423 = -1^{\circ},4209,856.$$

On pourra donc, à l'avenir, substituer cette formule à la première (A'), et être sûr qu'elle procurera, à très-peu de chose près, les mêmes résultats, puisque, dans l'exemple actuel, la différence est à peine dans les millièmes de seconde centésimale.

La plus courte distance de deux points donnés sur le sphéroïde terrestre, par leurs latitudes et leurs longitudes géodésiques, est susceptible d'être déterminée exactement par les formules précédentes, lors-

qu'elle est très-petite à l'égard du rayon de la Terre, ou, comme on dit, lorsqu'elle est de l'ordre de l'aplatissement. En effet, si, dans les deux formules (A'), (B') employées ci-dessus, on pose

$$x = \mathrm{K}\cos \mathrm{Z}, \quad \text{et} \quad y = \mathrm{K}\sin \mathrm{Z},$$

et qu'on néglige, dans la première, le troisième terme qui est à peu près insensible pour les plus grands triangles dont on peut observer les angles, on aura évidemment à résoudre ces deux équations

$$\Delta \mathrm{H} = -\frac{x}{\mathrm{R}\sin 1''} - \frac{1}{2}\frac{y^2}{\mathrm{NR}\sin 1''}\operatorname{tang}\mathrm{H}, \qquad \Delta \mathrm{P} = \frac{y}{\mathrm{N}\cos \mathrm{H}'\sin 1''},$$

lesquelles donnent sur le champ

$$y = \mathrm{N}.\Delta \mathrm{P}\cos \mathrm{H}'\sin 1'', \quad x = -\,\mathrm{R}.\Delta \mathrm{H}\sin 1'' - \frac{1}{2}\frac{y^2}{\mathrm{N}}\operatorname{tang}\mathrm{H};$$

de là

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\mathrm{Z}, \quad \text{et enfin} \quad \mathrm{K} = \frac{x}{\cos \mathrm{Z}} = \frac{y}{\sin \mathrm{Z}}.$$

Telle est la solution fort simple qui résout le problème que nous considérons en ce moment, et dont nous prendrons ci-dessus les données.

TYPE DU CALCUL.

Valeur de y.

$\log \mathrm{N}$	$=$	6.8051987
$\log \Delta\mathrm{P}$	$=$	3.0163579
$\log\cos \mathrm{H}'$	$=$	9.8916809
$\log\sin 1''$	$=$	4.1961199
$\log y$	$=$	3.9093574

Valeur de Z.

$\log y$	$=$	3.9093574	$-$
c. $\log x$	$=$	4.8478034	$+$
l. tang Z	$=$	8.7571608	$-$

Valeur de x.

$\log \mathrm{R}$	$=$ 6.8035001	$-$	
$\log \Delta\mathrm{H}$	$=$ 4.1525895	$-$	
$\log\sin 1''$	$=$ 4.1961199		
l. 1[er] terme	5.1522095		$+141974^{\mathrm{m}},3$
$\log\frac{1}{2}$	$=$ 9.69897	$-$	
$2\log y$	$=$ 7.81871	$+$	
c. $\log \mathrm{N}$	$=$ 3.19480		
$\log\operatorname{tang}\mathrm{H}$	$=$ 9.92514		
l. 2[e] terme	0.63762		$-\ldots-4^{\mathrm{m}},3$
			$x = 141970,0$

$\mathrm{Z} = -\,3^{\mathrm{G}},6355'';4$ ou $396^{\mathrm{G}},3644'',6$; c'est-à-dire l'azimut de Mongò sur l'horizon de Desierto.

Enfin l'on a $\log y = 3.9093574 -$

$$\text{c.}\log\sin Z = 1.2435473 -$$

$$\log K = 5.1529047 +$$

et distance cherchée, $K = 142201^{m},7;$

résultat seulement de $0^{m},2$ plus petit que le précédent.

Les opérations par lesquelles les ingénieurs-géographes ont lié à la triangulation de la France deux sommets de montagnes de l'île de Corse (art. **154**), m'ont fourni l'occasion d'appliquer utilement cette solution. (Voyez *Nouvelle description géométrique de la France*, t. I, p. 75 et suiv.) On pourrait au surplus restituer, pour plus de rigueur, dans la valeur de ΔH précédente, le troisième terme

$$+\tfrac{1}{6}xy^2.\frac{(1+3\tang^3 H)}{N^2 R \sin 1''},$$

que j'ai omis à cause de son extrême petitesse; ou mieux encore, pour abréger les calculs, employer la formule (α) de l'art. **199**.

Je terminerai ce sujet par le tableau suivant, contenant le résumé du calcul des positions géographiques de quelques points de la triangulation des environs de Paris, dont il a été parlé (art. **150**) et que représente en partie la *fig.* 1 (*Pl. IX*). Cette triangulation se rattache à la méridienne de Delambre par le côté *Panthéon Saint-Martin-du-Tertre*, et au parallèle de Brest à Strasbourg par le côté *Panthéon Belle-Assise*. Les jeunes lecteurs pourront s'exercer à vérifier les nombres correspondants au point qu'ils regarderont comme inconnu.

NOMS DES STATIONS.	AZIMUTS.	LATITUDES.	LONGITUDES.	DISTANCES.
Panthéon..................	199G8728"3	54G2742"55	— 0G0106"81	29269M31
Saint-Martin-du-Tertre.....	399.8721,6	54.5667,29	— 0.0097,91	
Panthéon..................	305.3315,0	54.2742,55	— 0.0106,81	30710,53
Belle-Assise..............	105.6801,9	54.2477,46	— 0.4738,60	
Panthéon..................	65.7517,4	54.2742,55	— 0.0106,81	13320,44
Vélizy....................	265.6215,4	54.2059,34	+ 0.1623,18	
Saint-Martin-du-Tertre.....	61.6153,6	54.5667,29	— 0.0097,91	38127,31
Les Alluets...............	261.2559,3	54.3498,02	+ 0.4663,73	

Dans ce tableau la position de Dammartin n'est pas comprise, parce qu'elle a été déterminée précédemment. Si l'on veut trouver pareillement celle de la flèche de Saint-Denis, on partira de son azimut sur l'horizon du Panthéon, qui est de 206°,0793", et de la distance de ces deux points qui est de 9998^{m},7.

MOYEN DE RAMENER A UNE CERTAINE HYPOTHÈSE D'APLATISSEMENT DES RÉSULTATS GÉODÉSIQUES OBTENUS DANS UNE AUTRE HYPOTHÈSE.

200. Si, après avoir déterminé les coordonnées géographiques des points pris pour fondements d'une grande carte, on reconnaissait que l'aplatissement de la Terre choisi à cet effet fût trop différent de celui qui convient à la région levée géométriquement, la question à résoudre pour corriger les résultats obtenus serait celle-ci :

Étant données les latitudes et longitudes des points d'un réseau de triangles, calculées sur un ellipsoïde dont l'aplatissement est α, trouver, par la voie la plus prompte, ce que deviennent ces éléments géographiques lorsque l'aplatissement est $\alpha' = \alpha + d\alpha$.

Solution. Soient comme précédemment H, H′ les latitudes, et P, P′ les longitudes de deux points quelconques d'un ellipsoïde de révolution dont α est l'aplatissement, Q le quart du méridien et a le rayon de l'équateur. Appelons en outre A la différence des parallèles de ces points, B celle de leurs méridiens, mesurée sur un arc de parallèle passant par le point H′; on aura, art. **190**, les deux relations

$$A = \frac{Q}{90^\circ}(H' - H) - 3\alpha\frac{Q}{\pi}\sin(H' - H)\cos(H' + H),$$

$$P' - P = \frac{180^\circ\ B}{\pi a \cos H'}(1 - \alpha \sin^2 H'),$$

dans lesquelles π désigne le rapport de la circonférence au diamètre, et les amplitudes sont exprimées en degrés sexagésimaux. Si l'on suppose que la latitude H et la longitude P sont les deux données fondamentales qui, avec l'azimut de départ, ont servi à calculer H′ et P′, ces dernières quantités varieront avec α, et il en sera de même de Q et de a; ainsi, en différenciant et négligeant les quantités du second ordre, telles que

$\alpha d\alpha$, etc., on aura

$$(1)\qquad dH' = \frac{3}{2}\,\frac{d\alpha}{\sin 1''}\sin(H' - H)\cos(H' + H) - \frac{dQ}{Q}(H' - H),$$

$$(2)\qquad dP' = -\,d\alpha(\sin^2 H' + \tfrac{1}{2})(P' - P) - \frac{dQ}{Q}(P' - P),$$

à cause de

$$a = \frac{2Q}{\pi}(1 + \tfrac{1}{2}\alpha), \qquad \text{et de} \qquad \frac{da}{a} = \tfrac{1}{2}\,d\alpha + \frac{dQ}{Q}.$$

Telles sont les deux formules de correction à employer lorsqu'on veut rendre rigoureusement comparables des positions géodésiques qui n'ont pas toutes été assujetties à la même hypothèse d'aplatissement : elles ont le précieux avantage d'être non-seulement indépendantes de A et de B, puisque ces quantités doivent être supposées invariables, mais encore de la petitesse des amplitudes $H' - H$ et $P' - P$. Par exemple lorsque deux triangulations sont rattachées l'une à l'autre, et que tous les points de chacune ont été ramenés au même aplatissement α, on ajoute une constante aux latitudes et aux longitudes des points qui avaient été déterminés en supposant l'aplatissement α' ; et il est évident que cette constante est exprimée par la différence qui existe entre les coordonnées géographiques des points communs aux deux triangulations.

L'effet d'un changement d'aplatissement de la Terre, sur un azimut conclu, s'évalue aussi avec facilité, car la formule (c''), art. **196**, dans laquelle nous changerons H en h_0, pouvant visiblement s'écrire ainsi :

$$z' = 90^\circ - (P' - P)\sin h_0 + \ldots,$$

sa différentielle, en regardant P et h_0 comme constants, est

$$dz' = -\,dP'\sin h_0,$$

et puisque h_0 est nécessairement la latitude du pied de la perpendiculaire abaissée du point H' sur le méridien de H, on a cette relation (art. **56**)

$$\cot h_0 = \cot H'\cos(P' - P)$$

pour déterminer cette latitude. Il suit de là et de ce que $z' = Z' - 180°$, que la différentielle dz' se change définitivement en celle-ci :

$$(3) \qquad dZ' = \left[d\alpha(\sin^2 H' + \tfrac{1}{2})(P' - P) + \frac{dQ}{Q}(P' - P)\right] \sin h_0;$$

l'azimut Z' étant, bien entendu, compté du sud à l'ouest.

Il faut faire attention que, dans ces formules, la différence de longitude $P' - P$ est positive ou négative, selon que le point P' est à l'occident ou à l'orient du point P; ainsi l'on pourra, dans la formule (2), prendre toujours $P' - P$ positivement et ajouter algébriquement à cette différence de longitude sa correction dP'; mais dans la formule (3) il faudra prendre $P' - P$ négativement, si le point P' que l'on considère est à l'est de la méridienne de P : cela est important pour ne pas faire une fausse application numérique de ces formules. Le deuxième volume de la *Description géométrique de la France* offre, aux pages 628 et suivantes, plusieurs exemples de leur utilité; en voici un : Quel serait l'aplatissement que devrait avoir l'ellipsoïde terrestre pour que les observations de latitude et d'azimut faites à la tour Saint-Aubin d'Angers, s'accordassent avec la latitude et l'azimut géodésiques calculés dans l'hypothèse de 0,00324 d'ellipticité, et en partant de pareilles données recueillies à l'Observatoire de Paris? sachant qu'à Angers l'on a eu

	Latitude.	Azimut de La Salle.
Géodésiquement. . . .	$H' = 47°28'10'',67$	$Z' = 10°33'48'',56$
Astronomiquement. . .	$47.28.\ 6,79$	$10.33.31,85$
	$dH' = -\ 3,88$	$dZ' = -\ 16,71$

Longitude géodésique $P' = +\ 2°53'21'',57$;

et que de plus à Paris la latitude de l'Observatoire $H = 48°50'13''$.

Cela posé, les formules différentielles (1), (3), dans lesquelles nous ferons $\frac{dQ}{Q} = dq$, et $P = 0$, seront numériquement

$$-\ 3'',88 = 811'',02\ d\alpha + 4922'',53\ dq,$$
$$-\ 16,71 = 7999,7\ d\alpha + 7669,7\ dq,$$

et donneront

$$dq = -\ 0,0052734; \quad d\alpha = -\ 0,0015834;$$

mais par supposition, $\alpha = 0{,}00324$;

donc $\alpha' = \alpha + d\alpha = 0{,}0016566 = \frac{1}{603{,}6}$;

donc la correction du quart du méridien est

$$dQ = Q \times dq = -52734^{m},$$

en supposant Q de dix millions de mètres. C'est-à-dire que pour que l'accord demandé eût lieu, il faudrait que Paris et Angers fussent situés sur un ellipsoïde très-peu différent d'une sphère d'un rayon moindre que celui de la Terre. Mais cette conséquence, pour être juste, implique, sinon la parfaite exactitude des mesures géodésiques et astronomiques, mises en comparaison, du moins l'extrême petitesse des erreurs dont elles peuvent être affectées, et c'est ce qui est en effet indubitable. Sans entrer quant à présent dans plus de détails, voilà de quelle manière j'ai été amené à conclure que si les eaux de la mer recouvraient tranquillement le sol de la France, leur surface n'y serait pas celle d'un solide de révolution.

CHAPITRE XVI.

DÉTERMINATION D'UN ARC DE MÉRIDIEN ET D'UN ARC DE PARALLÈLE PAR DIVERS PROCÉDÉS ANALYTIQUES.

201. Lorsque l'amplitude géodésique d'un arc de méridien est connue avec une grande exactitude, et qu'elle est au plus d'un degré et demi, il suffit, pour en avoir immédiatement la longueur, de la multiplier par le rayon de courbure correspondant à son milieu, et calculé dans la même hypothèse d'aplatissement adoptée pour la détermination des différences de latitude des sommets des triangles. Par exemple, selon les calculs faits au Dépôt de la guerre, par M. Largeteau, la différence des latitudes de Dunkerque et de Greenwich est $\varphi = 0^G,4914'',62$; et à la latitude moyenne $\psi = 56^G,45$, le logarithme du rayon R de courbure, déduit de la table IV, est

$$\log R = 6.8043328$$

on a de plus

$$\log \varphi = 3.6914900$$
$$\log \sin 1'' = 4.1961199$$
$$\log \text{const.}\ \underline{9.7101800}$$

de là, $\log$ distance mérid. $= 4.4021227$ en toises;

et enfin, arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et de Greenwich, $A = 25241^T,93$. C'est aussi ce que Delambre a trouvé par un tout autre procédé que nous expliquerons bientôt.

La méthode géométrique expliquée à l'art. **159**, pour déterminer la longueur d'un arc de méridien et d'une perpendiculaire, dépend de celle sur laquelle est fondée la résolution des triangles sphériques peu courbes, et de la connaissance de l'angle azimutal du premier côté du

réseau. Quoiqu'elle soit fort simple, on ne saurait cependant l'appliquer avec succès qu'en choisissant parmi les triangles du canevas construit à une échelle assez grande, ceux qui jouissent des conditions requises.

Lorsque, dans les calculs de cette espèce, on emploie uniquement les angles sphériques, ainsi que l'a fait Delambre dans la détermination de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et de Barcelonne, on se trouve obligé de passer des logarithmes de sin K et sin K′ à celui de sin (K — K′). Par exemple, la résolution du triangle sphérique ACM (*fig.* 34) donnant log sin CM, on a besoin de connaître log sin BM = log sin (BC — CM), pour pouvoir résoudre le second triangle sphérique BMM′. Voici comment Delambre lève cette petite difficulté.

A cause de

$$\begin{aligned}\sin K - \sin K' &= 2\sin\tfrac{1}{2}(K - K')\cos\tfrac{1}{2}(K + K')\\ &= \frac{\sin(K-K')\cos\frac{1}{2}(K+K')}{\cos\frac{1}{2}(K-K')},\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\sin(K - K') &= \frac{(\sin K - \sin K')\cos\frac{1}{2}(K-K')}{\cos\frac{1}{2}(K+K')}\\ &= \sin K\left(1-\frac{\sin K'}{\sin K}\right)\frac{\cos\frac{1}{2}(K-K')}{\cos\frac{1}{2}(K+K')};\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}\log\sin(K-K') = \log\sin K + \log\left(1-\frac{\sin K'}{\sin K}\right)&\\ + \log\left[1 - 2\sin^2\tfrac{1}{4}(K-K')\right]&\\ - \log\left[1 - 2\sin^2\tfrac{1}{4}(K+K')\right]&.\end{aligned}$$

D'ailleurs la petitesse de K et de K′ permettant de faire

$$\begin{aligned}&\log\left[1 - 2\sin^2\tfrac{1}{4}(K-K')\right] - \log\left[1 - 2\sin^2\tfrac{1}{4}(K+K')\right]\\ &= 2M\left[\sin^2\tfrac{1}{4}(K+K') - \sin^2\tfrac{1}{4}(K-K')\right] = 2\mu\sin\tfrac{1}{2}K\sin\tfrac{1}{2}K'\\ &= \tfrac{1}{2}\mu\sin K\sin K',\end{aligned}$$

on a, en faisant attention que sin K et sin K′ sont donnés en mètres,

$$\log\sin(K-K') = \log\sin K + \log\left(1-\frac{\sin K'}{\sin K}\right) + \frac{\mu}{2\rho^2}\sin K\sin K';$$

ρ étant le rayon de la Terre, et μ le module 0,43429... Pareillement

$$\log \sin(K+K') = \log \sin K + \log\left(1+\frac{\sin K'}{\sin K}\right) - \frac{\mu}{2\rho^2}\sin K \sin K'.$$

Mais on est dispensé de l'usage de ces formules et d'une figure, par le procédé analytique suivant.

Supposons premièrement qu'il faille calculer la longueur de la méridienne AX (*fig.* 34) comprise entre les parallèles des points extrêmes A, L. On commencera par déterminer, à l'aide des formules (a'), (b'), (c'), les positions géographiques des points B, D, F, H, K, L, situés sur la ligne polygonale qui s'étend le long de la méridienne. Ensuite on calculera la *différence* des parallèles des deux premiers points A, B, c'est-à-dire l'arc de méridien qui les sépare; puis des points B, D; puis des points D, F, etc., jusqu'à ce qu'on soit enfin arrivé à l'extrémité L de la chaîne. La somme de toutes ces différences sera la longueur cherchée, comme cela est évident.

La formule qui donne en unités métriques la différence des parallèles de deux points tels que A, B extrémités du premier côté K du réseau, est précisément la première (A) de l'art. **195**, dans laquelle K est exprimé en mètres. Mais, dans cette circonstance, il est indispensable de conserver les termes du troisième ordre; ainsi, en rétablissant l'homogénéité et faisant $H'-H=dM$, on a cette formule de rectification employée par Delambre,

$$dM = -K\cos Z - \tfrac{1}{2}\frac{K^2}{N}\sin^2 Z \tang H + \tfrac{1}{6}\frac{K^3}{N^2}\sin^2 Z\cos Z(1+3\tang^2 H);\ \text{(A)}$$

N désignant la normale au point A de l'ellipsoïde de révolution. On voit donc que la distance entre les parallèles du pied et du sommet d'une perpendiculaire y à la méridienne est simplement $dM = \tfrac{1}{2}\frac{y^2}{N}\tang H'$, en désignant par H' la latitude du sommet dont il s'agit.

Si, au lieu de recourir à ce résultat déjà obtenu, l'on voulait y parvenir aussi directement que possible par la voie du calcul différentiel, on ferait, comme à l'art. cité, $dM = f(K)$, f étant le signe d'une fonction quelconque; et par le théorème de Maclaurin, on aurait généra-

lement

$$dM = \left(\frac{dH'}{dK}\right)K + \left(\frac{d^2H'}{dK^2}\right)\frac{K^2}{2} + \left(\frac{d^3H'}{dK^3}\right)\frac{K^3}{2.3} + \ldots,$$

les coefficients différentiels répondant à $K = 0$. Or, d'après la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique,

$$\sin H' = \sin H \cos K - \cos H \sin K \cos Z,$$

le rayon représentant l'unité, et l'azimut Z, toujours compté du sud à l'ouest, étant censé aigu; et par des différentiations successives prises en regardant K et H' comme les seules variables, il vient, après avoir fait $K = 0$,

$$\left(\frac{dH'}{dK}\right) = -\cos Z, \quad \left(\frac{d^2H'}{dK^2}\right) = -\sin^2 Z \tang H,$$
$$\left(\frac{d^3H'}{dK^3}\right) = 3\sin^2 Z \cos Z\left(\tfrac{1}{3} + \tang^2 H\right);$$

valeurs qui, étant substituées dans la série précédente, reproduisent la formule (A).

La valeur numérique de la normale N ne peut se calculer qu'approximativement pour chaque point de départ; il en est de même des valeurs des séries (a'), (b'), (c'), puisque quand il s'agit d'évaluer un arc du méridien, l'on est censé ne connaître l'aplatissement de la Terre qu'imparfaitement. Mais l'incertitude qui existe à cet égard n'est ici d'aucune conséquence.

Remarquons d'ailleurs que, dans le calcul de la différence des parallèles, chaque arc partiel, tel que dM, peut être considéré, vu sa petitesse, comme celui d'un cercle dont le rayon est égal à la normale correspondante; mais la véritable amplitude de cette petite ligne géodésique est sur le sphéroïde l'angle des deux normales de ses extrémités, et non celui des deux rayons extrêmes de l'arc de cercle dont il s'agit.

En calculant de la même manière la distance comprise entre les parallèles des points extrêmes A, L, à l'aide de la ligne polygonale ACEGIL, qui ne s'écarte pas encore trop de celle qu'on veut déterminer, on aura une vérification du premier résultat: il convien-

dra de prendre le milieu entre les deux, s'ils diffèrent un peu l'un de l'autre.

Afin de donner une application de la formule précédente, nous allons évaluer la différence des parallèles du Panthéon et de Dammartin. Les éléments de cette formule sont, d'après l'art. **198**,

$$\log K = 4{,}5249711, \quad Z = 251^g{,}4003, \quad H = 54^g{,}274255\,;$$

et la table IV donne, avec l'argument H, $\log N = 6{,}8054132$, puisque l'aplatissement des méridiens, en France, a été supposé de $\frac{1}{309}$ (art. **181**).

TYPE DU CALCUL.

1[er] terme.

$$\begin{aligned} \log K &= 4{,}5249711 \; - \\ \text{l.}\cos Z &= 9{,}8397191 \; - \\ \text{l. 1}^{\text{er}}\text{ terme} &= 4{,}3646902 \; + \end{aligned}$$

2[e] terme.

$$\begin{aligned} \log \tfrac{1}{2} &= 9{,}69897 \; - \\ 2\log K &= 9{,}04994 \\ 2\log \sin Z &= 9{,}71766 \\ \log \text{tang}\, H &= 0{,}05849 \\ \text{c.}\log N &= 3{,}19459 \\ \log 2^{\text{e}}\text{ terme} &= 1{,}71965 \; -. \end{aligned}$$

3[e] et 4[e] terme.

$$\begin{aligned} \text{l.}\tfrac{1}{6} &= 9{,}22185 \; + \\ 3\log K &= 3{,}57491 \\ 2\text{l.}\sin Z &= 9{,}71766 \\ \text{l.}\cos Z &= 9{,}83972 \; - \\ 2\text{c.}\log N &= 6{,}38917 \\ \text{l. 3}^{\text{e}}\text{ terme} &= 8{,}74331 \\ \log 3 &= 0{,}47712 \\ 2\log \text{tang}\, H &= 0{,}11698 \; - \\ \text{l. 4}^{\text{e}}\text{ terme} &= 9{,}33741 \; - \end{aligned}$$

Récapitulation.

$$\begin{aligned} &1^{\text{er}}\text{ terme} = + \; 23157^{\text{m}}{,}42 \\ &\left.\begin{aligned} 2^{\text{e}}\text{ terme} &- 52^{\text{m}}{,}438 \\ 3^{\text{e}} \ldots\ldots &- \;\; 0\;{,}055 \\ 4^{\text{e}} \ldots\ldots &- \;\; 0\;{,}217 \end{aligned}\right\} = - \;\; 52\;{,}17 \\ &\text{diff. des parall. } dM = \;\; 23105\;{,}25 \end{aligned}$$

On calcule directement la correction à faire aux distances obliques, pour les réduire à l'arc du méridien compris entre les parallèles de leurs extrémités, en employant la formule suivante :

$$\begin{aligned} K - dM = 2K\cos^2 \tfrac{1}{2}Z + \tfrac{1}{2}\frac{K^2}{N}\sin^2 Z\,\text{tang}\, H \\ - \tfrac{1}{6}\frac{K^3}{N^2}\sin^2 Z\cos Z(1 + 3\text{tang}^2 H) \qquad (A') \end{aligned}$$

qui n'est autre que (A), en y écrivant $2\cos^2 \frac{1}{2} Z - 1$ au lieu de $\cos Z$; et pour lors toutes les fois que $\cos \frac{1}{2} Z$ sera très petit, tout le calcul pourra s'effectuer avec les logarithmes à cinq décimales.

Nous pouvons évidemment appliquer ici la simplification que présente la formule (α) de l'art **199**; c'est-à-dire remplacer la précédente (A') par celle-ci :

$$(\alpha') \qquad dM = -K \cos Z - \tfrac{1}{2} \frac{K^2}{N} \sin^2 Z \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(H + H'),$$

dans laquelle N est la normale à la latitude moyenne $\frac{1}{2}(H + H')$, latitude géodésique qu'il suffit de connaître approximativement.

Pour exemple, et pour le cas le plus défavorable, cherchons la distance méridienne comprise entre les parallèles de *Campvey* et du *Desierto de las Palmas*, deux des stations de MM. Biot et Arago, situées sur les côtes de Catalogne; et prenons pour données celles consignées dans la *Nouvelle description géométrique de la France*, à savoir :

Latitude approchée de Campvey.. . $H = 43^g,4$
Latitude *idem* de Desierto. . . . . . $H' = 44,5$, $\frac{1}{2}(H + H') = 44^g$.

$$\log K = 5.2065667 \text{ en mètres;}$$

azimut de Desierto sur l'horizon de Campvey

$$Z = 150^g,5306,4.$$

On a de plus, à la latitude 44^g, $\log N = 6.8051869$ en mètres.

Cela posé, par la formule (A) il vient en toises

$$dM = 58860^t,2 - 415^t,0 + 3^t,06 - 6^t,05 = 58436^t,1,$$

et la formule (α') étant également évaluée par les logarithmes, on

trouve

	1er terme.		2e terme.
$\log K =$	$5.2065667\ -$	$\log \frac{1}{2} =$	9.69897
$\cos Z =$	$9.8530750\ -$	$2 \log K =$	0.41313
log const. . .	9.7101800	$2 \sin Z =$	9.69166
log 1er terme	$4.7698217\ +$	$\text{tang} \frac{1}{2}(H+H') =$	9.91765
1er terme	$58860^t,2$	comp. $\log N =$	3.19481
2e terme	$-423,1$	log const. $=$	9.71018
DISTANCE MÉRIDIENNE	$58437,1$	log 2e terme	$2.62640 = -423^t 06$
ci-dessus	$58436,1$		
Différence	$1^t,0$		

Ainsi cette nouvelle formule est en discordance d'une toise avec la précédente, parce qu'elle est appliquée à l'un des plus grands triangles qui aient été mesurés; mais elle s'en écarterait beaucoup moins dans toute autre circonstance. Sa simplicité la rend propre à abréger singulièrement les calculs faits comme premier essai, et même à vérifier promptement un résultat obtenu.

Une autre méthode analytique fort exacte, qui a une grande analogie avec celle-ci, mais qui conduit encore plus vite à la rectification d'un arc du méridien, consiste à évaluer rigoureusement les différences des latitudes des extrémités de tous les triangles qui s'étendent le long de cet arc, différences qu'il importe par conséquent de connaître à la précision d'un dixième de seconde centésimale, à l'aide de la formule (A'), art. **199**. Par ce moyen, la somme de toutes ces différences ou *amplitudes partielles* sera l'amplitude totale qu'on introduira ensuite dans la formule de rectification (M') démontrée à l'art. **177**, pour avoir en mètres le développement entier de l'arc du méridien. C'est ainsi que j'ai opéré pour vérifier les diverses parties de la méridienne de Dunkerque, et que j'ai découvert une erreur de 68 toises commise par la Commission du Bureau des Longitudes qui évalua, en 1808, la longueur de l'arc de méridien compris entre les parallèles de Montjouy et de Formentera (*Nouvelle Description géométrique de la France*, t. II, p. 34). En effet, selon mes calculs bien vérifiés, l'amplitude géodésique de cet arc de l'extrémité sud de la méridienne de Dunkerque, est,

en grades, et par une moyenne entre deux valeurs très peu différentes. . . . . $H - H' = \varphi = 2^{\circ},9974,89$

Latitude géodésique de Montjouy.. $H = 45\ ,9599,30$

Latitude *idem.* de Formentera. $H' = 42\ ,9626,24$

De là $H + H' = \Phi = 88\ ,9225,54$

$2\Phi = 177\ ,8451$

Ensuite, appelant A l'arc de méridien cherché, la formule (M') de l'art. **177**, qui prend cette forme

$$A = V\varphi - V' \sin\varphi \cos\Phi + V'' \sin 2\varphi \cos 2\Phi,$$

s'évaluera très-promptement en partant des valeurs numériques des coefficients V, V', V'', obtenues dans l'hypothèse d'aplatissement adoptée pour la carte de France (art. **181**), et par moi relativement aux amplitudes partielles dM, dM',... $= \varphi$; et alors les logarithmes de ces valeurs seront

$$\log V = 5.0000314, \quad \log V' = 4.4912209, \quad \log V'' = 1.49242;$$

le rayon a de l'équateur étant exprimé en mètres, et l'amplitude φ l'étant en grades ou degrés centésimaux. Mais, pour avoir A en toises, il faut ajouter à chacun de ces logarithmes 9.7101800. Voici au reste le type de ce calcul fort simple :

1er terme.	2e terme.	3e terme.
$\log V = 5.0000314$	$\log V' = 4.4912209-$	$\log V'' = 1.49242+$
$\log\varphi = 0.4767578$	$\text{l.}\sin\varphi = 8.6727173$	$\log\sin 2\varphi = 8.97327$
$\log\text{const.} = 9.7101800$	$\text{l.}\cos\Phi = 9.2383660$	$\log\cos 2\Phi = 9.97310-$
5.1869692	9.7101800	9.71018
	2.1124842 —	0.14897 —

1er terme. . . .	$+153804^{T},57$
2e terme. . . .	— 129 ,56
3e terme. . . .	— 1 ,41
DISTANCE MÉRIDIENNE EXACTE de Montjouy à Formentera.	A = 153673 ,60
Selon la *Base du Système métrique*, t. III, p. 545.	153605 ,17
Erreur commise par la Commission du Bureau des Longitudes.	$= 68^{T},43$

Si l'amplitude φ avait été évaluée en degrés et fraction décimale de degré, il aurait suffi de faire $\log V = 5.0457889$ (*).

Cette erreur de 68 toises méritait, à cause de sa gravité, d'être signalée dans l'intérêt de la science. Pour la retrouver à l'aide de la méthode de Legendre exposée à l'art. **150**, je puiserai dans la *Nouvelle Description géométrique de la France* (t. II), les éléments des calculs, ainsi qu'on le voit dans les tableaux suivants; mais je ferai remarquer, auparavant, que la méthode abrégée ci-dessus m'a donné pour résultat moyen $153674^T,13$, en procédant du nord au midi, *et vice versâ,* et passant par les côtés les moins éloignés de la méridienne de Dunkerque. Un des membres de la Commission de 1841, chargée de refaire à son tour la même vérification, est arrivé à la même valeur par un autre procédé très-exact mais beaucoup plus long. (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XII, p. 1178.)

(*) La rectification de cet arc, effectuée par parties, au moyen du logarithme du rayon de courbure de chacune d'elles, est encore assez prompte, en ayant recours à la Table IV qui donne ce logarithme. Par exemple, en divisant l'amplitude $2^G,9974,9$ en trois parties dont deux soient, chacune, d'un grade ou de 10000 secondes centésimales, et la troisième de $0^G,9974'',9$; puis calculant les rayons de courbure correspondants aux milieux de ces arcs partiels, on aura

à la latitude de $45^G,46$, $\log R = 6.8036059$;
à la latitude de $44\ ,46$, $\log R' = 6.8035411$;
à la latitude de $43\ ,46$, $\log R'' = 6.8034763$;

et si l'on procède comme au commencement de cet article, en allant du nord au sud, on trouvera

pour le 1er arc d'un grade	$51275^T,01$
pour le 2e arc d'un grade........	$51267\ ,36$
pour le 3e de $0,9974'',9$ d'amplit...	$51131\ ,06$
DISTANCE MÉRIDIENNE.....	$153673\ ,43$

Détermination de la plus courte distance de Montjouy à Saint-Jean (Pl. X).

TRIANGLES à résoudre.	DONNÉES angles sphériques.	log. côtés en mètres.	EXCÈS sphérl.	ANGLES sphériques.	ANGLES moyens.	LOG. SINUS des angles.	LOG. CÔTES en mètres.
Montserrat A.	....	4.2614586	.....	26°31′26″00	26°31′25″40	9.6498879	4.2614586
Montjouy B..	....	4.5972704	1″80	75.22.38,75	75.22.38,15	9.9856999	4.5972706
Matas C.....	78° 5′ 57″ 05	....	.....	78. 5.57,05	78. 5.56,45	9.9905632	4.6021339
Montagut....	....	4.6021339	.....	38.28.54,52	38.28.53,24	9.7939727	4.6021339
Nontjouy....	....	4.5939114	3,84	37.37.57,38	37.37.56,10	9.7857505	4.5939117
Montserrat...	103.53.11,94	....	.....	103.53.11,94	103.53.10,66	9.9871181	4.7952793
Saint-Jean...	....	4.7952793	.....	58.24.21,38	58.24.19,76	9.9303259	4.7952793
Montjouy....	....	4.4893849	4,86	24.54.26,47	24.54.24,85	9.6244317	4.4893851
Montagut....	96.41.17,01	....	.....	96.41.17,01	96.41.15,39	9.9970349	4.8619883

Le calcul de l'azimut de Montjouy, sur l'horizon de Saint-Jean, s'effectue par la formule suivante :

$$Z' = 180^\circ + Z - \frac{K}{N}\frac{\sin Z}{\sin 1''}\operatorname{tang} H + \frac{1}{4}\frac{K^2}{N^2}\frac{\sin 2Z}{\sin 1''}(1 + 2\operatorname{tang}^2 H),$$

démontrée à l'art. **193**, et au moyen de la table IV.

A Montjouy, azimut de Matas observé, $207^\circ.39'52''0$ (*)
angle entre Matas et Saint-Jean... $-\ 137\ .55.\ 2,6$

azimut de Saint-Jean... $Z = 69\ .44.49,4$
latitude de Montjouy... $H = 41^\circ.21'50'' = 46^c,96$
et, par ce qui précède, $\log K = 4.8619883...$

De là

$$Z' = 249^\circ 44' 49'',4 - 0^\circ 32' 9'',9 = 249^\circ 12' 39'',5,$$

et l'azimut de Montsia, sur le même horizon, est de $50^\circ 29' 44'',39$.

(*) *Base du Syst. mét.*, tome II, page 138.

Tableau du calcul des parties de la méridienne de Saint-Jean.

TRIANGLES à résondre.	ANGLES SPHÉR. donnés.	LOG. COTÉS donnés en mètres.	EXCÈS sphéri.	ANGLES moyens.	LOG. SINUS.	LOG. CÔTÉS en mètres.	CÔTÉS en toises.
Pied de la perpendicul. de Montjouy (m).. A.	90° 0′ 0″	4.8619883	.....	89°59′58″51	0........	4.8619883	37339,49
Saint-Jean.......... B.	69.12.39,05	....	4″47	69.12.38,01	9.9707610	4.8327493	....
Montjouy.......... C.	....	....	.....	20.47.13,48	9.5501568	4.4121451	13253,33
Pied de la perpendicul. de Montsia (m')......	90. 0. 0	4.9553969	.....	89.59.56,61	0........	4.9553969	....
Saint-Jean............	50.29.44,39	....	10,17	50.29.41,00	9.8873730	4.8427693	....
Montsia.............	....	....	.....	39.30.22,39	9.8035677	4.7589646	29454,02
Pied de la perpendicul. de Montsia (m')......	....	4.8597118	.....	27.16.05,25	9.6610168	4.8597118	....
Désierto.............	....	4.8427699	10,29	26. 8.38,77	9.6440744	4.8427694	....
Montsia.............	126.35.18,41	....	.....	126.35.14,98	9.6046872	5.1033822	....
Nœud (x).............	....	5.1033822	.....	44.31.27,36	9.8458489	5.1033822	....
Pied de la perpendic. (m')	62.43.50,32	....	49,60	62.43.33,79	9.9488166	5.2063499	82514,44
Désierto.............	72.45.15,39	....	.....	72.44.58,85	9.9800116	5.2375449	88659,42
Pied de la perpendic. (m')	0.........	5.1033822	.....	89.59.54,44	0........	5.1033822	....
Pied de la perpendic. (m'')	62.43.50,32	....	16,68	62.43,44,76	9.9488285	5.0522107	....
Désierto.............	....	....	.....	27.16.20,80	9.6610761	4.7644583	29828,98
Pied de la perpendic. (m'')	0.........	....	.....	89.59.49,03	0........	5.2063500	....
Nœud (x).............	....	5.0522107	32,91	44.31.32,91	9.8458607	5.0522107	....
Désierto.............	45.28.49,03	....	.....	45.28.38,06	9.8530725	5.0594225	58830,50
						Par parties...	88659,48
						ci-dessus, directement...	88659,42
Nœud (x).......... A.	44°31′43″88	1.9042954	.....	44°31′43″88	9.8458843	1.7639981	....
Nœud (x').......... B.	....	....	0″,0	75.37.22,72	9.9861816	1.9042954	41,16
Campvey.......... C.	59.50.53,40	....	.....	59 50.53,40	9.9368642	1.8549780	36,74
Nœud (x').............	75.37.22,72	....	.....	75.37.18,95	9.9861795	5.0321039	55243,84
Nœud (x'').............	....	5.0420932	11,30	82.24. 2,55	9.9961688	5.0420932	56529,25
Mongò.............	21.58.42,27	....	.....	21.58 38,50	9.5731505	4.6190749	21342,97
Pied de la perpendicul. de Formentera (m''')..	90. 0. 0	4.2035947	.....	90. 0. 0,00	0........	4.2035947	8199,26
Nœud (x'').............	82.24. 6,31	....	0,00	82.24. 6,31	9.9961699	4.1997646	8127,27
Formentera............	....	....	.....	7.35.53,69	9.1213172	3.3249119	1084,15

Récapitulation des parties de la méridienne, calculées depuis la perpendiculaire de Montjouy jusqu'à celle de Formentera :

	13253^{T},33
	29454 ,02
	88659 ,42
	36 ,74
	21342 ,97
	1084 ,15
De la perpendiculaire de Montjouy à celle de Formentera	153830 ,63

Calcul des réductions au parallèle de Montjouy et à celui de Formentera, à l'aide de cette formule

$$dH = \frac{1}{2}\frac{y^2}{N}\operatorname{tang} H \text{ (art. } \mathbf{196}\text{)},$$

dans laquelle y est la perpendiculaire du point dont la latitude $= H$ et la normale exprimée en mètres $= N$.

1°. à Montjouy,

$$H = 46^{\circ},96; \quad \log N = 6.8052303; \quad \log y = 4.8327493.$$

De là

$$\begin{array}{rll} \log dH = & 2.5039675 & \text{en mèt.} \\ \log \text{const.} & 9.7101800 & \\ \hline & 2.2141475 & \text{en tois. } dH = -163^{T},73. \end{array}$$

2°. à Formentera,

$$H = 42^{\circ},9626; \quad \log N = 6.8051652; \quad \log y = 4.1997646.$$

De là

$$\begin{array}{rll} \log dH = & 1.1965102 & \text{en mèt.} \\ & 9.7101800 & \\ \hline & 0.9066902 & \text{en tois. } dH = +8^{T},07. \end{array}$$

Ainsi en définitive, on a trouvé ci-dessus :

	$153830^T,63$
ôtant $(163,73 - 8,07) =$	$155\ ,66$
il reste pour la *distance méridienne* de Montjouy à Formentera.........	$153674^T,97$
Selon la Comm. du Bureau des Longitudes de 1808.	$153605\ ,17$
Erreur.......	$69\ ,80.$

Si l'azimut de départ à Montjouy était, selon Delambre, de... $207^\circ 39' 57'',5$, c'est-à-dire de $5'',5$ plus fort que je ne l'ai supposé d'après Méchain, la correction de latitude à Formentera serait de $-0'',0455$ sexagésimale [formule (m') de l'art. **204**], ou de $0^T,72$; et alors la distance méridienne ci-dessus serait réduite à $153674^T,25$, comme je l'ai trouvée en premier lieu à deux dixièmes de toise près par la méthode de Delambre, mais en partant de l'azimut de Belle-Assise sur l'horizon du Panthéon (*Description géom. de la France*, tom. II, page 37). On peut donc s'en tenir définitivement au nombre 153674 toises.

Les méthodes de rectification précédentes reposent sur la supposition que tous les méridiens qui traversent l'espace occupé par le réseau de triangles appartiennent au même ellipsoïde de révolution, et voilà pourquoi, en effectuant le développement de l'arc du méridien de Saint-Jean, on élude si facilement les difficultés que présenterait le procédé de Legendre, si on voulait l'appliquer comme dans le cas où les triangles s'écartent très-peu de l'arc à rectifier réellement. Il aurait pu se faire, cependant, que la longueur cherchée se fût trouvée un peu différente de celle calculée ci-dessus, si les localités eussent permis de prolonger directement la chaîne méridienne de Dunkerque jusqu'à l'île d'Iviza.

202. Il est des géomètres qui emploient, pour rectifier un arc de méridien, la méthode des perpendiculaires exposée à l'art. **164**, mais que l'on rend plus exacte et plus générale ainsi qu'il suit :

Soient MM′ (*fig.* 42) un côté K de la chaîne des triangles, et AX

la méridienne dont on cherche la longueur. Si, par les points M, M′, on conçoit deux arcs de grand cercle OM, OM′ perpendiculaires en P, P′ à la méridienne AX, ces arcs se rencontreront en un point O qui sera le pôle de l'arc PP′ qu'on a en vue de calculer. Or, en désignant les coordonnées AP, PM par x, y; celles AP′, P′M′ par x', y'; les latitudes de M, M′ par H, H′, et leurs longitudes par P, P′; enfin la normale au point M par N; l'amplitude de l'ordonnée du point M s'obtiendra à l'aide de la formule

$$(1) \qquad \sin y = \cos H \sin P,$$

qui dérive de la propriété du triangle sphérique rectangle pPM formé par les deux méridiens pP, pM et par l'ordonnée circulaire PM.

Si l'on désigne l'azimut PMp par ζ, ce même triangle donnera

$$(2) \qquad \cot\zeta = \sin H \operatorname{tang} P,$$

et $100^{\circ} - \zeta$ sera en M la convergence θ du méridien PM par rapport à l'axe pX des abscisses; ainsi (art. **196**)

$$\theta = 100^{\circ} - \zeta = y \operatorname{tang} H,$$

en supposant y exprimé en minutes ou en secondes.

De plus, l'azimut du côté MM′ sur l'horizon de M est connu; représentons-le par Z, comme à l'ordinaire; alors l'angle OMM′ sera égal à $\zeta - Z$. D'ailleurs, en considérant les deux arcs OP, OP′ comme deux méridiens, les ordonnées y, y' seront, par rapport à eux, les latitudes de M, M′; et comme dans le triangle sphérique OMM′ le côté MM′=K est très-petit à l'égard des deux autres, on aura, en vertu des formules (b), (a) (art. **195**), et en faisant $200^{\circ} - \zeta + Z = V$, pour abréger,

$$(\beta') \qquad x' = x + \frac{K \sin V}{\cos y} - \frac{K^2}{N} \sin V \cos V \frac{\operatorname{tang} y}{\cos y},$$

$$(\alpha') \qquad y' = y - K \cos V - \tfrac{1}{2} \frac{K^2}{N} \sin^2 V \operatorname{tang} y;$$

d'où l'on déduira

$$PP' = x' - x.$$

Il suit de là que, si l'on connaît x, y en mètres, on aura par ces formules, x', y', en même mesure; mais en partant de l'origine A de la méridienne, les coordonnées x, y sont nulles.

Remarquez qu'il n'est pas nécessaire que la formule (1) soit évaluée avec une extrême précision, en tant qu'il n'est question que d'avoir les différences $x' - x$ et $y' - y$; mais qu'il faut que les angles ζ et Z, soient généralement déterminés à chaque point à projeter; ainsi l'on doit avant tout connaître les positions géographiques de ces mêmes points. Si cependant le réseau trigonométrique était traversé par la méridienne, on pourrait, sans inconvénient, déduire les azimuts Z de la supposition du parallélisme des méridiens (art. **164**) et faire simplement $V = 100 + Z$. C'est ainsi que Delambre a opéré depuis Dunkerque jusqu'à Montjouy (*Base du Système métrique*, t. III, p. 4). Toutefois ce serait mal interpréter sa formule que de l'employer dans cette hypothèse, s'il s'agissait de projeter des côtés éloignés de la méridienne. La preuve en est dans l'erreur qui avait été commise en 1808 par la Commission du Bureau des Longitudes, en procédant de la sorte et sans examen préalable, dans la recherche de la distance méridienne comprise entre les parallèles de Montjouy et de Formentera, ainsi que nous l'apprend le rapport très-circonstancié que M. Largeteau a fait au nom de la nouvelle Commission de 1841, qui a examiné à fond la question actuelle. (Voyez *Addit. à la Conn. des Temps* pour 1844, page 123.)

Au surplus, quoique la série (β') soit théoriquement exacte, elle est très-longue à évaluer, à cause des éléments subsidiaires dont elle se compose. Disons cependant qu'en choisissant convenablement pour axes des abscisses, dans la longueur d'une chaîne de triangles telle que celle d'Espagne (*Pl. X*), un ou deux méridiens auxiliaires, et déterminant sur chacun les arcs partiels correspondants, à l'aide de la projection orthogonale, la formule (β') pourrait s'appliquer à la manière de Delambre, et alors les calculs seraient beaucoup plus simples.

Bornons-nous, maintenant, à corroborer par un exemple la remarque relative à cette série (β'), appliquée dans le cas le plus général; c'est-à-dire projetons orthogonalement la distance de Formentera à Campvey sur le méridien de Dunkerque.

On a

Latitude de Formentera.	H	$= 42^G,9626,46$
Longitude ouest comptée de ce méridien	P	$= 0,9364,09$
Latitude de Campvey.	H′	$= 43,4003,40$
Longitude ouest.	P′	$= 1,1378,90$
log distance de ces deux stations, ou log K		$= 4.6673346$ en mètres.
Azimut de Campvey à Formentera. . .	Z	$= 178^G,0795,2$
A cette station.	log N	$= 6.8051652$ en mètres.
A Campvey	log N′	$= 6.8051740$

Appelons en outre y et y' les perpendiculaires abaissées de H et H′ sur le méridien de Dunkerque, et l'on aura, en vertu de ces valeurs, par la formule (1),

$$y = 0^G,7311'',34\,;$$

de là

$$\begin{aligned} \log y &= 3.8639970 \\ \sin 1'' &= 4.1961199 \\ \log y &= 8.0601169 \quad \text{en parties de l'unité.} \\ \log N &= 6.5153452 = \text{log normale en toises.} \\ \log y &= 4.5754621 \quad \text{en toises,} \quad y = 37623^T,7 \end{aligned}$$

Le même procédé conduira à. . . . . $y' = 45465,6$

Évaluant la formule (2), en partant de Formentera, il viendra

$$\log \operatorname{tang}(100 - \zeta) = 7.963374, \quad \text{d'où} \quad 100 - \zeta = 5850'',83 = \theta\,;$$

et pour connaître l'azimut V du côté K sur la perpendiculaire y (cet azimut étant compté du sud à l'ouest, en regardant le point de concours des deux perpendiculaires y, y' comme le pôle de la sphère), on aura $V = 100^G + Z + \theta$; partant,

$$\begin{aligned} Z &= 178^G,0795,2 & \sin V &= \cos(Z + \theta) \\ 100 + \theta &= 100\;,5850,8 & \cos V &= -\sin(Z + \theta). \\ V &= 278\;,6646,0\,; \end{aligned}$$

ensuite la formule (β') donnera

1er terme.

log K	=	4.6673346
sin V	=	9.9751404 —
c. cos y	=	286
		4.6425036
		9.7101800
log 1er terme	=	4.3526836 —
1er terme		$22525^T,79$
2e. . . .		0 ,62
$x' - x$	=	22526 ,41

2e terme.

log K^2	=	9.33467 —
sin V	=	9.97514 —
cos V	=	9.51715 —
tang y	=	8.06006
c. log y	=	3
c. log N	=	3.19484
		0.08189
		9.71018
log 2e terme	=	9.79207 —

La distance des perpendiculaires y, y' mesurée sur le méridien de Dunkerque est donc de $22526^T,41$. Quant à celle des parallèles des mêmes extrémités du côté K, évaluée par notre formule (α'), elle est de $22443^T,42$: or, en calculant les réductions à ces parallèles, au moyen de leur expression générale $\frac{1}{2}\frac{y^2}{N}$ tang H, on a

pour y, qui est plus au sud, réduct.	=	$+ 172^T,88$
pour y', qui est plus au nord, réduct.	=	— 256 ,02
réduct. totale		— 83 ,14
mais $x' - x$	=	22526 ,41
donc, distance méridienne	=	22443 ,27;

donc les deux méthodes conduisent au même résultat, mais cette dernière est incomparablement plus longue.

205. Le calcul d'un arc de parallèle s'effectue par un procédé tout semblable à celui dont il a été question dans l'art. **201**.

Supposons que K, K', K'',... soient, à partir de la méridienne principale, les côtés consécutifs d'un réseau trigonométrique allant de l'est à l'ouest, par exemple, et, par les extrémités de ces côtés, concevons des méridiens : ceux-ci intercepteront sur un même parallèle à l'équa-

leur terrestre des parties qu'il s'agira de calculer. Or si, après avoir déterminé assez exactement les positions géographiques des sommets des triangles, on désigne par H′ la latitude de l'extrémité de K la plus éloignée de la méridienne principale; par N′ la normale en ce point, par H_m la latitude du parallèle dont on veut avoir la longueur, et par N_m la normale à cette latitude; on aura, relativement au côté K, et pour la partie P_m de parallèle cherchée,

$$P_m = \frac{N_m \cos H_m}{N' \cos H'}\left(K \sin Z - \frac{K^3 \sin Z}{6N'^2} + \frac{K^3 \sin^3 Z}{6 N'^2 \cos^2 H'}\right). \qquad \text{(B)}$$

Dans cette formule très-simple, qui provient du développement en série de $\sin P = \frac{\sin K \sin Z}{\cos H'}$ et de ce principe, savoir : que les arcs semblables sont entre eux comme leurs rayons, on a

$$N' = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H')^{\frac{1}{2}}}, \quad N_m = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H_m)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(art. } \mathbf{167}\text{)};$$

Z étant toujours l'azimut de K sur l'horizon de son origine, et compté du sud à l'ouest.

Pour chaque côté K, on aura une équation semblable ou une valeur de P_m; si donc Π dénote la longueur du parallèle à la latitude H_m, on aura

$$\Pi = P_m + P'_m + P''_m + \ldots$$

Ainsi, partant de la méridienne principale pour se rendre à l'extrémité de l'arc à mesurer, on obtiendra, à l'aide de deux systèmes de lignes telles que K, K′, K″,..., deux valeurs de Π, lesquelles se serviront de preuve mutuellement, et si elles ne diffèrent entre elles que d'une très-petite quantité, la *moyenne arithmétique* sera le résultat définitif. Ce moyen, analogue à celui que Delambre a employé pour calculer l'arc du méridien depuis Dunkerque jusqu'à Barcelonne, sera très-commode dans la pratique, si l'on a soin de former d'avance une table des diverses valeurs du logarithme de la normale, d'après la connaissance approchée de l'aplatissement de la Terre; parce qu'il n'y a d'autre précaution à avoir que celle qui est relative aux signes algébriques.

EXEMPLE.

Supposant les mêmes données, et la même notation qu'à l'art. **198**, on demande l'arc du parallèle compris entre les méridiens du Panthéon et de Dammartin, et dont la latitude $H_m = 54^g$?

On a $H = 54^g,274255$, $H' = 54^g,505136$,

et la table IV donne

$$\log N' = 6,8054182, \quad \log N_m = 6,8054073;$$

de là, et en vertu de la formule (B) ci-dessus :

1er terme.

$\log N_m$	=	6,8054073
c. $\log N'$	=	3,1945818
$\log \cos H_m$	=	9,8204063
c. $\log \cos H'$	=	0,1835338
log facteur	=	0,0039292
log K	=	4,5249711
l. sin Z	=	9,8588306 −
log 1er terme	=	4.3877309 −

2e terme.

log facteur	=	0,00393 −
3 log K	=	3,57491
c. log 6	=	9,22185
2 c. $\log N'$	=	6,38916
l. sin Z	=	9,85883 −
log 2e terme	=	9,04868 +

3e terme.

log 2e terme	=	9,04868 −
2 log sin Z	=	9,71766
2 c. $\log \cos H'$	=	0,36706
log 3e terme	=	9,13340 −

Récapitulation.

1er terme	−	24419^m,167
2e.	+	0 ,112
3e.	−	0 ,136
P_m =	−	24419 ,191

L'arc cherché P_m est affecté du signe négatif, comme étant situé à l'est du méridien du point de départ du Panthéon; il serait positif, s'il était situé à l'ouest du même point.

Cette méthode dispense d'évaluer les longitudes de tous les sommets des triangles, ce qui est un avantage; mais si l'on faisait précisément le contraire pour se procurer un moyen de vérification et s'assurer si les

déterminations astronomiques s'accordent avec les résultats géodésiques, les différences en longitude δP des extrémités des côtés consécutifs K, K′, K″,..., qui seraient alors données chacune par la formule (B, art. **190**), feraient également bien connaître le développement de l'arc total B ou de l'une de ses portions, puisqu'on aurait en général

$$B = \frac{a\pi}{180^\circ} \cdot \frac{P \cos H_m}{(1 - e^2 \sin^2 H_m)^{\frac{1}{2}}},$$

et en particulier

$$\delta B = \frac{a \delta P \cos H_m \sin 1''}{(1 - e^2 \sin^2 H_m)^{\frac{1}{2}}},$$

π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, P étant exprimé en unités de degré sexagésimal, et δP en secondes de degré, ou bien changeant 180° en 200^G si P est donné en grades. Mais il faudrait nécessairement calculer les amplitudes partielles δP, $\delta P'$,... avec une très-grande précision pour avoir P à un dixième de seconde centésimale près. Il faudrait en outre employer pour a, e^2 leurs valeurs numériques adoptées dans le calcul des δP; parce que, comme nous l'avons déjà dit, il est d'autant plus important de conserver le même aplatissement dans tous ces calculs, que cet élément a généralement une influence assez sensible sur les positions géographiques des sommets des triangles.

On remarquera que par ce mode de développement, l'arc de parallèle est supposé une courbe plane, ce qui pourrait faire craindre que l'on n'eût pas sa véritable longueur sur le sphéroïde irrégulier auquel appartient le réseau de triangles. Pour suivre alors cette ligne dans tout son cours, et mesurer son écart du parallèle correspondant sur l'ellipsoïde de révolution, il faudrait que l'on eût observé exactement quelques latitudes intermédiaires, et c'est ce que nous enseignerons dans le second volume. La mesure d'un arc du parallèle moyen en France a été soumise à ce procédé.

CHAPITRE XVII.

FORMULES DIFFÉRENTIELLES SERVANT A CORRIGER LES POSITIONS GÉOGRAPHIQUES PROVISOIRES DES POINTS PRINCIPAUX D'UNE CARTE, ET APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS AUX OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES.

---

204. Les éléments des calculs d'un grand canevas trigonométrique sont si nombreux, et les opérations qui en procurent les valeurs exactes demandent tant d'attention, qu'on est quelquefois obligé de faire subir aux données de départ reconnues fautives, de légères corrections qui influent plus ou moins sur les positions géographiques déjà calculées. Il est donc important de rechercher quelles sont, en général, les relations qui existent entre les quantités susceptibles de varier par suite de leur mutuelle dépendance; afin que si quelques-unes d'elles doivent être rectifiées, on puisse corriger toutes les autres de la manière la plus simple et la plus directe. La méthode analytique que nous allons exposer conduit précisément à ce but.

Supposons d'abord que les latitudes et longitudes de tous les points principaux d'un réseau trigonométrique aient été calculées à l'aide d'un azimut provisoire; il s'agit de faire à ces latitudes et longitudes les corrections dues à l'erreur commise sur cet azimut, sans recourir pour cela aux formules de l'art. 195, ni à d'autres qui pourraient remplir le même but.

Comme les distances entre les points trigonométriques sont censées avoir été déterminées exactement, la nouvelle orientation s'effectue sur-le-champ, en faisant tourner tout le réseau autour du point où l'on a observé l'azimut, d'une quantité angulaire égale à la différence de l'azimut vrai à l'azimut approché. En effet, soient A (*fig.* 43) le lieu de l'observation, B un sommet quelconque de triangle, et C le pôle de la

Terre que l'on peut supposer sphérique dans cette circonstance. Si, en vertu de la variation observée dans l'angle BAC, le point B doit être transporté en B′, tout autre point b lié invariablement au premier sera, par suite du mouvement commun autour de A, transporté en b'; et l'angle bAb', qui est égal à BAB′, sera la variation d'azimut, variation que nous supposerons de quelques secondes seulement. La question, envisagée sous ce point de vue, est donc ramenée à la recherche des équations différentielles d'un triangle sphérique dans lequel un angle est variable et les deux côtés qui le comprennent sont constants

Soient ABC ce triangle, et a, b, c les côtés opposés aux angles de mêmes dénominations; on aura

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \qquad (1)$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \qquad (2)$$
$$\sin A \sin c = \sin a \sin C. \qquad (3)$$

Si l'on différencie les deux premières équations, en faisant varier A, a et C, et regardant b, c comme constants, on aura

$$da \sin a = dA \sin A \sin b \sin c,$$

$$0 = -\, da \sin a \cos b + da \cos a \sin b \cos C - dC \sin C \sin a \sin b.$$

Mais de la troisième équation l'on tire $\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}$: mettant cette valeur dans la première équation différentielle, on obtient

$$da = dA \sin b \sin C; \qquad (m)$$

et introduisant cette valeur dans la seconde, on a

$$dC = -\cos b\,(1 - \cot a \operatorname{tang} b \cos C)\, dA. \qquad (n)$$

Soient maintenant H la latitude vraie du point A; H′ la latitude approchée du point B; Z l'azimut approché du côté BA, observé sur l'horizon de A, et compté du sud à l'ouest depuis 0 jusqu'à 400^g; enfin P′ la différence approchée des longitudes des points A et B: les formules de correction (m) et (n), relatives à la variation d'azimut de départ, seront

respectivement

$$dH' = \cos H \sin P' \, dZ, \qquad (m')$$
$$dP' = \sin H \, (1 - \operatorname{tang} H' \cot H \cos P') \, dZ; \qquad (n')$$

puisqu'en supposant comme de coutume $Z < 100^G$ on a nécessairement $da = - dH'$, $dA = - dZ$ et $dC = dP'$.

Si, au lieu de la longitude P′, qui pourrait être inconnue, l'on voulait employer la perpendiculaire y abaissée du point B sur le méridien de A, on aurait évidemment

$$\sin C = \frac{\sin y}{\sin a}, \text{ ou } \sin P' = \frac{\sin y}{\cos H'};$$

et alors l'équation différentielle (m') se changerait en celle-ci :

$$dH' = \frac{\cos H}{\cos H'} \sin y . dZ. \qquad (m'')$$

Il résulte de là, que

latitude vraie du point B $= H' + dH'$.
différence de longitude des points A et B $= H' + dP'$.

J'observerai que la variation d'azimut dZ doit être prise avec son signe, et que Z doit, dans ce cas particulier, se compter du sud à l'est, si l'on ne veut pas faire y ou P′ négatif.

On concevra encore mieux l'utilité de ces formules en résolvant quelques-unes des questions qui se présentent naturellement dans la mesure d'une ligne géodésique. Si, par exemple, on voulait savoir quelle est l'influence qu'une erreur sur l'azimut de départ peut avoir sur la longueur d'un arc de parallèle, la formule différentielle (n') serait propre à faire apprécier cette influence. Soit donc

$$dP_{(n)} = \sin H_{(1)} (1 - \operatorname{tang} H_{(n)} \cot H_{(1)} \cos P_{(n)}) \, dZ,$$

$H_{(1)}$ étant la latitude du point de départ ou de l'origine de l'arc mesuré, dZ l'erreur de l'azimut en ce point, $H_{(n)}$ la latitude de l'autre extrémité du réseau qui mesure l'arc dont il s'agit, $P_{(n)}$ la différence des longitudes de ces points extrêmes, et $dP_{(n)}$ l'erreur sur cette

différence des longitudes produite par celle de l'azimut.

Pour application, supposons

$$dZ = 20'',\ H_{(1)} = 44^\circ 30',\ H_{(n)} = 45^\circ,\ \text{et } P_{(n)} = 5^\circ;$$

on aura par les logarithmes

$$\log dZ = 1.201030$$
$$\log \sin H_{(1)} = 9.845662$$
$$\log dZ \sin H_{(1)} = 1.046692 = +11'',135$$
$$\text{l. tang } H_{(n)} = 0.000000$$
$$\text{l. cot } H_{(1)} = 0.007580$$
$$\text{l. cos } P_{(n)} = 7.998344$$
$$1.052616 = -11'',288$$
$$\text{Erreur cherchée, } dP_{(n)} = -0'',153.$$

A la latitude de 45°, la longueur du degré du parallèle $= 78800^m$, à fort peu près ; ainsi un arc d'une seconde est de $21^m,89$. Donc l'erreur sur l'arc de parallèle qui aurait une amplitude de 5°, serait seulement, abstraction faite du signe, de $3^m,28 = 21^m,89 \times 0'',15$, en supposant, contre toute vraisemblance, que l'azimut de départ ne fût connu qu'à 20″ près. Cette erreur ne serait donc d'aucune conséquence, et d'ailleurs elle serait absolument insensible, si les opérations géodésiques étaient faites avec le soin et l'exactitude qui caractérisent celles relatives à la carte de France.

La correction de latitude à l'extrémité du réseau de triangles, résultante d'une erreur dans l'azimut de départ, sera donnée par la formule suivante, savoir :

$$dH_{(n)} = \cos H_{(1)} \sin P_{(n)}\, dZ.$$

Soient, comme ci-dessus,

$$P_{(n)} = 5^\circ, \quad H_{(1)} = 44^\circ 30' \quad \text{et} \quad dZ = 20'';$$

on aura

$$\log \cos H_{(1)} = 9.85324$$
$$\text{l. sin } P_{(n)} = 8.94030$$
$$\log dZ = 1.20103$$
$$9.99457 = 0'',9875.$$

Ainsi l'erreur sur la latitude géodésique de l'extrémité de la chaîne serait au plus de 1″ de degré.

Enfin la longueur du parallèle mesuré n'éprouverait de même aucune correction sensible, la latitude de départ ne fût-elle connue qu'à trois ou quatre secondes près.

205. Cherchons en outre la variation d'un azimut quelconque pris sur l'horizon du point à rectifier et déduit du premier.

Soient toujours b, c, les deux côtés constants, et A l'angle variable du triangle sphérique ABC; dA la variation de l'azimut de départ, et dB celle de l'azimut au point B : on parviendra à trouver le rapport de dA à dB, en différentiant l'équation

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B;$$

opération qui donne d'abord, après avoir mis à la place de $\sin c \cos B$, sa valeur déduite de cette même équation,

$$da\left(\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a}\right) + \sin a \sin c \sin B\, dB = 0;$$

puis réduisant, on a

$$da \cos C + dB \sin a \sin C = 0.$$

Mais $da = dA \sin b \sin C$; par conséquent

$$dB = -\, dA\, \frac{\sin b \cos C}{\sin a}.$$

Soient donc Z l'azimut pris du point A et compté du sud à l'ouest, Z′ un de ceux qui ont été conclus de celui-ci et qui se trouvent sur l'horizon de B; on aura, en vertu de cette formule, et désignant d'ailleurs par H, H′ les latitudes de ces deux points, par P′ leur différence en longitude,

$$dZ' = \frac{\cos P' \cos H}{\cos H'}\, dZ,$$

parce que Z et Z′ croissent ou décroissent en même temps. Ainsi, sans repasser par tous les azimuts intermédiaires, on assignera sur-le-champ

la correction à faire à un azimut quelconque, par suite d'un très-petit changement survenu dans celui de départ.

Si l'on différencie dans la même hypothèse l'équation

$$\sin b \sin \mathrm{C} = \sin \mathrm{B} \sin c,$$

on aura

$$d\mathrm{C} \sin b \cos \mathrm{C} = d\mathrm{B} \cos \mathrm{B} \sin c,$$

d'où

$$d\mathrm{B} = d\mathrm{C} \frac{\sin b \cos \mathrm{C}}{\cos \mathrm{B} \sin c};$$

égalant cette valeur à la précédente, on trouve

$$\frac{d\mathrm{C}}{d\mathrm{A}} = -\frac{\sin c \cos \mathrm{B}}{\sin a};$$

enfin, posant

$$c = \mathrm{K}, \qquad \mathrm{A} = 200^\circ - \mathrm{Z}, \qquad \mathrm{B} = \mathrm{Z}' - 200^\circ,$$

on a

$$d\mathrm{P}' = -\, d\mathrm{Z} \sin \mathrm{K} \frac{\cos \mathrm{Z}'}{\sin \mathrm{H}'}.$$

Telle est la relation entre la variation d'azimut de départ et celle de longitude du point que l'on considère.

206. Examinons maintenant le cas où la latitude et la longitude du lieu principal d'une carte éprouvent une petite correction, et cherchons l'influence de ces deux corrections sur les positions géographiques de tous les autres points du réseau.

D'abord il est évident que si la longitude absolue φ du lieu principal A augmentait d'une quantité quelconque ϖ, les longitudes de tous les autres points du réseau, et comptées toujours dans le même sens, augmenteraient de la même quantité. Il reste donc à faire connaître le moyen de corriger tant les latitudes et les longitudes de ces mêmes points, que les azimuts conclus, lorsqu'il existe seulement une petite variation dans la latitude du point A.

Pour cet effet, l'on regardera c, A comme constants dans le triangle ABC, et, à cause de la relation

$$\sin \mathrm{A} \sin c = \sin a \sin \mathrm{C},$$

il viendra, en différentiant,

$$da = -dC\frac{\tang a}{\tang C}.$$

Opérant de même sur l'équation

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

on aura d'abord

$$\sin a da = db(\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A),$$

et comme le facteur du second membre $= \sin a \cos C$ (art. 64), on aura ensuite

(1) $$da = db \cos C;$$

valeur qui, étant égalée à la précédente, donnera

(2) $$dC = -db \sin C \cot a.$$

L'équation

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B,$$

traitée de la même manière, devient en premier lieu

$$db \sin b = da \sin b \cos C + \sin a \sin c \sin B dB,$$

et à cause de $\sin c \sin B = \sin C \sin b$, on a

$$db = da \cos C + \sin a \sin C dB;$$

remplaçant da par sa valeur $db \cos C$, on a enfin, après réduction faite,

(3) $$dB = db\frac{\sin C}{\sin a}.$$

Maintenant, si l'on introduit dans les trois équations différentielles les notations géodésiques déjà admises, on aura généralement

$$b = 100^g - H, \quad a = 100^g - H', \quad C = P', \quad dB = -dZ',$$

et de ce que H, H′, P′ croissent en même temps que Z′ diminue, les trois équations citées donneront respectivement,

Variation en latitude, $dH' = dH \cos P'$,
en longitude, $dP' = dH \sin P' \operatorname{tang} H'$,
en azimut, $dZ' = -dH \frac{\sin P'}{\cos H'}$.

De sorte que

la latitude exacte du point B sera. . . . . . . $H' + dH'$,
sa longitude absolue et rectifiée. . . . . $\varphi + \varpi + P' + dP'$,
et un azimut quelconque sur l'horizon de ce point, de Z′ qu'il était, deviendra.. . . . . $Z' + dZ'$.

Si, dans le triangle ABC, dont nous examinons les variations, le côté b et l'angle A sont considérés comme constants, il suffit, pour obtenir les équations différentielles relatives à ce cas, de changer dans celles (1), (3), (2) précédentes, les b en c et les c en b; on a donc immédiatement

$$da = dc \cos B,$$
$$dC = dc \frac{\sin B}{\sin a},$$
$$dB = -dc \sin B \cot a.$$

Or en faisant $c = K$, $B = Z' - 200^g$, et remarquant que H′ et Z′ diminuent quand le côté K augmente (l'azimut Z au point A étant toujours supposé aigu); ces variations seront

$$dH' = dK \cos Z',$$
$$dP' = dK \frac{\sin Z'}{\cos H'},$$
$$dZ' = -dK \sin Z' \operatorname{tang} H',$$

et résoudront le problème où il s'agit de corriger les positions géographiques des sommets des triangles, en vertu d'un changement survenu dans la ligne géodésique de départ. Éclaircissons ce sujet par un exemple.

Application numérique.

Le canevas trigonométrique de la nouvelle carte de France offre une belle chaîne de triangles, qui s'étend depuis la station de Bourges jusqu'à celle de l'île de Noirmoutier, et qui fait partie du parallèle mesuré par M. le colonel Coraboeuf; des calculs définitifs effectués par cet ancien ingénieur-géographe, l'ont conduit à reconnaître que toutes les positions géographiques de ce parallèle, calculées provisoirement au Dépôt de la Guerre, devaient être corrigées de quelques secondes, parce qu'il trouva sur la position de Bourges les petites discordances suivantes :

Par les calculs provisoires, latitude de Bourges. $H = 52^{\circ}\,3145'',59$
Par les calculs définitifs.. . . . . $52\,.3144\,,36$

Variation.. . . . . . . $dH = -\quad 1\,,23$

Quant à la longitude orientale de cette station, elle fut trouvée dans les deux cas de. . . . . $P = -\ 0^{\circ}0688'',89$;

mais l'azimut du côté *Bourges-Dun-le-Roi,* servant à l'orientation des triangles du parallèle, fut trouvé

provisoirement de. . . . . $Z = 365^{\circ}7634'',40$
et définitivement de. . . . . $365.7615\,,00$

en sorte que la variation.. . . . . . . $dZ = -\quad 19,40$

Il fut reconnu en outre, que le logarithme d'une distance quelconque, évaluée provisoirement en mètres, devait être augmenté de 0.0000674. (*Description géométrique de la France,* tome I, page 269.)

Maintenant, pour obtenir *à priori* les corrections à faire à la latitude H' et à la longitude P' d'un point quelconque du parallèle dont il s'agit, ainsi qu'à l'azimut Z' sur l'horizon de ce point, par exemple, à la position géographique de Noirmoutier dont les calculs provisoires avaient donné

latitude de Noirmoutier. . . . . $H' = \quad 52^{\circ}\,2734'',64$
longitude ouest de Noirmoutier. $P' = +\ \ 5\,.0868\,,33$;

on cherchera, par le procédé de l'art. **199**, la distance K de ce point à Bourges, et l'angle θ que cette distance fait avec le méridien de Noirmoutier; et l'on trouvera

$$\log K = 5.5476707,\ \text{d'où}\ K = 352915^{m},4\,;$$

ou bien en grades, $K = 3^{c}5292''$.

De plus, $\theta = 96^{c}4758''$, compté du nord à l'est.

Ajoutant ensuite à log K le log constant 0.0000674, on obtiendra

$$\log K_{\prime} = 5.5477381,\ \text{d'où}\ K_{\prime} = 352970^{m},2.$$

Partant, la variation de S ou $S_{\prime} - S = dS = 54^{m},8$,

et en secondes de grade, $dS = 5'',48$,

On aura en outre, pour l'angle C ou φ des deux méridiens de Bourges et de Noirmoutier,

$$\varphi = 5^{c}1557'',22.$$

Avec ces données fondamentales on évaluera très-facilement les trois corrections suivantes, qui dérivent des équations différentielles démontrées précédemment (art. **204** et **205**), en y changeant P' en φ et Z' en $200^{\circ} + \theta$, savoir :

Correction de latitude,

$$dH' = \sin\varphi \cos H\, dZ + \cos\varphi\, dH - \cos\theta\, dK\,;$$

correction de longitude,

$$dP' = \frac{\cos\theta \sin K}{\cos H'}.dZ + \sin\varphi \tang H'\, dH + \frac{\sin\theta}{\cos H'}\, dK\,;$$

correction d'azimut,

$$dZ' = \frac{\cos\varphi \cos H}{\cos H'}.dZ - \frac{\sin\varphi}{\cos H'}.\, dH - \sin\theta \tang H'\, dK.$$

En effet, en opérant avec les logarithmes à cinq décimales, on trouve

$$\begin{aligned} dH' &= -\ 1'',068 - 1'',226 - 0'',303 = -\ 2'',597; \\ dP' &= -\ 0,009 - 1,316 + 8,022 = +\ 6,697; \\ dZ' &= -\ 19,305 + 0,146 - 5,867 = -\ 25,026. \end{aligned}$$

Mais par les calculs provisoires on a eu

Latitude de Noirmoutier.	$H' =$	$52^{\circ}\ 2234'',64$
Correction.	$dH' =$	$-\ 2\ ,60$
Latitude corrigée.		$52\ .2232\ ,04$
Longitude de Noirmoutier. . . .	$P' =$	$+\ 5^{\circ}\ 0868\ ,33$
Correction.	$dP' =$	$+\ 6\ ,70$
Longitude corrigée.		$5\ .0875\ ,03$
Enfin, azimut provisoire de Bouin sur l'horizon de Noirmoutier. .	$Z' =$	$309^{\circ}\ 6665\ ,0$
Correction.	$dZ' =$	$-\ 25\ ,0$
Azimut.		$309\ .6640\ ,0$

Il est évident que si la longitude P, du point de départ ou de Bourges, eût varié de dP, il aurait fallu ajouter algébriquement cette petite quantité à toutes les autres longitudes calculées provisoirement.

Passons à une autre question non moins importante en Géodésie.

Moyens d'évaluer, aussi exactement que possible, la longueur d'une ligne géodésique, et celle de ses différentes parties, à l'aide d'un réseau de triangles appuyé sur deux bases qui présentent entre elles une petite discordance.

PREMIÈRE SOLUTION.

207. La solution que l'auteur de la *Mécanique céleste* a donnée à ce sujet dans le troisième Supplément à sa *Théorie analytique des Probabilités*, est, sans contredit, la plus rigoureuse et la plus savante que l'on pût imaginer. Avant d'en donner une idée, en voici une autre, toute fondée sur des considérations élémentaires, et qui, sans avoir à beaucoup près le même mérite, nous paraît cependant d'une exactitude suffisante, parce que dans les bonnes triangulations la discordance des bases est ordinairement très-petite.

On en acquerra la preuve par la comparaison que nous avons faite des sept bases mesurées en France, et liées à l'immense réseau trigonométrique des ingénieurs-géographes (*Nouvelle Description géométrique*, t. I, p. 471). Par exemple, en concluant la base de Perpignan

de celle de Melun, au moyen de la meilleure chaîne de triangles qui les unit, on trouve $1^m,82$ de plus par le calcul que par la mesure effective, c'est-à-dire $\frac{1}{6432}$ d'erreur sur un côté de $11706^m,4$ (art. **110**), tandis que, d'après les triangles de Delambre, cette erreur ne serait que de $0^m,33$. Néanmoins la Commission générale des nouveaux poids et mesures, s'appuyant sur les données mêmes de Delambre et de Méchain, calcula la partie du méridien comprise entre Evaux et Barcelone sur la base de Perpignan, et l'autre partie du méridien comprise entre Dunkerque et Evaux sur la base de Melun; ou, ce qui revient au même, elle ajouta à la longueur B de l'arc mesuré la correction $\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}}$, $\varepsilon^{(n)}$ désignant l'excès de la base mesurée sur la base $a^{(n)}$ calculée. Par ce procédé, on laissa bien les bases intactes, ainsi que les angles des triangles des astronomes français, mais on troubla un peu l'harmonie des azimuts vers le milieu de cet arc, et de plus on donna nécessairement deux valeurs différentes au côté du triangle correspondant à ce point. Delambre, dans le but de tout concilier et de faire disparaître la très-petite différence de $0^m,33$ ci-dessus mentionnée, prit le parti d'altérer imperceptiblement les angles des triangles, attendu que leurs valeurs sont en général moins sûres que celles des bases mesurées. Par exemple, il reconnut, après quelques essais, qu'il suffisait dans chaque triangle de diminuer de $0^m,1$ l'angle opposé à la base, et d'augmenter chacun des deux autres de $0'',05$. Il n'eut pas même besoin de faire partout cette faible correction, qu'il modifia arbitrairement dans le cours de ses calculs, pour établir entre les deux bases un parfait accord. Le moyen d'éviter de se livrer à de pareils essais et à des tâtonnements fastidieux, est d'adopter la règle suivante, qui est aussi simple que commode.

En représentant par a la base du premier triangle d'un réseau ; par A l'angle opposé, et corrigé, conformément au théorème de Legendre, du tiers de l'excès des trois angles observés sur deux angles droits ; par a' le côté commun à ce triangle et au second ; par B l'angle adjacent à la base a, opposé à a', et corrigé également du tiers de l'excès dont il s'agit ; on aura

$$a' = \frac{a \sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A}}. \tag{2}$$

Si l'on nomme de même A' l'angle opposé à la base a' du second triangle, B' l'angle adjacent à cette base et opposé au côté a'' cherché; on aura pareillement

$$a'' = \frac{a' \sin B'}{\sin A'}.$$

En général, si n désigne le nombre des triangles d'un réseau continu, et $a^{(n)}$ le dernier côté cherché, on aura

$$(3) \qquad a^{(n)} = \frac{a \sin B \sin B' \sin B'' \ldots \sin B^{(n-1)}}{\sin A \sin A' \sin A'' \ldots \sin A^{(n-1)}}.$$

Lorsque ce dernier côté $a^{(n)}$, déduit de la base observée, diffère de sa mesure effective α, et que

$$\alpha = a^{(n)} + \varepsilon^{(n)},$$

la différence $\varepsilon^{(n)}$ est la résultante des erreurs que les angles A, A',..., B, B',..., ont produites sur les côtés calculés a', a''....

On pourrait bien faire disparaître cette différence en altérant simplement les angles d'un seul triangle de la chaîne; mais, pour être autorisé à cela, il faudrait que ces angles eussent été observés dans des circonstances atmosphériques très-défavorables. Dans le cas, au contraire, où tous les angles qui entrent dans l'expression de $a^{(n)}$ méritent à très-peu près une égale confiance, il paraît naturel de les faire concourir tous à la disparition de $\varepsilon^{(n)}$, et de leur appliquer en conséquence la même correction. Supposant donc que les angles A, A',... soient chacun diminués de x, et les angles B, B',...... augmentés de la même quantité, on aura exactement

$$\alpha = a^{(n)} + \varepsilon^{(n)} = \frac{a \sin(B + x) \sin(B' + x) \ldots \sin(B^{(n-1)} + x)}{\sin(A - x) \sin(A' - x) \ldots \sin(A^{(n-1)} - x)}.$$

Prenant le logarithme de chaque membre, développant en série et réduisant au moyen de l'équation (3), on aura, en s'arrêtant à la pre-

mière puissance de $\varepsilon^{(n)}$ et de x, ce qui est toujours suffisant,

$$(4) \qquad \frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} = x \left[\begin{array}{c} \cot A + \cot A' + \ldots \cot A^{(n-1)} \\ + \cot B + \cot B' + \ldots \cot B^{(n-1)} \end{array} \right] (*).$$

En allant donc de la première à la seconde base, l'équation (4) donnera la correction x, qui sera positive ou négative selon que $\varepsilon^{(n)}$ sera un excès ou un déficit. Si l'on veut ensuite corriger un des côtés intermédiaires, par exemple le cinquième, il suffira de faire l'indice $n=5$ dans cette même équation, c'est-à-dire de s'arrêter au cinquième triangle de la chaîne. En général, lorsque l'on connaîtra la correction $\varepsilon^{(n)}$ du côté $a^{(n)}$, on aura

$$\log a^{(n)} \text{ corrigé} = \log a^{(n)} + M \frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}},$$

$M = 0{,}43429$ étant le module tabulaire. Ce procédé donne lieu à des applications numériques si simples, qu'il nous paraît inutile d'entrer à cet égard dans de plus amples détails.

Dans le calcul du développement d'une ligne de plus courte distance, ou d'un arc de parallèle qui traverse un réseau trigonométrique, les portions de cette ligne sont comprises entre des arcs de grands cer-

---

(*) Plus généralement, pour accorder les deux bases, soient x, y, z, les corrections à faire aux angles A, B, C du premier triangle; x', y', z', celles à faire aux angles du second triangle, et ainsi de suite jusqu'au $n^{ième}$ triangle; on aura

$$a^{(n)} + \varepsilon^{(n)} = \frac{a \sin(B+y)\sin(B'+y')\ldots\ldots \sin[B^{(n-1)} + y^{(n-1)}]}{\sin(A+x)\sin(A'+x')\ldots\ldots \sin[A^{(n-1)} + x^{(n-1)}]},$$

et par suite

$$(5) \qquad \frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} = y \cot B + y' \cot B' \ldots\ldots + y^{(n-1)} \cot B^{(n-1)}$$
$$- x \cot A - x' \cot A' \ldots\ldots - x^{(n-1)} \cot A^{(n-1)};$$

et l'on aura en outre

$$z = -x - y, \quad z' = -x' - y', \ldots, \quad z^{(n-1)} = -x^{(n-1)} - y^{(n-1)},$$

puisque la somme des trois angles d'un triangle doit faire exactement deux angles droits plus l'excès sphérique.

cles menés par les extrémités des côtés $a, a', a'', \ldots, a^{(n)}$. Soient donc $J, J', J'', \ldots, J^{(n)}$ ces portions consécutives d'une même ligne, il est évident que la correction de l'une de ces portions sera généralement, d'après notre hypothèse,

$$(6) \qquad \delta J^{(n)} = \frac{\varepsilon^{(n)} J^{(n)}}{a^{(n)}}.$$

Ainsi lorsque les bases aux extrémités d'une ligne géodésique présenteront entre elles une petite discordance, on calculera séparément $\delta J', \delta J'', \ldots, J^{(n)}$, et la somme de toutes ces corrections sera celle de la ligne entière. Ce mode de correction est donc applicable à une partie quelconque de la ligne mesurée.

Si les triangles du réseau étaient tellement bien conditionnés, qu'ils eussent à peu près la forme équilatérale, il serait assez exact de supposer que le facteur qui multiplie x dans le second membre de l'équation (4) se réduit à $2n \cot 60^0$: donc en exprimant x en secondes de degré, on aurait

$$(7) \qquad \frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} = x(2n \cot 60^0) \sin 1''.$$

Dans cette formule, tout est connu, excepté x; ainsi

$$(8) \qquad x = \frac{\varepsilon^{(n)} \operatorname{tang} 60^0}{2na^{(n)} \sin 1''}.$$

Une chaîne de 53 triangles lie les bases de Melun et de Perpignan, et l'excès $\varepsilon^{(n)}$ de celle-ci sur sa longueur déduite de la première base, s'est trouvé de $0^m,33$ environ, selon Delambre; l'une et l'autre base sont à peu près de 12000 mètres ; ainsi, en supposant tous les triangles équilatères,

$$x = \frac{0,33 \operatorname{tang} 60^0}{106.12000 \sin 1''} = 0'',075.$$

D'où l'on voit qu'en diminuant les angles A, A',... et augmentant les angles B, B',... chacun de 0'',07, on atténuerait sensiblement l'excès de la base mesurée sur la base calculée. C'est à peu près à cela que se réduit la correction faite par Delambre. (*Base du Système métrique*, tome II, page 704.)

Au lieu de nous arrêter ainsi à des cas particuliers, envisageons la question sous le point de vue le plus général, et pour cet effet remarquons que, puisque les triangles sont jugés d'autant meilleurs que l'erreur T de la somme des trois angles de chacun sur deux angles droits, plus l'excès sphérique, est plus petite, c'est se rapprocher de la doctrine des probabilités que de supposer les corrections xy, $x'y'$,..., considérées dans la note précédente, proportionnelles aux erreurs T, T',... de ces triangles, abstraction faite des signes de ces erreurs. D'ailleurs Laplace a prouvé que la manière la plus avantageuse de répartir les erreurs T, T',..., dans chaque triangle, est de les distribuer par tiers sur chacun des angles. Faisant donc

$$x = y = q\tfrac{1}{3}\mathrm{T},$$
$$x' = y' = q\tfrac{1}{3}\mathrm{T}',$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

la formule (5) se changera en celle-ci :

$$(5') \qquad \frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} = \frac{1}{3}q\begin{bmatrix}-\mathrm{T}\cot\mathrm{A} - \mathrm{T}'\cot\mathrm{A}' - \ldots\\ +\mathrm{T}\cot\mathrm{B} + \mathrm{T}'\cot\mathrm{B}' + \ldots\end{bmatrix},$$

dans laquelle q sera une constante facile à déterminer, puisqu'elle est seule inconnue.

Maintenant si BM (*fig.* 2, *Pl. IX*) est une ligne méridienne mesurée par le réseau trigonométrique BCKM, et que Z, Z', Z'',..., $Z^{(n)}$ soient les azimuts des côtés a, a', a'',..., $a^{(n)}$, comptés du sud à l'ouest, on trouvera sans peine, en supposant les méridiens parallèles dans la zone étroite qu'occupent les triangles, et considérant les angles sphériques,

$$\begin{aligned} Z' &= 180^\circ + Z - C \\ &\quad + x + y, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} Z'' &= Z - C + C' \\ &\quad + x + y \\ &\quad - x' - y', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z''' = 180^\circ &+ Z - C + C' - C'' \\ &+ x + y - x' - y' \\ &\qquad + x'' + y'', \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Partant, les corrections des angles azimutaux seront

successivement

$$\delta Z' = x + y,\quad \delta Z'' = x + y - x' - y',\quad \delta Z''' = x + y - x' - y' + x'' + y'',$$

. . . .

$$\delta Z^{(n)} = x - x' + x'' - x''' \ldots \pm x^{(n-1)} + y - y' + y'' - y''' \ldots \pm y^{(n-1)};$$

et la formule (6) que nous avions trouvée dans l'hypothèse de $\delta Z' = \delta Z'' = \ldots = 0$, devra être remplacée par la suivante:

$$(6')\qquad \frac{\delta J^{(n)}}{J^{(n)}} = \frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} - \text{tang } Z^{(n)} . \delta Z^{(n)},$$

qui fera connaître la correction d'une partie $J^{(n)}$ quelconque de la ligne méridienne mesurée, et, par suite, de la totalité de cette ligne; et qui dérive de la différentielle de $J^{(n)} = - a^{(n)} \cos Z^{(n)}$. S'il s'agissait au contraire d'un arc de parallèle (*fig.* 37, tome II), on aurait, en conservant la même notation,

$$\frac{\delta J^{(n)}}{J^{(n)}} = \frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} + \cot Z^{(n)} . \delta Z^{(n)}.$$

La formule (5′) rentrerait naturellement dans celle (4) si tous les triangles étaient équilatéraux, ou si toutes les erreurs T, T′, . . . étaient nulles; mais ces deux cas n'ont jamais lieu dans la pratique. On voit que par ce dernier système de correction, les angles des triangles, dans lesquels $T = 0$, restent intacts.

Il est évident que, pour se conformer au principe de l'homogénéité, le premier membre de l'équation (5′) doit être divisé par sin 1″, et que la valeur de $\delta Z^{(n)}$ dans l'équation (6′) doit être multipliée par sin 1″.

Vu la simplicité de ce procédé et de celui qui précède, il serait utile d'en légitimer l'emploi en les soumettant à l'analyse des probabilités. Mais voici en peu de mots comment Laplace applique cette analyse à la question qui nous occupe en ce moment.

DEUXIÈME SOLUTION.

Si l'on met l'équation (5) de la note de la page 407 sous cette forme,

$$\frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} = lx + my + l'x' + m'y' + \text{etc.},$$

auquel cas

$$l = -\cot A,\quad l' = -\cot A',\quad \text{etc.},$$
$$m = \cot B,\quad m' = \cot B',\quad \text{etc.};$$

et que l'on fasse $\frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} = \gamma$, qu'ensuite on désigne par F la fonction

$$l^2 - ml + m^2 + l'^2 - m'l' + m'^2 + \text{etc.},$$

la probabilité d'une erreur $\pm\gamma$ dans la seconde base déduite de la première, est, selon Laplace, et lorsque c exprime la base des logarithmes népériens,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dr \,.\, c^{-r^2},$$

l'intégrale étant prise depuis r nul jusqu'à $r = \frac{3\gamma}{2\Theta}\sqrt{\frac{n}{\cdot F}}$, limite dans laquelle Θ^2 exprime la somme des carrés des erreurs des trois angles des n triangles qui unissent les deux bases.

Quant à l'erreur moyenne de γ, dont la probabilité est $\frac{1}{2}$, son expression est

$$\gamma = \tfrac{1}{3}\Theta \sin 1'' \sqrt{\frac{F}{n}},$$

et les limites entre lesquelles elle est comprise sont

$$\pm \tfrac{2}{3} r\Theta \sin 1'' \sqrt{\frac{F}{n}},$$

en faisant $r = 3$; car il y aurait cinquante mille à parier contre un qu'elle ne les atteint pas.

Maintenant, si l'on fait une somme s de toutes les valeurs de $\frac{\delta J^{(n)}}{J^{(n)}}$, données par l'équation (6′) précédente, elle aura définitivement cette forme :

$$s = px + qy + p'x' + q'y' + \text{etc.};$$

alors, en appelant Q la fonction

$$p^2 - pq + q^2 + p'^2 - p'q' + q'^2 + \text{etc.},$$

la probabilité que l'erreur de la mesure de la ligne géodésique, par une seule base, est comprise entre les limites $\pm s$, est, comme ci-dessus,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int dr.c^{-r^2},$$

en prenant l'intégrale depuis r nul jusqu'à $r=\frac{3s}{2\Theta}\sqrt{\frac{n}{Q}}$; et l'expression de l'erreur moyenne est également $\frac{1}{3}\,\Theta \sin 1''\sqrt{\frac{Q}{n}}$, tandis que sa limite est sextuple.

La mesure directe d'une seconde base $a^{(n)}$ mettant en évidence l'erreur γ, il importe, pour faire disparaître cette discordance des deux bases, de corriger de la manière la plus avantageuse tous les angles et tous les côtés du réseau : or Laplace prouve qu'il faut, pour cela, introduire, dans la fonction s précédente, les corrections

$$x=(l-\tfrac{1}{2}\,m)\frac{\gamma}{F},\quad y=(m-\tfrac{1}{2}\,l)\frac{\gamma}{F},$$
$$x'=(l'-\tfrac{1}{2}\,m')\frac{\gamma}{F},\quad y'=(m'-\tfrac{1}{2}\,l')\frac{\gamma}{F};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

d'où il suit que, Σ désignant une somme,

$$\sigma=\Sigma\,[l\,(p-\tfrac{1}{2}q)+m(q-\tfrac{1}{2}p)]\,\frac{\gamma}{F}$$

sera la quantité à ôter de l'arc BM (*fig.* 2, *Pl. IX*) calculé rigoureusement et à l'aide de la première base (art. 159) pour avoir sa longueur corrigée; en supposant la mesure directe de la seconde base plus petite que sa longueur déduite.

Les mêmes considérations analytiques conduisent, sans difficulté, à l'erreur moyenne du dernier azimut $Z^{(n)}$ d'une chaîne de triangles; car à cause de

$$\delta Z^{(n)}=(x+y)-(x'+y')+\dots\pm[x^{(n-1)}+y^{(n-1)}],$$

ou de $\delta Z^{(n)}=px+qy-p'x'-q'y'+\text{etc.},$

en faisant $p=q=1,\quad p'=q'=-1,$ etc.,

la valeur moyenne de $\delta Z^{(n)}$, que nous désignerons par v, sera

$$v = \tfrac{1}{3}\sqrt{T^2 + T'^2 + \ldots + T^{(n)2}} = \tfrac{1}{3}\Theta,$$

la somme des carrés des erreurs des trois angles des n triangles étant encore exprimée par Θ^2. On peut voir, au chap. VI du Discours préliminaire de la *Nouvelle Description géométrique de la France*, comment nous avons essayé de démontrer élémentairement ces formules de probabilité.

La valeur numérique de l'intégrale précédente s'obtiendra aisément au moyen de la Table que Kramp a donnée à la fin de sa *Théorie des réfractions astronomiques et terrestres* (*). Par exemple, on y prendra immédiatement la valeur de l'intégrale

$$\int_r^\infty dr.c^{-r^2};$$

mais comme celle-ci

$$\int_0^\infty dr.c^{-r^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

il est clair qu'on aura

$$\int_0^r dr.c^{-r^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_r^\infty dr.c^{-r^2};$$

et ensuite

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int dr.c^{-r^2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_r^\infty dr.c^{-r^2}.$$

Pour exemple, faisons $r = 3$; la table citée, qui a pour argument cette limite, donne

$$\int_r^\infty dr.c^{-r^2} = 0{,}000019577;$$

ainsi la probabilité cherchée, ou

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int dr.c^{-r^2} = 1 - 0{,}000022091 = 0{,}999977909.$$

(*) A défaut de cette Table, voyez le *Traité élémentaire des Probabilités*, par M. Lacroix (5e édition, page 334), où l'intégrale en question est donnée en une série convergente.

Il y a donc presque certitude que les erreurs moyennes considérées ci-dessus sont comprises entre les limites énoncées : autrement, la probabilité contraire à P étant

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_r^\infty dr . c^{-r^2},$$

on a

$$P' = 0{,}000022091,$$

ou sensiblement $P' = \frac{1}{50000}$. Il y a donc, à très-peu près, comme nous l'avons dit, cinquante mille à parier contre un, que les erreurs moyennes n'atteignent pas les limites dont il s'agit.

N. B. Si l'on appliquait l'analyse précédente à la méridienne de France, comme l'a fait M. Damoiseau, sur l'invitation de M. Laplace, on trouverait, relativement à la partie de cette ligne mesurée par 26 triangles et comprise entre la base de Perpignan et Formentera, que son erreur moyenne probable est $\pm 8^m,185$; mais la mesure d'une seconde base à l'extrémité sud de l'arc, eût procuré les corrections les plus avantageuses à faire aux angles des triangles, et eût rendu en même temps cette erreur moyenne moins probable.

CHAPITRE XVIII.

ÉVALUATION DE L'ÉTENDUE SUPERFICIELLE DE LA TERRE, ET D'UNE PARTIE DE SA SURFACE.

De la mesure de l'aire d'un triangle et d'un trapèze sphériques.

208. Les triangles qui couvrent le pays dont on a levé la carte, présentent souvent une sorte de ramification continue autour du centre du lieu principal; mais quand même ces triangles ne seraient pas tous liés immédiatement les uns aux autres, la question proposée serait toujours ramenée à calculer les aires des triangles ou des quadrilatères sphériques que renferme le terrain. Quant aux petites portions de surface qui pourraient être comprises entre les limites du pays et les côtés des triangles ou des quadrilatères extrêmes dont il s'agit, leur évaluation s'effectuerait aisément à l'aide d'opérations graphiques exécutées sur la carte même, comme on le verra dans le *Traité de Topographie*.

Lorsque les triangles d'un réseau ont peu d'étendue, leur courbure est insensible, et alors on les considère comme des triangles rectilignes dont la surface s s'obtient par la formule connue

$$s = \frac{ab}{2} \sin C.$$

S'ils sont de premier ordre, on en évalue la surface au moyen de la série donnée à la fin de l'art. **100**, mais qu'on peut, dans tous les cas, borner au second terme.

En général on a, pour un triangle sphérique ABC,

$$\varepsilon = A + B + C - 2^{\circ};$$

ε désignant l'excès des trois angles sur deux angles droits. Lorsque l'aire de la sphère est évaluée en triangles trirectangles (*Géom.* de Legendre, liv. VII), l'excès ε réduit en parties du quadrant exprime l'aire même du triangle : alors si S est la surface de la sphère, donnée en mesures connues, on aura ε exprimée en mêmes mesures, par le quatrième terme de cette proportion,

$$8^{q} : \varepsilon :: S : \frac{\varepsilon}{8^{q}} S;$$

puisque la surface de la sphère est composée de huit triangles trirectangles. Or, cette surface $S = 4\pi\rho^2$, ρ étant le rayon de la sphère, et π le rapport de la circonférence au diamètre. Donc, pour les triangles sphériques qui font partie de la surface du globe terrestre, on a, en mètres carrés,

$$S = 4\pi(6366198)^2, \text{ et } \log \frac{S}{800} = 11,8038801,$$

ou un peu plus exactement, en prenant le milieu entre les logarithmes des deux demi-axes de la Terre donnés par Delambre (*Base du Système métrique*, tome III, page 196),

$$\log S = \log 4\pi + 2 \log 6,80387\ 92654 = 14,70696\ 83948;$$

ainsi $S = 50929380650$ hectares = surface du globe terrestre,

et $\log \frac{S}{800} = 11,80387\ 84078;$

ou bien, en employant la division nonagésimale du quadrant,

$$\log \frac{S}{8.90} = 11,84963\ 58984,$$

ou enfin, en substituant à ces logarithmes ceux qui résulteraient des valeurs des demi-axes de la Terre que nous avons obtenues (art. **181**).

Ainsi, pour avoir l'aire d'un grand triangle sphérique, au logarithme de l'excès de ses trois angles sur deux angles droits, exprimé en grades ou en parties de grade, on ajoutera le logarithme constant

11,80387 84078, et la somme sera le logarithme de l'aire du triangle évaluée en mètres carrés. On voit par là avec quelle promptitude on obtiendra l'aire d'un polygone sphérique décomposé en triangles dont les angles sont connus.

Mais lorsque tous les points d'un réseau trigonométrique sont donnés par leurs distances à une méridienne et à sa perpendiculaire (art. **164**), la surface d'un grand état se décompose en trapèzes sphériques, dans chacun desquels on connaît les trois côtés qui sont perpendiculaires entre eux.

Pour exemple, supposons que les côtés b, c qui comprennent l'angle A (*fig.* 13) soient prolongés jusqu'à ce que les arcs $A\alpha$, $B\beta$ soient égaux chacun au quart de la circonférence; alors les angles α, β seront droits, et l'aire du triangle isoscèle $A\alpha\beta$ qui, en général, $= A + \alpha + \beta - 2^{\circ}$, deviendra $= A$. L'aire du trapèze sphérique $\alpha\beta BC$, ou $A\alpha\beta - ABC$, sera donc $= 2^{\circ} - B - C$.

Mais, par les analogies de Néper, démontrées à l'art. **64**, on a

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(B + C) = \cot\tfrac{1}{2}A\,\frac{\cos\frac{1}{2}(b - c)}{\cos\frac{1}{2}(b + c)};$$

donc si l'on désigne par Σ l'aire du quadrilatère sphérique dont il s'agit, on aura

$$\operatorname{tang}\frac{\Sigma}{2} = \cot\left(\frac{B + C}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tang}\left(\frac{B + C}{2}\right)};$$

ensuite

$$\operatorname{tang}\frac{\Sigma}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b + c)}{\cos\frac{1}{2}(b - c)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A;$$

et si l'on dénote par y, y' les deux côtés $B\beta$, $C\alpha$ du quadrilatere, perpendiculaires à la base $\alpha\beta = A$, en sorte que $y = 1^{\circ} - b$, $y' = 1^{\circ} - c$, on aura, pour la détermination de l'aire Σ, la formule

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{\sin\frac{1}{2}(y + y')}{\cos\frac{1}{2}(y - y')}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A.$$

Cette formule, que nous venons de démontrer d'après Lagrange (*Trigonom. sphér.*, pag. 276, VI[e] cahier du *Journal de l'École Poly-*

technique), est très-utile pour mesurer les surfaces sphériques terminées par des arcs de grand cercle ; pour en faire usage, il faudra évaluer l'amplitude de chacun des arcs y, y' donnés en mètres ou en toises, ainsi que celle de l'arc de méridien $A = x' - x$ (art. **196**). De cette manière, l'aire Σ sera donnée en grades ou en degrés ; et on l'évaluera en mètres carrés, en procédant comme il a été dit à l'art. **89**. En voici un exemple.

Les coordonnées rectangles des extrémités du côté *Chapelle-la-Reine - Boiscommun*, calculées par Delambre, et rapportées à la méridienne et à la perpendiculaire de Dunkerque, sont

Pour Chapelle-la-Reine,

$$x = 155194^t,2, \qquad y = -7310^t,3;$$

pour Boiscommun,

$$x' = 171063,7, \qquad y' = -\ \ 317,9;$$

on demande l'aire comprise entre ce côté de l'un des triangles de la méridienne, la différence $x' - x$ des abscisses et les deux ordonnées y, y', en la considérant comme étant celle d'un quadrilatère sphérique.

Faisons le rayon de la sphère $\rho = \frac{180}{\pi} D = 57020^t$ (art. **149**), et

$$\frac{x'-x}{\rho} R^o = A, \qquad \frac{y+y'}{\rho} R^o = m, \qquad \frac{y-y'}{\rho} R^o = n,$$

R^o désignant le rayon exprimé en degrés (art. **101**) ; ou bien, pour employer les tables décimales et avoir l'aire cherchée en hectares, substituons à R^o ce rayon exprimé en grades, auquel cas..... $\log R^c = 1.8038801$; il viendra, à cause de $\log \rho = 6.5141498$ en toises,

$$\log \tfrac{1}{2} A = 9.1892636; \ \log \tfrac{1}{2} m = 8.8711224; \ \log \tfrac{1}{2} n = 8.8333266;$$

d'où

$$\tfrac{1}{2} A = 0^c,1546,192; \qquad \tfrac{1}{2} m = 0^c,0743,23; \qquad \tfrac{1}{2} n = 0^c,0681,28;$$

et la formule précédente donnera

$$\begin{aligned}
\log\sin\tfrac{1}{2}m &= 7.0672423\\
\text{l. tang}\,\tfrac{1}{2}\,\text{A} &= 7.3853843\\
\text{c. log}\cos\tfrac{1}{2}n &= 0.0000002\\
\hline
\text{l. tang}\,\tfrac{1}{2}\,\Sigma &= 4.4526268\\
\text{c. sin}\,1'' &= 5.8038801\\
\log 2 &= 0.3010300\\
\hline
\log\Sigma &= 0.5575369;\ \Sigma = 0^{\circ},0003'',610247.
\end{aligned}$$

L'aire Σ du quadrilatère proposé étant connue en grades, il faut maintenant ajouter à son log   6.5575369 — 10
le log. constant   11.8038784
et l'on aura log Σ =   8.3614153 en mètres carrés;

ainsi à fort peu près

$$\Sigma = 229834530^{\text{m.c}} = 22983{,}45 \text{ hectares.}$$

De l'aire d'une zone sphérique.

209. On sait que l'aire d'une zone sphérique est égale à son épaisseur E multipliée par la circonférence d'un grand cercle. Soient donc H et H′ les latitudes des bases de la zone, et supposons-les de même dénomination, puis désignons par ρ le rayon de la sphère, on aura

$$\begin{aligned}
\text{E} &= \rho(\sin\text{H}' - \sin\text{H}) = 2\rho\sin\tfrac{1}{2}(\text{H}' - \text{H})\cos\tfrac{1}{2}(\text{H}' + \text{H}),\\
\text{circonférence} &= 2\pi\rho\,;
\end{aligned}$$

partant, aire de la zone, ou

$$\Sigma = 4\pi\rho^2\sin\tfrac{1}{2}(\text{H}' - \text{H})\cos\tfrac{1}{2}(\text{H}' + \text{H}).$$

Calculons, à l'aide de cette formule, l'aire de la zone torride, de la zone glaciale et de la zone tempérée. La première étant bordée par les tropiques du Cancer et du Capricorne, les latitudes de ces deux

cercles sont

$$\begin{array}{rl} H' = & +\ 23°28' \\ H = & -\ 23.28 \\ \hline \text{de là } H' + H = & \quad 0.\ 0 \\ H - H' = & \quad 46.56; \quad \tfrac{1}{2}(H' - H) = 23°28'. \end{array}$$

Or, par ce qui précède,

$$\begin{array}{rl} \log 4\pi\rho^2 = & 14{,}70696\ 83948 \\ \text{de plus} \quad \text{l} \sin \tfrac{1}{2}(H' - H) = & 9{,}60011\ 81358 \\ \text{l} \cos \tfrac{1}{2}(H' + H) = & 0{,}\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ \hline \log \Sigma = & 14{,}30708\ 65306; \end{array}$$

donc la surface de la zone torride $\Sigma = 2028086764$o hectares; nous avons ôté une dixaine du produit, pour satisfaire au principe de l'homogénéité (art. 46), et nous avons évalué la surface en hectares, en divisant par 10000 les mètres carrés donnés immédiatement par $\log \Sigma$, ou, ce qui revient au même, en diminuant de 4 unités la caractéristique de ce logarithme.

Pour la zone tempérée boréale, qui est bordée par le cercle polaire arctique et le tropique du Cancer, on a

$$\begin{array}{rll} H' = & +\ 66°32' & \\ H = & +\ 23.28 & \\ \hline H' - H = & \quad 43.\ 4 & \tfrac{1}{2}(H' - H) = 21°32' \\ H' + H = & \quad 90.\ 0 & \tfrac{1}{2}(H' + H) = 45.\ 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{l} \sin \tfrac{1}{2}(H' - H) = & 9{,}56471\ 63065 \\ \text{l} \cos \tfrac{1}{2}(H' + H) = & 9{,}84948\ 50021 \\ \log \text{constant} = & 14{,}70696\ 83948 \\ \hline \log \Sigma = & 14{,}12116\ 97034; \end{array}$$

donc surface d'une des zones tempérées = 13218120440 hectares.

Enfin, pour une des zones glaciales, on a

$$H' = 90^\circ\ 0'$$
$$H = 66.32$$
$$H' - H = 23.28 \quad \tfrac{1}{2}(H' - H) = 11^\circ 44'$$
$$H' + H = 156.32 \quad \tfrac{1}{2}(H' + H) = 78.16$$

$$\log \sin \tfrac{1}{2}(H' - H) = 9{,}30825\ 90190$$
$$\log \cos \tfrac{1}{2}(H' + H) = 9{,}30825\ 90190$$
$$\log \text{constant} = 14{,}70696\ 83948$$
$$\log \Sigma = 13{,}32348\ 64328;$$

donc surface d'une zone glaciale = 2106136103 hectares.

RÉCAPITULATION.

Les deux zones glaciales.	4212272206 hectares.
Les deux zones tempérées..	26436240880
La zone torride.	20280867640
Surface entière du globe.	50929380726
Par le calcul direct.	50929380650
Différence. . .	76

Cette différence de 76 hectares vient de ce que, dans les recherches des nombres correspondant aux logarithmes, nous n'avons eu égard qu'aux différences premières; ce qui est bien suffisant quand on ne veut, comme dans le cas actuel, que des résultats en nombres ronds.

De l'aire d'une portion de zone sphéroïdique.

210. Considérons, pour plus de généralité, la Terre comme un ellipsoïde de révolution, et cherchons l'aire Σ d'un quadrilatère formé sur le sphéroïde elliptique, par deux méridiens dont la différence de longitude $= p$, et par deux parallèles dont les latitudes sont 0 et H.

D'abord, en prenant toujours pour équation de l'ellipse génératrice du sphéroïde terrestre,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

l'axe de rotation sera celui des y; ainsi, la différentielle de l'aire Σ, faisant partie de la zone entière engendrée par la révolution de l'arc s de l'ellipse autour du petit axe b, sera en général

$$d\Sigma = \frac{p}{2Q}\pi x ds;$$

π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon, Q désignant le quadrant, et x étant le rayon du parallèle à la latitude H exprimée en grades ou en degrés. Or, on a (art. **170**)

$$x = \frac{a(1+n)^{\frac{1}{2}}\cos H}{(1+n\cos 2H)^{\frac{1}{2}}},\quad ds = \frac{b^2(1+n)^{\frac{3}{2}}dH}{a(1+n\cos 2H)^{\frac{3}{2}}};$$

par conséquent, la différentielle de l'aire du quadrilatère proposé sera

$$d\Sigma = \frac{p}{2Q}\pi b^2(1+n)^2\frac{dH\cos H}{(1+n\cos 2H)^2},$$

expression qui peut s'intégrer par séries ou par logarithmes. Supposons, comme à l'art. **172**,

$$\frac{1}{(1+n\cos 2H)^2} = \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\begin{array}{l}1+E_{(1)}\cos 2H + E_{(2)}\cos 4H \\ \qquad + E_{(3)}\cos 6H + \text{etc}\ldots\end{array}\right];$$

on aura

$$\Sigma = \frac{p\pi b^2}{2Q}\frac{(1+n)^2}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}\int dH\left[\begin{array}{l}\cos H + E_{(1)}\cos H\cos 2H \\ \quad + E_{(2)}\cos H\cos 4H \\ \quad + E_{(3)}\cos H\cos 6H + \ldots\end{array}\right].$$

Transformant chacun des termes de cette série, au moyen de la relation $2\cos H\cos\mu H = \cos(\mu+1)H + \cos(\mu-1)H$, puis intégrant et remarquant que $\frac{1+n}{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1+n}{1-n}} = \frac{a}{b}$ (art. **175**), il viendra

$$\Sigma = \frac{p\pi ab}{2Q}\cdot\frac{1}{1-n}\left\{\begin{array}{l}[1+\frac{1}{2}E_{(1)}]\sin H + \frac{1}{2\cdot 3}[E_{(1)}+E_{(2)}]\sin 3H \\ \qquad + \frac{1}{2\cdot 5}[E_{(2)}+E_{(3)}]\sin 5H + \ldots\ldots\end{array}\right\}.$$

Mais, d'après l'art. **172**, on a

$$m = \frac{n}{1+\sqrt{1-n^2}}, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{1-n^2} = \frac{n-m}{m};$$

on a aussi

$$\begin{aligned} E_{(1)} &= -\ 2n, \\ E_{(2)} &= \ 2m\,(2n - m), \\ E_{(3)} &= -\ 2m^2(3n - 2m), \\ E_{(4)} &= \ 2m^3(4n - 3m). \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} 1 + \tfrac{1}{2}E_{(1)} &= 1 - n, \\ E_{(1)} + E_{(2)} &= -\ 2m\left(\frac{n + m^2 - 2mn}{m}\right), \\ E_{(2)} + E_{(3)} &= \ 2m^2\left(\frac{2n + 2m^2 - m - 3mn}{m}\right), \\ E_{(3)} + E_{(4)} &= -\ 2m^3\left(\frac{3n + 3m^2 - 2m - 4mn}{m}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

D'ailleurs, de $n = \frac{2m}{1+m^2}$ on tire

$$n + m^2 = 2m - m^2 n + m^2;$$

ainsi

$$\begin{aligned} E_{(1)} + E_{(2)} &= -\ 2m\ [(1 - n)(2 + m)], \\ E_{(2)} + E_{(3)} &= +\ 2m^2\ [(1 - n)(3 + 2m)], \\ E_{(3)} + E_{(4)} &= -\ 2m^3\ [(1 - n)(4 + 3m)]; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et enfin

$$\Sigma = \frac{p\pi ab}{2^{\mathrm{Q}}}\left[\begin{array}{l} \sin H - \frac{1}{3}m(2+m)\sin 3H + \frac{1}{5}m^2(3+2m)\sin 5H \\ \qquad - \frac{1}{7}m^3(4+3m)\sin 7H + \text{etc.} \end{array}\right]; \quad (1)$$

formule dans laquelle $m = \frac{a-b}{a+b}$ (art. **175**). Si donc on employait l'aplatissement $\frac{1}{309}$, on aurait $m = \frac{1}{617}$, et $ab = \frac{308}{309}a^2$.

On obtient cette série régulière par un autre procédé que nous

croyons devoir exposer. Si, dans l'expression différentielle

$$d\Sigma = \frac{p}{2^Q}\pi x ds,$$

on met pour x et ds leurs valeurs respectives,

$$\frac{a\cos H}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{b^2 dH}{a(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}},$$

trouvées aux art. **167** et **169**, on aura

$$d\Sigma = \frac{p}{2^Q}\frac{\pi b^2 d.\sin H}{(1-e^2\sin^2 H)^2}.$$

Or, en faisant $e\sin H = z$, il est évident que

$$d\Sigma = \frac{p\pi b^2 dz}{2^Q e(1-z^2)^2}\ (^*);$$

d'ailleurs

$$\frac{dz}{(1-z^2)^2} = \left[\frac{1+z^2}{2(1-z^2)^2} + \frac{1}{2(1-z^2)}\right]dz;$$

ainsi intégrant, il vient

$$\int\frac{dz}{(1-z^2)^2} = \frac{z}{2(1-z^2)} + \frac{1}{4}\log\text{hyp.}\frac{1+z}{1-z};$$

et par conséquent

$$\Sigma = \frac{p}{4^Q}\pi b^2\left[\frac{\sin H}{1-e^2\sin^2 H} + \frac{1}{2e}\log\text{hyp.}\left(\frac{1+e\sin H}{1-e\sin H}\right)\right]; \qquad (2)$$

(*) Cette valeur de $d\Sigma$ étant réduite en série, et ensuite intégrée entre les limites H et 100°, ou $\frac{1}{2}\pi$, on trouve tout d'abord

$$\Sigma = \frac{p\pi b^2}{2^Q}[(1-\sin H)+\tfrac{2}{3}e^2(1-\sin^3 H)+\tfrac{3}{5}e^4(1-\sin^5 H)\ldots].$$

Telle est l'expression simple et régulière de l'aire d'une zone formée par deux méridiens elliptiques et terminée au parallèle dont la latitude est H. En faisant $p = 4^Q$ et $H = 0$, l'aire de l'hémisphéroïde est

$$\Sigma = 2\pi b^2(1+\tfrac{2}{3}e^2+\tfrac{3}{5}e^4+\ldots).$$

sans constante, parce qu'elle est nulle lorsque $H = 0$. Pour appliquer plus commodément les logarithmes ordinaires à cette expression, soit $e \sin H = \sin \varphi$; on aura, en faisant attention qu'il faut convertir, dans le second membre, le logarithme ordinaire du facteur du second terme en logarithme hyperbolique ou népérien,

$$\Sigma = \frac{p}{4^{\text{q}}}\pi \frac{b^3}{e}\left[\frac{\tang^2\varphi}{\sin\varphi} + \frac{1}{\mu}\log\tang\left(50^{\text{g}} + \tfrac{1}{2}\varphi\right)\right], \quad (3)$$

μ étant le module 0,434294 (art. **107**).

Il résulte de là que l'aire entière de l'ellipsoïde a pour expression

$$2\Sigma = 2\pi b^2\left[\frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{2e\mu}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\right)\right]$$
$$= 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e\mu}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\right).$$

Mais, pour retrouver la série précédente, on remarquera d'abord qu'à cause de

$$\Sigma = \frac{p\pi b^2}{4^{\text{q}}}\left[\frac{z}{e(1-z^2)} + \frac{1}{e}\int\frac{dz}{1-z^2}\right],$$

on a

$$\Sigma = \frac{p\pi b^2}{4^{\text{q}}}\left(\frac{\sin H}{1 - e^2\sin^2 H} + \int\frac{dH\cos H}{1 - e^2\sin^2 H}\right).$$

valeur qui, d'après l'art. **170**, peut être mise sous cette forme :

$$\Sigma = \frac{p\pi b^2}{4^{\text{q}}}(1+n)\left(\frac{\sin H}{1 + n\cos 2H} + \int\frac{dH\cos H}{1+n\cos 2H}\right).$$

Or, en développant en série chacun des termes du second membre, puis faisant les transformations qui se présentent d'elles-mêmes, pour n'avoir que des cosinus linéaires, et intégrant, on retombera définitivement sur la série (1).

Il suit de là qu'en désignant par H et H' les latitudes de deux parallèles, et par p, p' les longitudes de deux méridiens, l'aire $\Sigma_{(2)}$ du quadrilatère compris entre ces lignes sera, en faisant d'ailleurs

$\frac{1}{2}(\mathrm{H}-\mathrm{H}')=\varphi,\ \frac{1}{2}(\mathrm{H}+\mathrm{H}')=\Phi,$

$$\Sigma_{(2)}=\pi ab\left(\frac{p-p'}{1^{\circ}}\right)\left\{\begin{array}{r}\sin\varphi\cos\Phi-\frac{1}{3}m\ (2+\ m)\sin 3\varphi\cos 3\Phi\\ +\frac{1}{5}m^2(3+2m)\sin 5\varphi\cos 5\Phi\\ -\frac{1}{7}m^3(4+3m)\sin 7\varphi\cos 7\Phi\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\};$$

série dont le terme général est évidemment

$$\pm\pi ab\left(\frac{p-p'}{1^{\circ}}\right)\left\{\frac{1}{2i-1}m^{i-1}[i+(i-1)m]\sin(2i-1)\varphi\cos(2i-1)\Phi\right\};$$

le signe supérieur ayant lieu lorsque i, qui est le nombre des termes, est impair, et le signe inférieur devant être pris dans le cas contraire. On a par là le moyen de calculer, avec une extrême facilité, l'aire de l'étendue d'un pays dont on a construit la carte à l'aide des latitudes et des longitudes. Par exemple, on peut embrasser dans un seul calcul la plus grande portion de cette étendue comprise entre deux méridiens et deux parallèles; ensuite évaluer, d'après des mesures prises sur l'échelle de la carte, les rapports que les parties du terrain figuré dans les quadrilatères partiels ont avec ces mêmes quadrilatères dont les surfaces s'exprimeront en mesures carrées, à l'aide de la formule précédente (*).

211. La recherche de diverses expressions du volume d'un segment de sphéroïde terrestre, compris sous des bases parallèles au plan de l'équateur, ne saurait offrir aucune difficulté d'après ce qui précède. Par exemple, si o et H sont les latitudes de ces bases, le volume V de ce segment sera donné par la formule suivante, qui est rigoureuse, à savoir :

$$\mathrm{V}=\pi\int x^2dy=\pi b^2\rho'\sin\mathrm{H}.\left(1-\frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2}\frac{\sin^2\mathrm{H}}{1-e^2\sin^2\mathrm{H}}\right)$$
$$=\pi b^2\rho'\sin\mathrm{H}.\left(1-\frac{1}{3}\frac{\rho}{\rho'}\sin^2\mathrm{H}\right),$$

(*) *Voyez*, pour l'expression de l'aire d'un ellipsoïde à trois axes, les *Exercices de Calcul intégral* par Legendre, 1re partie, page 182.

ou, par cette série régulière et simple,

$$V = \pi b^2 \rho' \sin H. \left[1 - \frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2} \sin^2 H.(1 + e^2 \sin^2 H + e^4 \sin^4 H + \ldots) \right];$$

ρ' et ρ étant, comme à l'art. **187**, les rayons de plus grande et de plus petite courbure de la surface du sphéroïde terrestre, au point dont la latitude est H. En doublant cette valeur de V et faisant $H = 100^G$, le volume entier de l'ellipsoïde à deux axes a donc pour expression $\frac{4}{3}\pi ba^2$.

Application numérique.

212. Étant données la différence $p - p'$ des méridiens extrêmes d'une portion de zone sphéroïdique et les latitudes H, H′ des parallèles qui bordent cette portion de zone sur la Terre; évaluer en hectares l'aire $\Sigma_{(1)}$ qu'elle renferme, en supposant le quart du méridien de 10 millions de mètres, et l'aplatissement de $\frac{1}{308.65} = 0{,}00324$.

Soient

$$p - p' = 5^\circ 18' = 5^\circ{,}3,$$
$$H = 45^\circ 40' 15'',$$
$$H' = 42^\circ 8' 9'';$$

et remarquons que par suite de notre hypothèse,

$$\alpha = \frac{1}{309}, \quad \log a = 6{,}80458\ 39646 \text{ en mètres},$$

$$m = \frac{a-}{a+b} = \frac{1}{617}, \quad \log b = 6{,}80317\ 45662;$$

on aura, en se bornant aux trois premiers termes de la série,

$$\Sigma_{(2)} = \pi ab \left(\frac{p-p'}{90^\circ}\right) \left\{ \begin{array}{l} \sin\varphi \cos\Phi - \frac{1}{3} m\,(2 + m) \sin 3\varphi \cos 3\Phi \\ \qquad + \frac{1}{5} m^2 (3 + 2m) \sin 5\varphi \cos 5\Phi \end{array} \right\};$$

de là

$$
\begin{aligned}
H &= 45^\circ 40' 15'' \\
H' &= 42.\ 8.\ 9 \\
H - H' &= 5.32.\ 6 \\
\tfrac{1}{2}(H - H') &= 1.46\ \ 3 = \varphi \ldots 3\varphi = 5^\circ 18'\ 9'' \\
H + H' &= 87.48.24 \\
\tfrac{1}{2}(H + H') &= 43.54.12 = \Phi \ldots 3\Phi = 131.42.36 \\
\tfrac{1}{3} m\ (2 + m) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1235}{(617)^2} \qquad 5\varphi = 8.50.15 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad 5\Phi = 219.30.\ 0 \\
\tfrac{1}{5} m^2 (3 + 2m) &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1853}{(617)^3}.
\end{aligned}
$$

Tous les éléments de la formule étant préparés, on procédera au calcul de chaque terme; et comme le premier est le plus considérable, on l'évaluera au moyen des grandes Tables de Vlacq à 10 décimales. Quant aux deux autres termes, il suffira de les calculer avec les Tables de Callet.

D'abord il est à remarquer que l'angle φ étant très-petit, il convient, pour avoir son log-sinus exactement, de tenir compte des différences troisièmes. Or, les Tables citées donnent

LOG SIN $1^\circ 46' 0'' = A$	δA	$\delta^2 A$	$\delta^3 A$
8,48896 31630	68 21001 68 10297 67 99619	— 10704 — 10678	+ 26

et d'après l'art. **106**, si y désigne le logarithme-sinus cherché, on aura

$$y = A + \overset{\text{(I)}}{n\delta A} + \overset{\text{(II)}}{n.\frac{n-1}{2}\,\delta^2 A} + \overset{\text{(III)}}{n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}}.\ \delta^3 A.$$

D'ailleurs, les tables étant calculées de 10″ en 10″, on a évidemment

$h = 10''$; et à cause de $nh = 3''$, il s'ensuit que $n = 0,3$. De là

$$(\mathrm{I}) = 0,3 \times 6821001 = 2046300, \qquad (\mathrm{II}) = (-0,105) \times (-10704) = 1123,9,$$

$$(\mathrm{III}) = (0,0595)(26) = 1,5;$$

$$\begin{array}{rl} \mathrm{A} = & 8,48896\ 31630 \\ (\mathrm{I}) = & +\ 20\ 46300 \\ (\mathrm{II}) = & +\ \quad 1123,9 \\ (\mathrm{III}) = & +\ \qquad 1,5 \\ \hline \log \sin 1^\circ 46' 3'' = & 8,48916\ 79055. \end{array}$$

Afin de faire remarquer la concordance des résultats obtenus par des méthodes différentes, cherchons derechef le sinus de $1^\circ 46' 3''$, par cette série

$$\log \sin(a + x) = \log \sin a + \mu x \cot a \left(1 - \frac{x}{\sin 2a} + \ldots\right),$$

démontrée à l'art. **101**. D'abord on a

$$a = 1^\circ 46', \quad \log \sin a = 8,48896\ 31630, \quad x = 3'';$$

et ensuite, en calculant les deux termes en x, il vient

$$\begin{array}{rll} \log \mu = & 9,6377843 & \\ \log 3'' = & 0,4771212 & \\ \text{c. } \log \mathrm{R}'' = & 4,6855749 & \\ \text{l. } \cot a = & 1,5108304 & \\ \hline \log \mu x \cot a = & 6,3113108 & = +\quad 20\ 47910 \\ \log 3'' + \text{c. } \log \mathrm{R}'' = & 5,16270 & \\ \text{c. } \log \sin 2a = & 1,21021 & \\ \hline & 2,68422 & = - \qquad\quad 483 \\ \hline & & +\quad 20\ 47427 \\ & \log a = & 8,48896\ 31630 \\ \hline & \log 1^\circ 46' 3'' = & 8,48916\ 79057. \end{array}$$

Delambre a donné, dans les Tables de Borda, les logarithmes sinus et tangentes de 10 minutes en 10 minutes centésimales pour tout le quart de cercle, avec onze décimales. On interpolerait par cette méthode entre ces logarithmes; mais alors on aurait

$$\text{compl. log } R'' = 4{,}19611\ 987703.$$

Voici le calcul de log cos $43^\circ 54' 12''$.

On a $h = 10''$, $nh = 2''$, $n = 0{,}2$;

et, d'après les tables,

LOG COS $43^\circ 54' 10''$.	δA	$\delta^2 A$
9,85764 45297	$-$ 202648 $-$ 202667	$-$ 19

de là

$$n\delta A = (0{,}2)(-202648) = - \quad 40529{,}6$$
$$n.\frac{n-1}{2}\,\delta^2 A = (-0{,}08)(-19) = + \quad 1{,}5$$
$$- \quad 40528{,}1$$
$$9{,}85764\ 45297{,}0$$
$$\text{l. cos } 43^\circ 54' 12'' = 9{,}85764\ 04769.$$

Quand les différences secondes sont presque constantes, comme dans ce dernier cas, on peut se contenter des différences premières ou de la méthode des parties proportionnelles; c'est ce qu'a fait Delambre, dans le calcul des triangles de la méridienne par les Tables de Vlacq.

Procédant maintenant au calcul de la formule $\Sigma_{(2)}$, on a

1er terme.

$$\begin{aligned}
\log \pi &= 0{,}49714\,98727\\
\log a &= 6{,}80458\,39646\\
\log b &= 6{,}80317\,45662\\
\log(p-p') &= 0{,}72427\,58696\\
\text{c.}\log 90 &= 8{,}04575\,74906\\
\text{som.} = \log\text{fact.} &= 12{,}87494\,17637\\
\text{l.}\sin\varphi &= 8{,}48916\,79055\\
\text{l.}\cos\Phi &= 9{,}85764\,04769\\
\log 1^{\text{er}}\text{ terme} &= 11{,}22175\,01461.
\end{aligned}$$

2^e^ terme.

$$\begin{aligned}
\log.\text{fact.} &= 12{,}8749418\\
\text{l.}\tfrac{1}{3} &= 9{,}5228788-\\
\text{l.}\tfrac{1}{617} &= 7{,}2097148\\
\textit{idem} &= 7{,}2097148\\
\text{l.}\,1235 &= 3{,}0916670\\
\text{l.}\sin 3\varphi &= 8{,}9657379\\
\text{l.}\cos 3\Phi &= 9{,}8230571-\\
\log 2^{\text{e}}\text{ terme} &= 8{,}6977122+.
\end{aligned}$$

3^e^ terme.

$$\begin{aligned}
\log.\text{facteur} &= 12{,}8749418\\
\log\tfrac{1}{5} &= 9{,}3010300\ +\\
\text{l.}\,1853 &= 3{,}2678754\\
3\log\tfrac{1}{617} &= 1{,}6291444\\
\text{l.}\sin 5\varphi &= 9{,}1864834\\
\text{l.}\cos 5\Phi &= 9{,}8873019\ -\\
&\ 6{,}1467769\ -.
\end{aligned}$$

On trouve dans les Tables de Vlacq, que le premier terme de la formule est compris entre 16662 et 16663; ainsi $a = 16662$, et $h = 1$. De plus,

	δA	$\delta^2 A$
log 1er terme, $y = 22175\,01461$ log a, $A = 22172\,71301$ $y - A = 2\,30160$	260642 260626	-16

de là, et en vertu de l'art. **106**,

$$n = \frac{y-A}{\delta A} = 0{,}883;\quad \frac{n-1}{2}\,\delta^2 A = (-0{,}0585)(-16) = 0{,}9;$$

et plus exactement

$$n = \frac{y - A}{260643} = 0,88304;$$

par suite

$$\text{nombre cherché, ou } a + nh = 16662 + 0,88304$$
$$= 16662883o400 \text{ mètres};$$

enfin,

$$\begin{aligned} 1^{er} \text{ terme} &= 16662883 \text{ hectares.} \\ 2^{e} \text{ terme} &= +\ 49856 \\ 3^{e} \text{ terme} &= -\ \ 140 \\ \text{surface } \Sigma_{(2)} &= 16712599 \end{aligned}$$

Il faut bien faire attention que les sinus et cosinus des angles étant des fractions, l'on doit supprimer de la caractéristique des logarithmes, autant de dixaines qu'il existe de ces fractions comme facteurs. C'est pour cette raison que l'on a rejeté 5 dixaines de la somme des logarithmes qui composent le deuxième terme; et comme la soustraction a pu s'effectuer, la caractéristique 8 restante appartient nécessairement à un nombre de mètres composé de 9 chiffres. Mais toutes les fois que le nombre des dixaines d'une somme de logarithmes sera moindre que celui que l'on doit retrancher, la caractéristique représentée par le chiffre des unités appartiendra à une fraction.

Lorsqu'on veut donner plus d'exactitude au résultat que procure la méthode d'interpolation précédente, on prend trois différences premières consécutives, desquelles on déduit deux différences secondes; et si celles-ci diffèrent l'une de l'autre, leur demi-somme représente alors la valeur de $\delta^2 A$.

CHAPITRE XIX.

DE LA RÉFRACTION TERRESTRE; MOYEN DE LA DÉTERMINER EXPÉRIMENTALEMENT SUR LA TERRE SUPPOSÉE SPHÉRIQUE.

213. Nous avons déjà fait observer (art. **17**) que lorsqu'un rayon de lumière traverse obliquement l'atmosphère, il se détourne à chaque instant de la route qu'il suivait dans l'instant précédent, et décrit une courbe dont la concavité est tournée vers la surface de la Terre, parce que la force réfractive des couches atmosphériques est proportionnelle à leur densité. Un observateur qui reçoit l'impression de ce rayon, le voit par conséquent dans la direction de la tangente à la courbe ou trajectoire dont il s'agit. C'est cet effet que l'on nomme *réfraction*.

Dans la supposition que la densité de l'air est constante à la même hauteur au-dessus du niveau des mers, et que la Terre est sphérique, le rayon lumineux ne peut se mouvoir que dans un plan vertical; puisque ce plan partage symétriquement, en deux portions égales, toutes les couches atmosphériques. Cependant, les variations fréquentes et singulières que la densité de l'air éprouve près de la surface de la terre, modifient tellement la trajectoire lumineuse, que, de concave qu'elle est dans l'état ordinaire de l'atmosphère, elle devient quelquefois convexe, quand le sol est très-échauffé, et nous fait voir alors les objets au-dessous de leur lieu réel: c'est le cas des réfractions extraordinaires. Il peut même arriver que cette trajectoire soit à double courbure et qu'elle donne lieu à une réfraction latérale. Quelques observateurs, et Delambre principalement, attribuent à ce dernier phénomène une partie des écarts des séries d'un même angle entre deux objets terrestres. Cette déviation horizontale ne pouvant

être évaluée, ce qu'il y a de mieux à faire pour éluder son influence, c'est, comme nous l'avons prescrit, de prendre plusieurs séries d'un même angle aux époques du jour où les réfractions extraordinaires sont le moins à redouter.

Les opérations géodésiques que j'ai faites au commencement de ce siècle, en Italie et dans le Milanais, m'ont mis à même d'observer moi-même ce déréglement des réfractions terrestres. Les chaleurs d'été occasionnent continuellement des vapeurs qui s'exhalent de tous les petits canaux qui arrosent l'immense plaine de la Lombardie, et c'est pour ainsi dire un autre phénomène, que d'y voir l'atmosphère très-transparente.

214. Voyons comment on mesure la réfraction terrestre, en supposant qu'elle n'ait lieu que dans le sens vertical.

Si du point A (*fig.* 44) on observe un objet terrestre B éloigné, le rayon lumineux qui en transmet l'image, suivra, d'après ce qui précède, une certaine courbe BDA, et l'objet B sera vu dans la direction de la tangente à cette courbe, c'est-à-dire en B′. L'angle BAB′ mesure donc l'effet de la réfraction sur la position de l'objet observé.

Dans la pratique de la Géodésie, la trajectoire lumineuse BDA est une courbe toujours assez peu étendue pour pouvoir être confondue avec son cercle osculateur; ainsi l'angle de réfraction B′AB, formé par une corde et une tangente, a pour mesure la moitié de l'arc AB soutendu par cette corde. Pour un objet D intermédiaire, la réfraction serait représentée par l'angle B′AD, qui aurait aussi pour mesure $\frac{1}{2}$ AD. Il suit de là que la réfraction terrestre en A est proportionnelle aux arcs AD, AB.

Maintenant si, par les points A, D, B, l'on conçoit les verticales AC, DC, BC qui passent par le centre C de la Terre, les arcs de distance *ad*, *ab*, faisant partie d'un grand cercle, seront, à très-peu près, dans le même rapport que les arcs correspondants AD, AB de la trajectoire. Il est donc vrai de dire que la réfraction terrestre est proportionnelle à l'angle formé par les verticales des extrémités de la courbe de réfraction, et qu'elle est sensiblement la même, à une époque donnée, aux deux stations comparées, si toutefois leur différence de niveau est très-petite.

D'après cela, soit θ la réfraction BAB' correspondante à l'amplitude C de l'arc terrestre *ab* ; on aura en général

$$\theta = nC,$$

n étant un coefficient que l'expérience fait connaître, et qui est constant pour le même état de l'atmosphère.

Soient toujours C le centre de la Terre (*fig.* 45), A et B deux signaux. Si du point A l'on observe le point B, celui-ci paraîtra en B' par l'effet de la réfraction; de même le point A paraîtra en A', observé du signal B.

Faisons les *distances apparentes* au zénith

$$ZAB' = \delta, \qquad VBA' = \delta',$$

et les angles de réfraction correspondants

$$BAB' = \theta, \qquad ABA' = \theta';$$

on aura, pour les *distances vraies* au zénith,

$$ZAB = \delta + \theta = D,$$
$$VBA = \delta' + \theta' = D';$$

donc

$$ZAB + VBA = \delta + \delta' + \theta + \theta_{,}. \qquad (1)$$

D'un autre côté, puisque l'angle extérieur d'un triangle vaut la somme des deux intérieurs opposés, on aura

$$ZAB = C + ABC,$$
$$VBA = C + BAC;$$

donc

$$ZAB + VBA = 2^{\circ} + C = D + D'. \qquad (2)$$

Ce résultat nous apprend que les deux distances zénithales vraies surpassent deux angles droits d'une quantité précisément égale à l'arc de grand cercle mené d'un signal à l'autre.

Enfin des équations (1) et (2), l'on conclut

$$\delta + \delta' + \theta + \theta' = 2^{\circ} + C;$$

ou bien, à cause que θ est sensiblement égal à θ', lorsque les distances zénithales diffèrent peu l'une de l'autre, et qu'elles répondent aux mêmes circonstances météorologiques, on a

$$\theta = \frac{C}{2} - \frac{1}{2}(\delta + \delta' - 2^{q}). \qquad (3)$$

Divisant tout par C, et faisant

$$\frac{\theta}{C} = \frac{\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}(\delta + \delta' - 2^{q})}{C} = n \quad (4),$$

on a enfin

$$\theta = nC, \quad \text{ou assez exactement,} \quad \theta + \theta' = 2nC;$$

et il résulte de l'équation (3) que

$$\text{ZAB} = \delta + \theta = 1^{q} + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}(\delta - \delta'),$$
$$\text{VBA} = \delta' + \theta' = 1^{q} + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}(\delta - \delta').$$

Le coefficient n varie souvent d'une manière très-irrégulière, et son expression théorique, que nous ferons connaître, n'est pas toujours conforme à la réalité des faits. Delambre a remarqué en France que n a environ pour valeur moyenne 0,07876, ou simplement 0,08. Il a quelquefois trouvé par des temps brumeux 0,15, et en hiver seulement; plus communément 0,06 à 0,08 en été, et 0,08 à 0,10 en hiver. D'autres observateurs ont même trouvé 0,5 par les temps de pluie. Si n était négatif, la réfraction abaisserait les images des objets, au lieu de les élever, et produirait accidentellement le phénomène du *mirage*.

Il serait sans doute nécessaire, pour déterminer n avec précision, que les distances zénithales des points A et B fussent prises au même moment par deux observateurs; et il est entendu que, dans ce cas, on doit s'assurer si les deux instruments n'exigent pas qu'il soit fait une petite correction aux distances zénithales réciproques pour les rendre parfaitement comparables. Mais, comme il est très-difficile de recueillir des observations réciproques et simultanées à la fois, on prend à chaque station plusieurs séries dans les circonstances atmosphériques les plus favorables, par exemple vers le milieu de la journée

et par un beau temps, et alors la moyenne des résultats de ces séries (art. **118**) est celle qu'on emploie, soit dans le calcul du coefficient n de la réfraction, soit pour déterminer les différences de niveau (*).

215. Dans ce qui précède, nous avons supposé que les cercles étaient placés aux sommets des signaux, et c'est ce qui a rarement lieu dans la pratique. Si, par exemple, le centre du cercle est au point a, dans l'axe du signal, la distance vraie du point B au zénith est ZaB, et sa distance apparente observée $=$ ZaB′ : désignons celle-ci par Δ, on aura évidemment

$$\mathrm{ZAB}' = \mathrm{Z}a\mathrm{B}' + \mathrm{AB}'a = \Delta + \mathrm{AB}'a;$$

reste donc à déterminer l'angle AB′a, qui est la réduction cherchée.

Soient $\mathrm{AB}' = \mathrm{AB} = \mathrm{K}$, $\mathrm{A}a = \mathrm{d}h$ et $\mathrm{AB}'a = \mathrm{d}\Delta$; le triangle AB′$a$ donnera

$$\sin \mathrm{d}\Delta = \frac{\mathrm{d}h \sin \Delta}{\mathrm{K}}.$$

Prenant l'arc pour le sinus, et réduisant en secondes, il viendra

$$\mathrm{d}\Delta = \frac{\mathrm{d}h \sin \Delta}{\mathrm{K} \sin 1''}. \qquad (5)$$

Lorsque les triangles sont calculés suivant la méthode de l'art. **155**, on obtient la corde de l'angle C pour une sphère dont le rayon est la distance de l'horizon de la mer au centre de la Terre, et cette corde est plus courte que la distance $a\mathrm{B} = \mathrm{K}$. Pour évaluer l'erreur, on

---

(*) Un grand nombre d'observations réciproques et simultanées faites durant l'été, depuis la mer Baltique jusqu'à Berlin, servent de base à des recherches intéressantes sur les réfractions, et constituent en même temps un des nivellements trigonométriques les plus exacts de notre époque : elles mettent en relief les continuelles variations angulaires auxquelles ce phénomène donne lieu dans cette contrée du nord. Il est cependant à regretter, théoriquement parlant, que ces observations n'aient pas été accompagnées de mesures barométriques et thermométriques contemporaines. *Voyez* l'ouvrage qui a pour titre : *Nivellement zwischen swinemünde und Berlin*, etc., von J.-J. Baeyer, major im generalstabe (1840).

pourrait rendre $d\Delta$ fonction de la corde connue et du rayon de la Terre (*Mémoire sur la détermination d'un arc du méridien*, par Delambre, page 92); mais il sera suffisant, dans tous les cas, d'employer la formule précédente, en faisant abstraction de la différence de l'arc à la corde.

La réduction précédente étant appliquée aux deux distances au zénith observées, on aura, pour celles qui l'auraient été aux sommets des signaux,

$$\text{ZAB}' = \Delta + d\Delta = \delta,$$
$$\text{VBA}' = \Delta' + d\Delta' = \delta'.$$

Bien entendu qu'il faudrait prendre $d\Delta$ et $d\Delta'$ négativement, s'il s'agissait de réduire les distances zénithales aux pieds des signaux; et si l'on fait en sorte de mettre le cercle le plus près possible de l'axe du signal, il sera inutile d'avoir égard à la réduction à cet axe, à cause de son extrême petitesse, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer.

Telles sont les valeurs à employer dans les formules (3) et (4), pour évaluer la réfraction; mais, pour rendre cette théorie complète, indiquons les moyens de déterminer dh ou la hauteur du signal au-dessus de la lunette, lorsque cette hauteur ne peut être mesurée directement.

S'il s'agit d'une flèche qui ait peu d'élévation, on mesurera le diamètre à deux hauteurs différentes, ainsi que la différence des deux hauteurs, et l'on considérera cette flèche comme la pointe d'un cône tronqué. Or, soient m, m' les diamètres inférieur et supérieur, h la distance des deux bases, x la partie du clocher qui s'élève au-dessus du diamètre supérieur m'; on aura, ainsi qu'il est démontré dans tous les éléments de Géométrie,

$$x = \frac{hm'}{m - m'}.$$

Mais lorsque la pointe de la flèche est très-élevée, une petite erreur sur la détermination des quantités $m - m'$ et h, pourrait en occasionner une très-grande sur la hauteur x. Alors soient B (*fig.* 46) la pointe de la flèche observée du point A, B' la galerie où a été placé le cercle : on mesurera les angles ZAB, ZAB', et BAB' sera la différence

des deux distances au zénith : or, le triangle ABB′ donne

$$BB' = \frac{AB' \sin A}{\sin B};$$

mais AB′ est très-peu différent de $ab' = K$, et l'on a $AB'B = \delta' + \theta'$, $ZAB' = \delta + \theta$; donc $B = 2^q - A - (\delta' + \theta')$; donc BB′ ou

$$dh = \frac{K \sin A}{\sin(\delta' + \theta' + A)} = \frac{K \sin A}{\sin[1^q + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}(\delta' - \delta) + A]}$$
$$= \frac{K \sin A}{\sin[1^q - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}(\delta' - \delta) - A]} = \frac{K \sin A}{\cos[\frac{1}{2}(\delta' - \delta) + \frac{1}{2}C + A]}.$$

Développant le dénominateur par la formule connue du cosinus de la somme de deux arcs, on aura

$$dh = \frac{K \sin A}{\cos\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)\cos A - \sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)\sin A},$$

ou bien

$$dh = \frac{K \operatorname{tang} A}{\cos\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)}[1 - \operatorname{tang} A \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)]^{-1};$$

mais $\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)$ étant un très-petit angle, on peut se contenter du premier terme de la série; donc assez exactement

$$dh = \frac{K \operatorname{tang} A}{\cos\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)}.$$

Delambre fit usage de cette formule pour déterminer les hauteurs des flèches d'Amiens et d'Orléans; il observait dh de deux stations voisines, et prenait le milieu entre les deux résultats dont la différence était légère. Dans tous les cas semblables, il faut faire en sorte de se placer le plus près possible du point de mire, afin que la réduction à ce point soit plus sûre.

La hauteur du centre du cercle au-dessus du sol de la station est aussi un élément essentiel à recueillir dans les opérations du nivellement; en l'appelant dT, celle du signal, comptée depuis la surface du terrain jusqu'au point de mire, sera $dh + dT$.

Calcul de la réfraction terrestre.

216. A 17^m au-dessous du sommet du signal A (*fig.* 45), on a observé la distance au zénith $100^g,2408$ du sommet du signal B; réciproquement à $15^m,1$ au-dessous de l'extrémité supérieure du signal B, une autre personne a observé au même moment la distance au zénith $99^g,9259$ du point A : la distance rectiligne entre les deux signaux étant de $28504^m,75 = K$, on demande la valeur de la réfraction et celle de son coefficient?

Pour réduire les distances au zénith aux sommets des signaux, on fera usage de la formule (5) : ainsi, par rapport au signal A, on a

$$dh = 17^m,0; \qquad \Delta = 100^g,2408;$$

et par rapport au signal B,

$$dh' = 15^m,1; \qquad \Delta' = 99^g,9259;$$

$\log dh = 1,23045$	$\log dh' = 1,17898$
$l \sin \Delta = 9,99999$	$l \sin \Delta' = 9,99999$
$c. \log K = 5,54508$	$c. \log K = 5,54508$
$c. \log \sin 1'' = 5,80388$	$c. \log \sin 1'' = 5,80388$
$\log d\Delta = 2,57940 = 379'',67$	$\log d\Delta' = 2,52793 = 337'',24$
$\Delta = 100^g,240800$	$\Delta' = 99^g,925900$
$+ d\Delta = \quad 0,037967$	$+ d\Delta' = \quad 0,033724$
Dist. réduite au sommet A $\}$ $100^g,278767 = \delta$	Dist. réduite au sommet B $\}$ $99^g,959624 = \delta'$.

Lorsque les distances zénithales apparentes sont réduites aux sommets des signaux, on emploie les formules (3) et (4) pour avoir la réfraction θ et son coefficient n. On ne peut, à cet égard, espérer d'arriver à des résultats bien certains, que quand tous les éléments des deux formules dont il s'agit, ont été recueillis avec les attentions les plus scrupuleuses. Ce qui nuit singulièrement à la bonté des observations et les rend très-discordantes, c'est lorsqu'elles sont faites dans les moments où les objets sont fortement ondulants.

Les formules citées exigent que l'on connaisse l'angle au centre C exprimé en secondes. Or, la distance K entre les deux signaux A et B $= 28504^m,75$; et l'on a C, réduit en secondes, à l'aide de la formule $C = \frac{KR''}{N} = \frac{K}{N \sin 1''}$, la normale N étant prise pour le rayon terrestre (art. **170**). Or, en supposant les observations faites à la latitude de 45° ou 50 grades, la table IV donne $\log N = 6,8053189$; partant,

$$\begin{aligned} \log K &= 4,4549172 \\ \text{c. l.} \sin 1'' &= 5,8038801 \\ \text{c.} \log N &= 3,1946811 \\ \log. C &= 3,4534784 = 2841'',05 \text{ centésimales.} \end{aligned}$$

La distance AB répond donc à un arc de $28'41'',05$.

Voici maintenant le calcul de la réfraction θ et celui de son coefficient n.

On a, par ce qui précède,

$$(3) \qquad \theta = \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(\delta + \delta' - 200^G),$$

$$(4) \qquad n = \frac{\theta}{C},$$

et, en vertu des valeurs trouvées ci-dessus,

$$\begin{aligned} \delta &= 100^G 2787'',67 \\ \delta' &= 99.9596,24 \\ \delta + \delta' - 200 &= 0.2383,91 \\ \tfrac{1}{2}(\delta + \delta' - 200) &= -0.1191,95 \\ \tfrac{1}{2}C &= +0.1420,52 \\ \theta &= +0.0228,57 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \theta &= 8,35902 \\ \text{c.} \log C &= 0,54652 \\ \log n &= 8,90554 \end{aligned}$$

donc $n = 0,08045 = \frac{1}{12}$ environ.

Ainsi, en supposant la réfraction constante, et la même aux deux sta-

tions, on a

$$\theta = n\mathrm{C} = (0{,}08)\mathrm{C}.$$

Mais il est important de savoir si les réfractions locales aux deux extrémités d'une même trajectoire lumineuse sont réellement égales, comme on le suppose ordinairement en Géodésie, lorsque les observations de distances zénithales sont réciproques et simultanées, et que les rayons vecteurs $\mathrm{AC} = r$, $\mathrm{BC} = r'$ de cette trajectoire (*fig.* 46) diffèrent entre eux. Or on atteindrait évidemment ce but, si l'on connaissait exactement la différence de hauteur $r' - r$ des stations A, B, le rayon r de la Terre et l'angle C des verticales ZC, VC; parce qu'alors en évaluant, dans le triangle ABC, les angles A, B, qui sont respectivement les suppléments des distances zénithales vraies Δ, Δ', la comparaison de ces distances avec les distances zénithales apparentes δ, δ' mettrait en évidence les réfractions correspondantes θ, θ'. Voici en effet d'excellentes observations extraites de la *Nouvelle Description géométrique de la France*, tome II, page 659, et qui répondent complétement à cette question.

Hauteur relative des points A; B (*fig.* 46), savoir	$r' - r = 1063^{\mathrm{m}}$.
log. distance horizontale de ces mêmes points, ou	$\log \mathrm{K} = 3.9715779$
Distance zénithale de la mire B, observée de celle de la préfecture de Clermont-Ferrand.	$\delta = 92^{\mathrm{G}}8436'',32$
Distance zénithale de la mire A de la préfecture, observée de celle du Puy-de-Dôme..	$\delta' = 107.2341,59$
Enfin, angle de leurs verticales	$\mathrm{C} = 0.0933,52$

parce qu'à la latitude de Clermont le log. du rayon r de la Terre, ou plutôt de la normale N, est, d'après la Table IV, $\log \mathrm{N} = 6.8053366$.

Nous ferons cependant remarquer que la distance zénithale observée réellement de la préfecture, était de $92^{\mathrm{G}}8478'',37$; mais comme le centre du cercle, placé en O (*fig.* 48 *bis*), dans le plan vertical OAB, était de $0^{\mathrm{m}},47 = m$ en arrière de la verticale ZA de la mire a, placée à $0^{\mathrm{m}},57$ au-dessous de ce centre, cette distance zénithale a dû éprou-

ver deux réductions, l'une de $-3'',55$ à la verticale ZA, et l'autre de $-38'',5$ à la mire a. Or, il est assez évident que la première réduction s'obtient par la formule (1) de l'art. **132**, dans laquelle la distance de gauche G est infinie; c'est-à-dire que

$$\text{réduct. à la verticale} = +\frac{m}{D}\,\frac{\sin(\delta+300^\circ)}{\sin 1''} = -\frac{m}{D}\,\frac{\cos\delta}{\sin 1''};$$

et qu'à cause de $r'-r = 1063^m$, la distance oblique $D = \frac{K}{\sin\delta}$, du moins à très-peu près. Quant à la réduction à la mire a, elle se calcule par la formule (5) de l'art. **215** et en prenant $dh = -0^m,57$.

Ainsi, avec les données précédentes et la formule

$$\cot B = \frac{a-b}{b\sin C} + \tang\tfrac{1}{2}C,$$

démontrée à l'art. **49**, laquelle se change en celle-ci :

$$\cot(\Delta - C) = \frac{r'-r}{r\sin C} + \tang\tfrac{1}{2}C,$$

à cause de $B = \Delta - C$ (*fig.* 46) et de $b = r$ ou N; on a tout ce qu'il faut pour déterminer la distance zénithale vraie Δ correspondante à la station de la préfecture. Exposons donc ce calcul et la conséquence qui en dérive.

$$\begin{aligned}
\log(r'-r) &= 3.0265333\\
\text{c. }\log N &= 3.1946634\\
\text{c. }\log\sin C &= 2.8337566\\
\hline
9.0549533 &= 0,1134890\\
\tang\tfrac{1}{2}C &= 0,0007332\\
\hline
\cot(\Delta - C) &= 0,1142222.
\end{aligned}$$

De là $\log.\cot(\Delta - C) = 9.0577422$, et $\Delta - C = 92^c7597'',60$

ajoutant $C = 933,52$

on a, distance zénit. vraie à la préfecture, $\Delta = 92.8531,12$.

Cet angle étant calculé ainsi, avec toute la précision que comportent

les mesures géodésiques, on a

$$\begin{array}{rrcl} \text{à la préfecture} & \Delta & = & 92^{\circ}8531'',12 \\ & \delta & = & \underline{92.8436,32} \\ \text{réfraction} & \theta & = & 94,80 = 30'',72 \text{ sexag.} \end{array}$$

ainsi le coefficient $n = \frac{\theta}{C} = 0,10155.$

De plus, à cause de la relation $\delta + \delta' + \theta + \theta' = 200^{\circ} + C$, on a

$$\begin{array}{rrcl} \multicolumn{4}{l}{\text{au Puy-de-Dôme, } 200^{\circ} - (\Delta - C), \text{ ou distance vraie}} \\ & \Delta' & = & 107^{\circ}2402'',40 \\ & \delta' & = & \underline{107.2341,59} \\ \text{réfraction} & \theta' & = & 60,81 = 19'',7 \text{ sexag.} \end{array}$$

et par suite, $n' = \frac{\theta'}{C} = 0,06514.$

Enfin le coefficient moyen de la réfraction, ou $\frac{1}{2}(n+n') = 0,08335.$

Il paraît donc que, lors des observations simultanées, la réfraction à la station inférieure était environ de 11 secondes sexagésimales plus forte que celle observée à la station supérieure. Quant à la détermination théorique des réfractions, elle dépend essentiellement de la formule suivante due à l'illustre auteur de la *Mécanique céleste,* mais un peu modifiée, et composée d'éléments météorologiques qu'il est indispensable de recueillir en même temps que les distances zénithales.

EXPRESSION THÉORIQUE DU COEFFICIENT DE LA RÉFRACTION TERRESTRE.

217. On trouve par des considérations physiques et mathématiques, que ce coefficient, que nous avons désigné ci-dessus par n, a pour expression

$$(1) \qquad n = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{P}\rho\,\frac{r}{l}(1 - \varepsilon l), \quad \text{ou} \quad n = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{P}\rho r\,(\lambda - \varepsilon),$$

ainsi que nous le démontrerons au chapitre II du 4e livre. Quant à présent, nous nous bornerons à faire remarquer que r=6366198 est

le rayon de la Terre supposée sphérique; $\frac{1}{\lambda} = (l) = 7960^{m}$ le rapport de la densité du mercure à celle de l'air, multiplié par la pression barométrique $0^{m},76$; P le pouvoir réfringent de l'air sec; ρ sa densité actuelle, celle correspondante à zéro de température étant l'unité; ε un coefficient dépendant de la loi du décroissement de la chaleur à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère.

De plus, on a à Paris, suivant les expériences de MM. Arago et Biot, $\frac{1}{4}(P) = 0{,}00014719$ sous la pression $0^{m},76$ et à la température zéro; et l'on sait que la dilatation d'un volume d'air, pris pour unité, est de $0{,}00375 = \beta$ pour chaque degré du thermomètre centigrade, tandis que la dilatation cubique du mercure est de $\frac{1}{5550} = 0{,}00018 = \beta'$. Ainsi, en désignant respectivement par t et t' les températures actuelles de l'air et du mercure, et par h la hauteur observée du baromètre, on a

$$\rho = \frac{h}{0^{m},76(1+\beta t)(1+\beta' t')};$$

partant, le coefficient de la réfraction devient

$$(2) \qquad n = \tfrac{1}{4}(P)\frac{r}{0^{m},76}\cdot\frac{h}{(1+\beta t)(1+\beta' t')}\left[\frac{1}{(l)}\cdot\frac{1}{1+\beta t} - \varepsilon\right],$$

ou par les logarithmes et en ayant égard aux valeurs numériques données ci-dessus, l'on a

$$\left.\begin{aligned}\log\lambda &= 6{,}09909 - \log(1+\beta t),\\ \log n &= 3{,}09095 + \log h - \log(1+\beta t) - \log(1+\beta' t') + \log(\lambda - \varepsilon),\end{aligned}\right\}\ (A)$$

en admettant d'ailleurs que l'air humide réfracte la lumière sensiblement comme l'air sec, ainsi qu'il résulte des expériences citées.

Quant au coefficient ε, sa valeur $0{,}0000275$ a été déterminée avec beaucoup de soin par M. Plana, pour la latitude de 45°; et nous la supposerons constante, quoique en réalité elle varie d'un lieu à un autre, et peut-être aussi dans un même lieu en différentes saisons. Au surplus on a, suivant ce savant géomètre,

$$\varepsilon = \frac{\beta(T - T')}{z(1+\beta T)},$$

lorsque T et T′ sont les températures de l'air observées en même temps au pied et au sommet d'une montagne dont la hauteur z est connue et exprimée en mètres.

Cependant, si l'on voulait avoir égard à l'effet que produit la vapeur aqueuse constamment répandue dans l'atmosphère, et dont la densité est les $\frac{5}{8}$ de celle de l'air sec qu'elle remplace, il faudrait considérer que ρ étant alors la densité du mélange et (ρ) celle de l'air sec, on a (*Mécanique de Poisson*, tome II, page 634)

$$\rho = (\rho)\left[1 - \tfrac{3}{8}\frac{f}{h}\right], \text{ et } \quad l = (l).\frac{1+\beta t}{1 - \frac{3}{8}\frac{f}{h}},$$

f désignant la force élastique de cette vapeur sous la pression barométrique h; et que, dans la même circonstance,

$$P = (P)\left[1 + 0{,}082\frac{f}{h}\right].\frac{1}{1 - \frac{3}{8}\frac{f}{h}}$$

(*Physique* de M. Biot, tome III, page 315).

Ces valeurs étant substituées dans la formule (1), et f exprimant la tension de la vapeur d'eau à l'état moyen d'humidité (*Traité de Physique*, tome I, page 531), on a

$$\begin{aligned} f &= 0^{m},002561 + 0^{m},00043245.t, \\ \log\lambda &= 6{,}09909 - \log(1+\beta t) + \log\left(1 - 0{,}375\frac{f}{h}\right), \\ \log A &= 3{,}09095, \quad \log B = \log\left(1 + 0{,}082\frac{f}{h}\right); \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \log n = \log A + \log B - \log(1+\beta t) - \log(1+\beta' t') \\ + \log(\lambda - \varepsilon). \end{aligned}$$

Quoique ce moyen d'évaluer le coefficient de la réfraction ne soit pas fondé sur une théorie physique tout à fait dégagée d'empirisme, comme on le verra plus tard, cependant nous avons prouvé par maints exemples, dans la *Description géométrique de la France* (tome II, page 645 et suivantes), que les résultats numériques aux-

quels il conduit sont généralement satisfaisants, quand les circonstances atmosphériques sont favorables, c'est-à-dire lorsque la sphéricité des couches aériennes d'égale densité n'est pas sensiblement troublée. Voici un de ces exemples.

Le 27 novembre 1812, le colonel Brousseaud, lors de la mesure du parallèle moyen, observa vers midi et au sommet du Puy-de-Dôme,

la hauteur du baromètre. $h = 0^{m},644725$,
la température du barom. $t' = 10^{d},6$ centigrades,
la température de l'air... $t = 9,4$;

éléments météorologiques qui correspondent précisément à l'époque des observations des distances zénithales citées à l'art. précédent, et d'après lesquels les deux formules (A) s'évalueront ainsi qu'il suit.

1re formule.

$$\begin{aligned} & 6.09909 \\ \text{c.}\log(1+\beta t) &= 9.98493 \\ \log\lambda &= 6.08402 \\ \lambda &= 0{,}0001213 \\ -\varepsilon &= 0{,}0000275 \\ \lambda-\varepsilon &= 0{,}0000938 \end{aligned}$$

2e formule.

$$\begin{aligned} & 3.09095 \\ \log h &= 9.80938 \\ \text{c.}\log(1+\beta t) &= 9.98493 \\ \text{c.}\log(1+\beta' t') &= 9.99918 \\ \log(\lambda-\varepsilon) &= 5.97220 \\ \log n &= 8.85664. \end{aligned}$$

On a donc $n = 0{,}07188$; et si l'on veut savoir quelle était à très-peu près la réfraction à cette station du Puy-de-Dôme, on aura, à cause de $C = 933'',53 = 62'',46$ sexag., d'après ce qui précède,

réfraction $\theta = nC = 21'',74$ sexag. $\log n = 8.85664$
Par la mesure trigonométrique.. $19,70$ $\log C = 2.97013$
différence.. $2,04$ $\log\theta = 1.82677$ centés.
9.51055
1.33732 sexag.

Cette différence entre la théorie et l'observation est si petite, dans cette circonstance, qu'on ne saurait décider si l'une de ces deux valeurs est préférable à l'autre.

A la station inférieure de la préfecture de Clermont-Ferrand, la réfraction déduite pareillement de mesures barométriques et thermométriques, prises le même jour et à la même heure par Ramond, était de 25″,2 sexag., c'est-à-dire de 5″,5 de moins que par l'observation; c'est ce qu'il est facile de vérifier au moyen des données suivantes:

hauteur du baromètre.....	0^m,7325,
thermomètre du baromètre.	15^d,5 centig.,
thermomètre libre........	7,3;

et desquelles on déduit, par un calcul semblable au précédent,

$$\log n' = 8.91994 \quad \text{ou} \quad n' = 0{,}081628;$$

en sorte que le coefficient moyen serait théoriquement

$$\tfrac{1}{2}(n+n') = 0{,}07675$$

par l'observation trigonométrique
(art. précédent)............. 0,08335
différence....... — 0,00660.

Ainsi, d'après la théorie que nous avons adoptée, la somme des réfractions qui se sont manifestées aux extrémités de la même trajectoire lumineuse aurait été de 46″,9, tandis que, par la résolution du triangle hypsométrique (art. précédent), elle aurait été plus exactement de 50″,4. Il peut se faire que ce léger désaccord provienne, en grande partie, de ce qu'il y a eu décroissement de température de l'air en sens inverse (*).

(*) Dans le but de compléter un grand travail sur les réfractions, inséré dans les derniers volumes de la *Connaissance des Temps*, M. Biot a repris et étendu la théorie des réfractions terrestres exposée au chapitre II du livre X de la *Mécanique céleste;* mais l'application qu'il a faite de quelques-unes de ses formules à l'exemple actuel nous ayant paru donner lieu à une sérieuse objection, nous renverrons le lecteur aux *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1842, et surtout à la page 663 du second volume de la *Nouvelle description géométrique de la France*, pour tous les éclaircissements qu'il pourrait desirer à cet égard.

CHAPITRE XX.

DÉTERMINATION DES DIFFÉRENCES DE NIVEAU, PAR LES PROCÉDÉS TRIGONOMÉTRIQUES.

218. Deux ou plusieurs points sont dits de *niveau* entre eux, lorsqu'ils appartiennent à une même surface semblable et concentrique à celle des eaux tranquilles de la mer ; et une droite perpendiculaire à la direction de la pesanteur est dite une *ligne horizontale* ou une *ligne de niveau apparent*. En supposant la Terre sphérique, toutes les verticales ou lignes de gravitation passent par son centre ; mais si l'on regarde le globe terrestre comme un sphéroïde engendré par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe, les verticales qui sont des normales à sa surface, rencontrent en général le demi grand axe entre le centre et l'équateur (*fig.* 39).

Ces définitions étant bien comprises, il s'agit de procéder à la recherche des formules propres à la détermination des différences de niveau, dans chacune des deux hypothèses précédentes ; afin de juger avec connaissance de cause du degré de précision qu'on peut obtenir dans les deux cas.

PREMIÈRE HYPOTHÈSE.

La Terre étant sphérique.

Soient C (*fig.* 46) le centre de notre globe réputé sphérique, et A, B deux points inégalement éloignés de ce centre. Si AB′ est une ligne de *niveau vrai* ou un arc terrestre, la hauteur $BB' = dE$ sera la *différence de niveau* des deux points A, B. Or, par les opérations géodésiques, on connaît la plus courte distance de ces points, ainsi que

leurs distances zénithales réciproques, ou tout au moins l'une d'elles; on a donc tout ce qu'il faut pour déterminer dE.

En effet, représentons par δ la distance zénithale apparente du point B, observée de la station A; par δ' la distance zénithale apparente du point A, observée de B; par C l'angle que forment les deux verticales passant par A et B et se coupant au point C; par R le rayon de la sphère dont la surface s'écarte le moins possible de celle de la Terre aux lieux des observations; par θ, θ' les réfractions dont les distances apparentes δ, δ' se trouvent respectivement affectées; enfin par D, D' les distances vraies $\delta+\theta$, $\delta'+\theta'$; et supposons d'abord $D < D'$: le triangle rectiligne ABC, que nous appellerons *triangle hypsométrique,* donnera

$$\sin D' : R :: \sin D : R + dE,$$

d'où

$$dE = R\left(\frac{\sin D - \sin D'}{\sin D'}\right);$$

puis, à cause de $\sin D - \sin D' = 2\cos\left(\frac{D+D'}{2}\right)\sin\left(\frac{D-D'}{2}\right)$, et de $\frac{D+D'}{2} = 100^g + \frac{C}{2}$ (art. **214**), ou de $\cos\left(\frac{D+D'}{2}\right) = -\sin\frac{C}{2}$, on aura

$$dE = \frac{2R\sin\frac{C}{2}\sin\frac{1}{2}(D'-D)}{\sin(200-D')} = \frac{2R\sin\frac{C}{2}\sin\frac{1}{2}(D'-D)}{\cos\frac{1}{2}(D-D'-C)}.$$

Mais en général

$$\cos(x) = \cos(-x), \text{ et } \sin\frac{C}{2} = \left(\frac{C}{2}\right) - \frac{1}{2.3}\left(\frac{C}{2}\right)^3 + \ldots;$$

de plus, $RC = K_1$, K_1 étant l'arc qui mesure la distance des stations A, B, et dont la corde est K; ainsi $2R\sin\frac{C}{2} = K$, et

$$dE = \left(K_1 - \frac{K_1^3}{24R^2}\right)\frac{\sin\frac{1}{2}(D'-D)}{\cos\frac{1}{2}(D'-D+C)},$$

ou

$$(1) \qquad dE = \frac{K\sin\frac{1}{2}(D'-D)}{\cos\frac{1}{2}(D'-D+C)}.$$

Au surplus, il est très-rare qu'on ne puisse pas prendre dans ce cas l'arc pour la corde.

Supposons maintenant $D > D'$; le triangle ABC (*fig.* 46 *bis*) donnera

$$\sin D : R :: \sin D' : R + dE;$$

par conséquent

$$dE = R\left(\frac{\sin D' - \sin D}{\sin D}\right);$$

et par suite, en procédant comme ci-dessus, ou, ce qui est plus simple, en changeant dans le résultat précédent D en D' *et vice versâ*, puis supposant qu'on nivelle en allant de A en B,

$$dE = \left(K_1 - \frac{K_1^3}{24R^2}\right)\frac{\sin\frac{1}{2}(D' - D)}{\cos\frac{1}{2}(D - D' + C)},$$

ou

(2) $$dE = K\,\frac{\sin\frac{1}{2}(D' - D)}{\cos\frac{1}{2}(D - D' + C)}.$$

Si l'on compare cette valeur à la précédente (1), on reconnaîtra que celle-ci est négative et que l'autre est positive, mais que dans le dénominateur, la différence $D' - D$ doit toujours être prise positivement, lorsque l'on emploie pour K la distance des deux stations réduite au point le plus bas. Or, par le calcul d'un réseau trigonométrique, K est nécessairement réduit au niveau de la mer (art. **141**), et est alors représenté par ab'. Ainsi la différence de niveau $BB' = dE$, obtenue à l'aide de $K = ab'$, est un peu trop petite, puisqu'elle devrait l'être au moyen de AB'; mais dans la pratique on peut, sans inconvénient, faire abstraction de la très-petite différence des deux cordes ab', AB', à moins que les stations ne soient très-élevées (art. **236**).

Afin de comprendre ces deux formules dans une seule, et de les assujettir à l'hypothèse précédente, nous écrirons

(3) $$dE = \frac{K\sin\frac{1}{2}(D' - D)}{\cos\frac{1}{2}(D' \backsim D + C)}, \text{ ou bien } dE = \frac{K\sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta' \backsim \delta + C)}.$$

La réfraction ne modifie en rien ce résultat, puisque, d'après ce qui a été dit à l'art. **214**, on peut presque toujours supposer $\theta = \theta'$: il en

serait évidemment de même si les distances zénithales réciproques δ, δ' étaient affectées chacune de la même erreur. On entendra par le signe $\backsim$, que la différence $\delta' \backsim \delta$ qui entre au dénominateur, doit toujours être considérée comme positive et s'ajouter à l'angle C. Ainsi, le signe de dE, qui dépend uniquement de celui du numérateur $\sin\frac{1}{2}(\delta'-\delta)$, sera positif ou négatif selon que l'angle $\delta'-\delta$ sera lui-même positif ou négatif.

La formule (1) ou (2), qui est rigoureuse, conserve ce caractère en développant le dénominateur et en faisant attention que $2\mathrm{R}\sin\frac{1}{2}\mathrm{C}=\mathrm{K}$, et que R est la normale N de l'une des stations (art. **170**). Cette opération très-facile donne en effet

$$(4)\qquad d\mathrm{E}=\frac{2\mathrm{R}\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\mathrm{C}\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}(\delta'-\delta+\theta'-\theta)}{1-\mathrm{tang}\frac{1}{2}\mathrm{C}\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}(\delta'-\delta+\theta'-\theta)},$$

et c'est encore ce que l'on trouve en appliquant au triangle hypsométrique le théorème démontré art. **49**. Au surplus, à moins que la distance des objets mis en comparaison ne soit très-grande, ce qu'il faut éviter, cette dernière formule, en y supposant $\theta=\theta'$, peut se réduire à celle-ci :

$$(4')\qquad d\mathrm{E}=2\mathrm{R}\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{C}\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)=\frac{\mathrm{K}}{\cos\frac{1}{2}\mathrm{C}}\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta),$$

laquelle est fort usitée. Si l'on en chasse l'angle des verticales au moyen de cette relation

$$\mathrm{C}=\delta+\delta'+\theta+\theta'-2^\circ=\delta+\delta'+n\mathrm{C}+n'\mathrm{C}-2^\circ,$$

qui donne

$$\mathrm{C}=\frac{\delta+\delta'-2^\circ}{1-n-n'},$$

on aura définitivement, avec une approximation suffisante,

$$(5)\qquad d\mathrm{E}=\frac{2\mathrm{R}\cot\frac{1}{2}(\delta+\delta')}{n+n'-1}\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta).$$

C'est à l'aide de cette nouvelle formule qu'on déterminerait assez bien,

dans une exploration géographique, la différence de niveau de deux points éloignés l'un de l'autre sans connaître leur distance, en supposant cependant que les coefficients n, n' des réfractions locales fussent déduites théoriquement d'observations barométriques et thermométriques contemporaines de celles des distances zénithales. Autrement l'on serait obligé de faire $n = n' = 0,08$, et alors la différence de niveau laisserait encore plus d'incertitude sur sa véritable valeur; car il faut bien faire attention que la substitution du diamètre de la Terre et du complément de la demi-somme des distances zénithales à la place de l'arc de distance K qui est censé inconnu, produit quelquefois une erreur considérable sur dE, puisqu'elle serait, par exemple, d'un 70e si l'on déterminait, par les seules distances zénithales apparentes et les coefficients de la réfraction, rapportés art. **216** et **217**, la hauteur du Puy-de-Dôme au-dessus de la préfecture de Clermont-Ferrand. En effet la formule (5) donnerait $dE = 1048^m$, tandis qu'on a exactement 1063^m par la formule (4'), qui est explicitement fonction de la distance K.

219. Si l'une des distances zénithales et la différence de niveau dE étaient connues, et qu'il fallût avoir l'autre distance zénithale, pour réduire à l'horizon un angle observé entre deux objets inégalement élevés, la formule (4) donnerait sur-le-champ

$$\tang \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = \frac{\frac{dE}{K}\cos\frac{1}{2}C}{1 + \frac{dE}{K}\sin\frac{1}{2}C};$$

et par la méthode de l'art. **93**, on aurait, en série et en secondes,

$$\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = \frac{dE}{K}\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin 1''} - \left(\frac{dE}{K}\right)^2\frac{\sin\frac{2}{2}C}{\sin 2''} - \left(\frac{dE}{K}\right)^3\frac{\cos\frac{3}{2}C}{\sin 3''} + \ldots ;$$

mais l'on pourrait bien dans ce cas se contenter du premier terme.

L'usage du théodolite rend ce calcul inutile, puisque les angles observés avec cet instrument se trouvent réduits à l'horizon (art. **125**); et ce qu'il y a d'avantageux, sous un autre rapport, c'est que la réfraction, dans le sens vertical, ne peut jamais troubler l'accord des séries. Mais ce n'est pas une raison pour négliger d'observer les dis-

tances zénithales, puisqu'elles servent à déterminer exactement les différences de niveau.

220. Ne faisons maintenant dépendre la formule (4) que de la seule distance zénithale δ, et, dans cette vue, rappelons-nous que $\delta + \theta = 1^\circ + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}(\delta' - \delta)$; on aura tout d'abord, en éliminant $\frac{1}{2}(\delta' - \delta) = 1^\circ - (\delta + \theta - \frac{1}{2}C)$, cette expression finie

$$(6) \qquad dE = \frac{2R \operatorname{tang}\frac{1}{2}C \cot(\delta + \theta - \frac{1}{2}C)}{1 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}C \cot(\delta + \theta - \frac{1}{2}C)},$$

ou, parce que le dénominateur diffère très-peu de l'unité,

$$dE = 2R \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C \cot(\delta + \theta - \tfrac{1}{2}C) = \frac{K}{\cos\frac{1}{2}C} \cot(\delta + \theta - \tfrac{1}{2}C);$$

ou encore, en introduisant ici le coefficient de la réfraction, on a

$$(6') \qquad dE = \frac{K}{\cos\frac{1}{2}C} \cot[\delta + (n - \tfrac{1}{2})C];$$

et il est évident que le signe de dE dépendra de celui de la cotangente.

Enfin, si dans l'équation (6) on fait

$$x = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C \cot(\delta + \theta - \tfrac{1}{2}C),$$

on aura

$$(6'') \qquad dE = 2R \cdot \frac{x}{1 - x} = 2R \cdot (x + x^2 + x^3 + \ldots);$$

mais il est extrêmement rare que le premier terme de cette série ne suffise pas.

Lorsque la valeur numérique du coefficient de la réfraction ne peut se déduire d'aucune observation directe, faite à l'époque où les distances zénithales ont été prises, on la suppose ordinairement de $+ 0{,}08$. Dans le cas d'une réfraction extraordinaire, n peut être négatif; mais il n'y a que l'observation qui puisse véritablement faire connaître ce coefficient et le signe dont il doit être affecté.

221. La formule (6′) se transforme en une autre équivalente ainsi qu'il suit. D'abord soit, pour abréger, $(n - \frac{1}{2})C = \beta$, on aura

$$\cot[\delta + (n - \tfrac{1}{2})C] = \cot(\delta + \beta) = \frac{1 - \operatorname{tang}\delta \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\delta + \operatorname{tang}\beta};$$

et puisque, dans la pratique, l'angle β est fort petit, on peut prendre l'arc pour la tangente : ainsi,

$$\cot(\delta + \beta) = \frac{1 - \beta \operatorname{tang}\delta}{\operatorname{tang}\delta(1 + \beta\cot\delta)}.$$

Ensuite multipliant haut et bas par $(1 + \beta\cot\delta)^{-1}$, et développant, il vient, en s'arrêtant aux termes du premier ordre par rapport à β,

$$\cot(\delta + \beta) = (\cot\delta - \beta)(1 - \beta\cot\delta) = \cot\delta - \frac{\beta}{\sin^2\delta};$$

puis, remplaçant β par sa valeur, et faisant attention que $C = \frac{K}{R}$, on a enfin

$$(8) \qquad dE = \frac{K\cot\delta}{\cos\frac{1}{2}C} + \frac{1}{2}\frac{K^2}{R\sin^2\delta} - \frac{nK^2}{R\sin^2\delta},$$

ou, ce qui est encore permis dans beaucoup de cas,

$$(8') \qquad dE = K\cot\delta + \frac{K^2}{2R} - \frac{nK^2}{R}.$$

Ce dernier résultat, auquel on peut sans doute parvenir par une voie plus simple et plus directe, met en évidence et le terme dépendant de la sphéricité de la Terre, savoir $\frac{K^2}{2R}$, et celui qui est produit par la réfraction, savoir $-\frac{nK^2}{R}$. Il serait donc facile de former une petite table pour différentes valeurs de n.

Mais quand il est permis de faire constamment $n = 0{,}08$, et de prendre pour R la normale à la latitude de 45 degrés, on a

$$dE = K\cot\delta + qK^2,$$

et $\log q = 2.81793$: expression très-usitée dans la triangulation secondaire et dans les opérations de détail.

Un autre avantage de cette formule (8) est de donner la valeur du coefficient de la réfraction, quand on connaît dE, K et la distance zénithale apparente δ : en effet, soit $\frac{K \cot \delta}{\cos \frac{1}{2} C} = dE'$, on a

$$(9) \qquad 1 - 2n = \frac{2R \sin^2 \delta . (dE - dE')}{K^2}.$$

Mais rien ne prouve que n soit constant pour toutes les trajectoires lumineuses qu'on peut concevoir, au même moment, autour du centre de la station.

Si au lieu d'exprimer la différence de niveau par les premiers termes d'une série d'ailleurs très-convergente, on en voulait une expression finie, il suffirait de mettre dans la formule (1), art. **218**, pour $\frac{1}{2}(D' - D)$ sa valeur $1^q - D + \frac{1}{2} C$, car on a sur-le-champ

$$dE = \frac{K \cos (D - \frac{1}{2} C)}{\sin (D - C)}.$$

Observons toutefois que si l'on se bornait à remplacer ici la distance zénithale vraie D par sa distance apparente δ, la différence de niveau résultante serait, d'après ce qui précède, en erreur d'une quantité exprimée par le terme $-\frac{nK^2}{R \sin^2 \delta}$ dû à la réfraction; mais elle sera évidemment exacte, en faisant $D = \delta + nC$, ou ce qui est plns commode pour le calcul numérique, en écrivant

$$dE = K \frac{\cos (\delta - \frac{1}{2} C)}{\sin (\delta - C)} - \frac{nK^2}{R \sin^2 \delta}.$$

222. Lorsqu'on aperçoit l'horizon de la mer, d'un lieu élevé d'où l'on observe, il est facile d'obtenir la hauteur de ce lieu au-dessus des eaux, au moyen de l'angle observé entre l'horizon et le zénith, si l'on connaît d'ailleurs le coefficient de la réfraction; voici comment :

Si, par le point B de l'observateur (*fig.* 47), l'on imagine une tangente BA à la surface de la mer, le rayon terrestre CA = R sera évidemment perpendiculaire à AB. Si l'on imagine en outre une ligne de

niveau, ou un arc terrestre AB′ compris entre le point A et la verticale VB, la hauteur cherchée sera $BB' = E$. Or, faisant comme à l'ordinaire la distance zénithale vraie $VBA = D = \delta + \theta$, δ étant la distance apparente observée et θ la réfraction ; le triangle rectangle CAB donnera, à cause de l'angle $CBA = 1^q - C$, et de $CA = R$,

$$CB = \frac{R}{\sin(1^q - C)} = \frac{R}{\cos C}.$$

Mais $BB' = E = CB - R$, par conséquent

$$E = R\frac{(1 - \cos C)}{\cos C} = R\frac{2\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos C}$$
$$= R\frac{2\sin^2\frac{1}{2}C\sin C}{\sin C\cos C} = R\tang\frac{1}{2}C\tang C.$$

Quelle que soit la hauteur de la montagne, la distance zénithale qui aura pu être observée du sommet, sera toujours peu différente de l'angle droit; ainsi l'angle C sera très-petit. Mais parce qu'en général $\tang mx = m\tang x$, lorsque x est un fort petit arc, et m un coefficient peu différent de l'unité, on a sensiblement, en considérant R comme la normale N du lieu,

$$E = \tfrac{1}{2}R\tang^2 C.$$

De plus, à cause de $C = \delta + \theta - 1^q = \delta + nC - 1^q$ (art. **214**), on a

$$C = \frac{\delta - 1^q}{1 - n};$$

enfin,

$$(10) \qquad E = \tfrac{1}{2}R\frac{1}{(1 - n)^2}\tang^2(\delta - 1^q),$$

ou, faisant la dépression apparente $\delta - 1^q = u$, on a à fort peu près

$$E = \tfrac{1}{2}R(1 + n)^2\tang^2 u.$$

Cette formule usitée aurait cependant plus de précision si on la modifiait de manière à tenir compte de la différence qui existe très-probablement entre la réfraction à la surface de la mer et celle qui se mani-

feste en même temps à la station élevée. Or, en reprenant la formule (4'), et remarquant que, dans le cas actuel, $\delta = 100^G$, $\delta' = 100^G + u$, elle devient, en y changeant d'ailleurs dE en E pour désigner une hauteur absolue; elle devient, disons-nous,

$$E = 2R \tang \tfrac{1}{2} C \tang \tfrac{1}{2} u;$$

puis, substituant pour C sa valeur en fonction des coefficients des réfractions locales, savoir :

$$C = \frac{u}{1 - n - n'},$$

on aura très-approximativement

$$(11) \qquad E = 2R \left(\frac{1}{1 - n - n'} \right) \tang^2 \tfrac{1}{2} u.$$

Mais l'on remarquera que cette formule présente dans la pratique le même inconvénient que celle (5) de l'art. **218**, et qu'il est impossible d'y remédier.

223. On voit par ce qui précède, de quelle manière on déterminera les élévations des sommets des signaux au-dessus d'un même horizon, du *niveau moyen* de l'Océan, par exemple : ainsi, en en retranchant les hauteurs des signaux, on aura celles du sol au-dessus de ce niveau (art. **33**).

En attendant que nous donnions un exemple de ce calcul, supposons que les points B, B', B'',..., $B^{(n)}$ soient inégalement élevés au-dessus d'une même surface de niveau, en sorte que h' soit l'élévation du point B' au-dessus du niveau de B; h'' l'élévation du point B'' au-dessus du niveau de B'; d''' la dépression du point B''', par rapport au niveau B'', et ainsi de suite; il est évident alors qu'on aura généralement pour la différence de niveau des deux points extrêmes, $h - d$, en prenant positivement les hauteurs $h' + h'' \ldots = h$, et négativement les dépressions $d''' + d^{\text{IV}} \ldots = d$ supposées observées de gauche à droite. Si la différence $h - d$ est affectée du signe $+$, le point extrême $B^{(n)}$ sera au-dessus du niveau de B; et si elle est affectée du signe $-$, le point $B^{(n)}$ sera au-dessus du même niveau.

Concluons de là, que si E est la hauteur du point B au-dessus du ni-

veau de la mer, $E + h - d$ sera la hauteur de tout autre point au-dessus de ce niveau.

Toute hauteur au-dessus de la mer se nomme *hauteur absolue*, et la différence de niveau de deux points s'appelle en général *hauteur relative*. Maintenant on est assez d'accord en Géodésie pour désigner sous le nom d'*altitude* la hauteur absolue d'un point; parce que cette troisième coordonnée réunie à la latitude et à la longitude de ce point a même désinence, et qu'elle achève d'en assigner la véritable position sur la Terre.

Divers calculs de différences de niveau.

224. Toutes choses étant égales, comme dans l'art. **216** où les distances zénithales sont réciproques et supposées avoir été observées simultanément, on demande la différence de niveau des sommets des deux signaux A et B (*fig.* 45). Cette différence est donnée par la formule exacte (4)

$$dE = \frac{K \sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\delta' \backsim \delta + C)},$$

et l'on a

$$\begin{array}{rr} \delta' = & 99^{\circ},959624 \\ \delta = & 100\ ,278767 \\ \hline \delta' - \delta = + & 0\ ,319143 \\ C = + & 0\ ,284105 \\ \hline \delta' - \delta + C = + & 0\ ,603248 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} \log K = & 4,4549171 \\ \mathrm{l.}\sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta) = - & 7,3990750 \\ \mathrm{c.\,l}\cos\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C) = + & 0,0000049 \\ \hline - & 1,8539970 \\ \text{Donc...}\ dE = - & 71^{m},449. \end{array}$$

Cherchons encore cette différence de niveau par la formule (4'), approchée,

$$dE = \frac{K \tan \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos \frac{1}{2} C}. \qquad (4')$$

$$\begin{array}{rl} \log K = & 4,4549171 \\ \mathrm{l.\ tang}\ \frac{1}{2}(\delta' - \delta) = & 7,3990778\ - \\ \mathrm{c.\ l.\ cos}\ \frac{1}{2} C = & 0,0000002 \\ \hline \log dE = & 1,8539951\ = -\ 71^{m},448. \end{array}$$

Ainsi, le point B est plus bas que le point A, de $71^m,45$. Nous aurions pu borner tout ce calcul à 5 décimales.

Si l'on ne connaissait que la distance au zénith δ, prise du point A, il faudrait recourir à la formule (6), ou à celle (6'). Dans ce dernier cas, et en supposant le coefficient n de la réfraction $= 0{,}08$, on aurait

$$dE = K \cot(\delta + 0{,}08\,C - 0{,}5\,C) = K \cot(\delta - 0{,}42\,C).$$

$\delta =$	$100^g,278767$	$\log K =$	$4,45492$
$-0,42\,C = -$	$0\ ,119322$	$-\text{l. tang}\ 15',9226 = -$	$7,39873$
$\delta - 0,42\,C = +$	$100,159445$	$dE = -$	$1.85365 = -71^m,39.$

En prenant le milieu entre ce second résultat et celui que donnerait l'autre distance zénithale, on retomberait sur le premier : ils seraient identiques, en employant la valeur de n déduite des deux distances zénithales δ, δ' (art. **216**). En général les observations réciproques annullent presque entièrement l'erreur provenant de la supposition d'égalité entre les réfractions aux deux stations comparées, erreur évidemment représentée par le très-petit terme $+ 2R \tang \frac{1}{2} C \tang \frac{1}{2}(\theta' - \theta)$, ou $+ \frac{1}{2} K(\theta' - \theta) \sin 1''$, que l'on trouve en mettant dans (4') au lieu de $(\delta' - \delta)$ la quantité $(\delta' + \theta' - \delta - \theta)$, art. **214**.

Au surplus, quand même les distances zénithales δ, δ' n'auraient pas été prises simultanément par deux observateurs, la différence de niveau des deux stations se déterminerait encore très-exactement, si des mesures barométriques et thermométriques avaient été recueillies en même temps que les distances zénithales; parce qu'on pourrait évaluer les réfractions θ, θ' correspondantes (art. **217**), et apprécier le terme précédent qui en dépend.

Parmi les observations réciproques et simultanées qui ont été faites sur le parallèle de Paris, pour trouver la différence de niveau entre le sommet du Panthéon et celui du clocher de Vélizy (*fig.* 1, *Pl. IX*) celles du 28 août 1819 sont (*Description géométrique de la France*, tome I, page 236) :

Au Panthéon, distance zénithale apparente réduite au sommet de la lanterne. . . . $\delta = 99^c,7886$;

A Vélizy, distance zénithale apparente réduite au sommet du clocher. . . . . . $\delta' = 100\ ,3228.$

L'arc de distance entre ces deux stations, ou $K = 13\,321$ mètres; de là $\log K = 4.1245368$, et à la latitude de Paris, $H = 48°50' = 54^{\circ},27$; ainsi, d'après la table IV, on a pour le logarithme de la normale, $\log N = 6.8054352$. Calculant l'angle au centre, $C = \frac{K}{N \sin 1''}$, on trouve $\log C = 1327'',3$. Évaluant ensuite la formule $(4')$ ci-dessus, il vient, à cause de $\delta' > \delta$,

$$\log dE = 1.7473333, \text{ de là } dE = -55^{m},89;$$

c'est-à-dire que le sommet du clocher de Vélizy est, par rapport au niveau de la mer, plus élevé que celui du Panthéon.

Le nivellement géodésique qui a été conduit de la sorte depuis Paris jusqu'à la mer à Cancale, a donné pour hauteur absolue du sommet de la lanterne du Panthéon $143^{m},84$, et pour celle du pavé de ce monument $60^{m},54$; d'où l'on conclut que l'altitude du sommet du clocher de Vélizy serait de $199^{m},73$ si l'on s'en tenait à la seule observation précédente; mais trois observations pareilles, faites à 1^{h} d'intervalle et composées, chacune, d'une série de 20 répétitions, ont donné, par un milieu, $199^{m},44$. Ce beau nivellement, qui a été exécuté en partie de jour et de nuit, ainsi que l'avait prescrit la Commission royale de la nouvelle carte de France présidée par M. Laplace, aurait offert un double intérêt si, conformément au désir que cet illustre géomètre avait exprimé, on y eût ajouté des observations météorologiques contemporaines; parce qu'elles se fussent trouvées dans des conditions très-favorables pour faire mieux apprécier les effets de réfraction sur les différences de niveau.

Dans le calcul d'un réseau trigonométrique, on a toujours soin de faire de fréquentes vérifications de tous les résultats qu'on obtient : par exemple, la différence de niveau des sommets des signaux érigés aux points A, B du triangle ABC (*fig.* 34), après avoir été déterminée directement par la distance AB, se vérifiera en passant par le point C, c'est-à-dire au moyen des deux différences de niveau des points A, C et des points C, B.

Voici, pour exemple, des hauteurs absolues qui ont été obtenues de la sorte, et qui se rapportent au triangle résolu à l'art. 150.

NOMS des stations.	DISTANCES ZÉNITH. réduites au point de mire.	LOG. DIST.	DIFFÉRENCE de niveau.	ALTITUDE du point de mire.	du sol.
Panthéon................ Saint-Martin-du-Tertre....	$\delta = 99^G 9345''3$ $\delta' = 100.2847,1$	4.46641	$dE =$ 80m5	143m8 224,3	60m5 200
Panthéon................ Dammartin (cloch. de la par.).	$\delta = 100.0221,0$ $\delta' = 100.2467,6$	4.52497	$dE =$ 59,1	143,8 202,9	60,5 173,3
Saint-Martin............. Dammartin..	$\delta = 100.1684,5$ $\delta' = 100.0529,2$	4.39821	$dE = -$ 22,7	224,7 202,0	200 172,4

Quand on emploie à cet effet des distances zénithales moyennes et réciproques, résultant d'observations faites dans les moments les plus convenables et avec un bon instrument, les limites des discordances sont tellement resserrées, que l'on peut répondre des différences de niveau à quelques décimètres près, dans les triangulations primaires, ainsi que le prouvent tous les registres géodésiques du Dépôt de la Guerre : alors, la recherche du coefficient de la réfraction terrestre perd un peu de son importance. Ce coefficient, assujetti à toutes les vicissitudes atmosphériques, varie tellement à certaines époques, pendant la présence du soleil, et surtout dans les lieux bas et humides, ou lorsque le rayon visuel rase une plaine sablonneuse fortement échauffée, qu'on ne saurait établir par aucune théorie mathématique des formules qui en donnent les valeurs exactes dans ces cas exceptionnels. Mais lorsque les circonstances météorologiques sont plus conformes à l'hypothèse admise par Laplace et d'autres géomètres, sur la constitution physique de l'atmosphère, il est avantageux, pour évaluer très-approximativement ce même coefficient, de procéder comme à l'art. **217**, et comme on le peut voir encore par ce qui suit.

225. Nous venons d'obtenir la différence de niveau de deux points d'où l'on a pu observer simultanément les distances zénithales réciproques : cherchons maintenant cette différence à l'aide d'une seule distance au zénith, mais accompagnée de mesures barométriques et thermométriques prises à la même station.

Le 7 juin 1812, vers 10 heures du matin, la distance zénithale du sommet du signal du mont d'Or, observée du Puy-de-Dôme, et réduite au sommet du signal de cette station, était..... $\delta = 99^{c}2188''$.

Alors barom. $h = 0^{m},64407$,
therm. du bar. $t' = +\ 17^{d}$ centigrades,
therm. libre $t = +\ 15$.

Le temps était superbe et le vent soufflait de l'est.

On calculera d'abord le coefficient n de la réfraction (art. **217**) et l'on aura

$$\begin{aligned}
\text{log. const.} &= 6.09909 \\
\text{c.}\log(1+\beta t) &= 9.97625 \\
\log \lambda &= 6.07534 = 0{,}00011894 \\
-\ \varepsilon &= 0{,}00002750 \\
\lambda - \varepsilon &= 0{,}00009144
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{log. const.} &= 3.09095 \\
\log h &= 9.80893 \\
\text{c.}\log(1+\beta t) &= 9.97625 \\
\text{c.}\log(1+\beta' t') &= 9.99866 \\
\log(\lambda - \varepsilon) &= 5.96114 \\
\log n &= 8{,}83593;\quad n = 0{,}068537 \\
\text{et } (0{,}5 - n) &= 0{,}431463.
\end{aligned}$$

Le log. de la distance K des deux sommités actuelles, déduit de la résolution des triangles du parallèle moyen, est $\log K = 4.4\,709\,248$, et celui de la normale au Puy-de-Dôme est $\log N = 6.8053388$; ainsi l'angle C des verticales, étant tiré de son expression $\frac{K}{N \sin 1''}$, on a

$$C = 2947'',6 \text{ centésimales.}$$

Il s'agit maintenant de calculer la différence de niveau des sommets des signaux du mont d'Or et du Puy-de-Dôme, et pour cela nous emploierons la formule

$$dE = \frac{K \cot \delta}{\cos \frac{1}{2} C} + (0{,}5 - n)\,\frac{K^2}{N \sin^2 \delta}.$$

1er terme.	2e terme.
$\log K = 4.4709248$	$\log(0,5-n) = 9.63474+$
$l.\cot\delta = 8.0889044+$	$2\log K = 8.94185$
$c.\log\cos\frac{1}{2}C = 0.0000012$	$c.\log N = 3.19466$
$2,5598304 = 362^m,94$	$c.\log\sin^2\delta = 0.00007$
$+\ 59\ ,06$	$1.77132 = 59^m,06.$
$dE = 422\ ,00$	

Par un grand nombre d'observations réciproques faites à ces deux stations, et à d'autres époques, cette différence de niveau s'est trouvée de 421^m; et ce n'est pas le seul exemple d'un accord aussi remarquable. (Voyez *Descrip. géomét. de la France*, tome II, Appendice.) Néanmoins il est toujours prudent de ne pas adopter sans vérification un résultat dont l'exactitude est trop dépendante de celle de la réfraction; ici ce phénomène a fait paraître le signal du mont d'Or à $9^m,39$ au-dessus de son lieu réel, puisque telle est la valeur du terme $n\,\frac{K^2}{N\sin^2\delta}$.

La question que nous venons de résoudre trouverait naturellement son application s'il fallait déterminer la différence de niveau ou les hauteurs absolues de deux points C, D (*fig.* 48), situés dans la plaine et visibles des stations élevées A, B, mais inaccessibles ou non visibles l'un de l'autre.

226. Il arrive souvent, dans la recherche des points trigonométriques, que l'on est obligé de connaître à fort peu près la différence de niveau de deux stations qui ne peuvent être aperçues l'une de l'autre, afin de savoir s'il est possible de remédier à cet inconvénient, en y érigeant des signaux d'une hauteur admissible et d'un prix modique. On choisit alors un point intermédiaire d'où les stations projetées soient aperçues, et l'on observe, avec un petit instrument propre aux reconnaissances, les deux distances zénithales d'après lesquelles on détermine par le second procédé de l'art. **224**, et en supposant $n = 0,08$, la différence de niveau des deux stations. Quelles que soient et l'erreur commise sur la constante de la réfraction, et celles qui peuvent affecter les distances horizontales du lieu de l'observation aux deux stations dont il s'agit, distances que l'on peut

prendre graphiquement sur une carte, on ne sera pas moins en état de juger, par le résultat du calcul, si le projet d'érection est possible ou non, ou s'il est suffisant de faire faire une percée dans le bois qui pourrait être l'obstacle intermédiaire, ou enfin s'il y a lieu d'espérer qu'à certaines époques, la réfraction élèvera assez le point de mire de l'une des stations par rapport à l'autre, pour que les observations puissent se faire sans beaucoup de frais.

Calcul de la hauteur d'un lieu d'où l'on voit l'horizon de la mer.

227. Du sommet B d'une montagne (*fig.* 47) on a observé l'angle de $100^G,3545$, entre l'horizon de la mer et le zénith; on demande la hauteur du centre de l'instrument au-dessus du niveau de la mer, ou sa *hauteur absolue*, en supposant le coefficient de la réfraction de 0,08. On a, d'après l'art. **222**,

$$E = \tfrac{1}{2} R (1 + n)^2 \operatorname{tang}^2 (\delta - 100^G),$$

$$\begin{array}{rlrl} \delta = & 100^G,3545 & \log 0,5 = & 9,69897 \\ & -100 & \log R = & 6,80532 \\ \text{Dépression apparente } u = & 0,3545 & \log (1,08)^2 = & 0,06685 \\ & & \log \operatorname{tang}^2 (\delta - 100) = & 5,49148 \\ & & \log E = & 2,06262 = 115^m,5 \end{array}$$

Donc le centre du cercle était élevé au-dessus de l'horizon de la mer, de $115^m,5$.

Pour que les hauteurs déterminées de cette manière s'accordassent aussi bien que possible avec celles obtenues par des mesures directes, il faudrait que des observations météorologiques, propres à constater l'état actuel de l'air, eussent été faites simultanément au sommet de la montagne et tout près du rivage de la mer, afin d'employer la formule (11) de l'art. **222**. Il faudrait en outre observer l'horizon de la mer lors des hautes et basses marées, afin que la moyenne des résultats se rapportât à la mer moyenne. Faute de procéder de la sorte, on est obligé d'adopter pour n une valeur purement hypothétique, et il ne serait pas impossible alors qu'il y eût une incertitude de 10 à 12 mètres sur une grande hauteur calculée d'après une observation de l'horizon de la mer prise isolément (*Base du Système métrique*, tome II, page 759), surtout si cet horizon n'était pas bien tranché.

228. Supposons maintenant que l'on ait déterminé, par les méthodes des articles précédents, la différence de niveau entre le sommet B de la montagne dont il s'agit, et un point quelconque P; ensuite la différence de niveau des points P, P′, puis des points P′, P″, et ainsi de suite; de manière, par exemple, que la différence de niveau

entre B et P......... $= + 22^{m},6$
entre P et P′....................... $= - 68^{m},4$
entre P′ et P″...................... $= - 27\ ,1$
entre P″ et P‴........ $= + 40^{m},8$
entre P‴ et P⁗....... $= + 12\ ,0$
on aura (art. **223**) $+ h = + \overline{75\ ,4}$; $- d = - \overline{95\ ,5}$;

par conséquent la hauteur du point P⁗ au-dessus du niveau de la mer sera, suivant la remarque de l'art. cité,

$$E + h - d = 115^{m},3 + 75^{m},4 - 95^{m},5 = 95^{m},2.$$

C'est ainsi que Delambre a fait le nivellement géodésique d'une centaine de points de la méridienne de France, depuis l'Océan jusqu'à la Méditerranée. Il est très-remarquable que cette opération, qui n'était que secondaire, et dans laquelle on s'est abstenu d'employer tous les moyens qui pouvaient la rendre plus précise, s'est trouvée d'accord avec le beau nivellement de la chaîne des Pyrénées, que MM. Coraboeuf et Peytier, ex-ingénieurs géographes du Dépôt de la Guerre, entreprirent en 1825, et duquel il résulte que les niveaux des deux mers n'ont entre eux aucune différence sensible. Les hauteurs absolues de tous ces points sont, dans la *Méridienne* de Delambre, comptées à partir de la laisse de basse mer; il faudrait les diminuer de $0^{t},97$ pour les rapporter au niveau de la mer moyenne (art. **144**).

Si, en faisant la triangulation d'un pays, l'on ne pouvait se procurer, par des mesures géométriques, la hauteur absolue d'aucune station, il faudrait alors recourir à l'usage du baromètre. Nous parlerons des mesures barométriques, dans la seconde partie de cet ouvrage.

Les hauteurs des objets au-dessus d'un plan de comparaison sont principalement utiles pour former le relief d'une carte topographique.

DEUXIÈME HYPOTHÈSE.

La Terre étant un ellipsoïde de révolution.

229. On pourrait craindre que les conséquences déduites de la théorie précédente, dans laquelle nous avons fait abstraction de la figure ellipsoïdale de la Terre, ne fussent pas assez exactes dans la pratique. Pour dissiper tous les doutes à cet égard, nous allons envisager la question sous son véritable point de vue.

En considérant la Terre comme un ellipsoïde de révolution, la différence de niveau de deux points, l'un étant sur sa surface, est mesurée par la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'autre point sur cette surface. Par les opérations géodésiques, on obtient leur plus courte distance au niveau des mers, ainsi que leurs positions géographiques : alors la corde de cette plus courte distance et la hauteur cherchée sont les deux côtés d'un triangle rectiligne donné de position, et dans lequel on peut connaître en outre, par l'observation, l'angle que le troisième côté fait avec la hauteur ou la verticale dont il s'agit. Relativement à la sphère, ce triangle serait invariable, toutes choses égales d'ailleurs, quelque part qu'il fût situé et quelque direction qu'il eût; mais il n'en est pas de même à l'égard du sphéroïde.

230. Il résulte de la théorie exposée à l'art. **167**, que si M et M' (*fig.* 40) sont les extrémités d'une ligne géodésique K ayant pour latitudes H, H', et que ρ, ρ' soient les longueurs des normales MN, M'N' comprises entre ces points et ceux où elles rencontrent l'axe de rotation, l'on a

$$\rho = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}, \quad \rho' = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous avons vu en outre à l'art. **189**, que la différence de ces deux normales est du second ordre. Cherchons, par un procédé analogue, la différence de la normale ρ du point M à l'oblique $M'N = \rho_1$ du point M', parce qu'elle nous sera utile.

D'abord, en vertu du triangle NM'N', et de ce que l'angle

$NM'N' = \psi$, on a

$$\rho_1 = \frac{\rho' \cos H'}{\cos(H' + \psi)} = \frac{\rho'}{\cos\psi\,(1 - \operatorname{tang}\psi \operatorname{tang} H')}$$
$$= \rho' \operatorname{séc}\psi\,(1 + \operatorname{tang}\psi \operatorname{tang} H' + \ldots);$$

ou, à cause de la petitesse de ψ,

$$\rho_1 = \rho'(1 + \operatorname{tang}\psi \operatorname{tang} H')$$
$$= a\left[\left(1 + \tfrac{1}{2}e^2 \sin^2 H' + \tfrac{3}{8}e^4 \sin^4 H' \ldots\right)\right](1 + \operatorname{tang}\psi \operatorname{tang} H'),$$

ou encore

$$\rho_1 = a \left\{ \begin{array}{l} 1 + \tfrac{1}{2}e^2 \sin^2 H' + \tfrac{3}{8}e^4 \sin^4 H' + \operatorname{tang}\psi \operatorname{tang} H') \\ + \tfrac{1}{2}e^2 \sin^2 H' \operatorname{tang}\psi \operatorname{tang} H' \end{array} \right\}.$$

D'un autre côté, le théorème de Maclaurin donne

$$\rho = f(\Delta H) = \rho' + \left(\frac{d\rho}{dH}\right)\Delta H + \left(\frac{d^2\rho}{dH^2}\right)\frac{\Delta H^2}{2} + \ldots;$$

et puisque

$$\rho = a\left[1 + \tfrac{1}{2}e^2 \sin^2 H + \tfrac{3}{8}e^4 \sin^4 H + \ldots\right],$$

on a

$$\left(\frac{dH}{d\rho}\right) = a\left[e^2 \sin H' \cos H' + \tfrac{3}{2}e^4 \sin^3 H' \cos H'\right],$$
$$\left(\frac{dH^2}{d^2\rho}\right) = a\left[e^2 \cos^2 H' - e^2 \sin^2 H'\right];$$

par suite,

$$\rho = a\left[1 + \tfrac{1}{2}e^2 \sin^2 H' + \tfrac{3}{8}e^4 \sin^4 H' \ldots\right]$$
$$+ a e^2 \sin H' \cos H'.\Delta H + a\frac{e^2}{2}\cos^2 H'.\Delta H^2$$
$$+ \tfrac{3}{2}ae^4 \sin^3 H' \cos H'.\Delta H - a\frac{e^2}{2}\sin^2 H'.\Delta H^2;$$

et par conséquent

$$\rho - \rho_1 = a \left\{ \begin{array}{l} e^2 \sin H' \cos H'.\Delta H + \frac{e^2}{2}\cos^2 H'.\Delta H^2 \\ - \frac{e^2}{2}\sin^2 H'.\Delta H^2 - \operatorname{tang}\psi \operatorname{tang} H' \\ + \tfrac{3}{2}e^4 \sin^3 H' \cos H'.\Delta H \\ - \tfrac{1}{2}e^2 \sin^2 H' \operatorname{tang}\psi \operatorname{tang} H' \end{array} \right\};$$

d'ailleurs, par l'art. **193**, et à cause de $\tang\psi = \frac{NN'\cos H'}{\rho'}$, du moins à très-peu près, on a en fonction de H',

$$\tang\psi\tang H' = e^2\sin H'\cos H'.\Delta H - \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 H'.\Delta H^2 + e^4\sin^3 H'\cos H'.\Delta H;$$

ainsi, définitivement,

$$\begin{aligned}\rho - \rho_1 &= a\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}e^2\cos^2 H'.\Delta H^2 + \tfrac{3}{2}e^4\sin^3 H'\cos H'.\Delta H \\ - e^4\sin^3 H'\cos H'.\Delta H - \tfrac{1}{2}e^4\sin^3 H'\cos H'.\Delta H\end{array}\right\} \\ &= \tfrac{1}{4}ae^2\cos^2 H'.\Delta H^2 = \mu;\end{aligned}$$

expression exacte aux quantités près du quatrième ordre, et qui, en mettant pour $\Delta H = H - H'$ sa valeur approchée (art. **192**), devient

$$\rho - \rho_1 = \mu = \tfrac{1}{2}ae^2\frac{K^2}{\varsigma^2}\cos^2 H'.\cos^2 Z = \tfrac{1}{2}e^2\frac{K^2}{\varsigma}\cos^2 H'\cos^2 Z.$$

Si l'on avait $K = 60000^m$, il s'ensuivrait que $\mu = 0^m,3\cos^2 H'\cos^2 Z$; il est donc tout-à-fait inutile de tenir compte des termes négligés.

231. Problème i. *Déterminer la réfraction terrestre par deux distances zénithales réciproques.*

Au point M (*fig.* 49), on a pris la distance zénithale δ du point M', et à celui-ci on a observé au même moment la distance zénithale δ' du point M; on demande le coefficient de la réfraction.

Nous supposerons toujours que la trajectoire MM', décrite par un rayon lumineux, a très-peu d'étendue, et qu'elle se confond sensiblement avec son cercle osculateur; ainsi, les réfractions aux points M, M' sont égales (art. **214**). Si donc un de ces angles est désigné par θ, les distances zénithales vraies seront $\delta + \theta$, $\delta' + \theta$. Ces deux distances zénithales n'étant pas en général situées dans un même plan, rien ne les lie entre elles; mais soit $\delta_1 + \theta$ l'angle $MM'V_1$ formé par la corde MM' et l'oblique $NM'V_1$; alors dans le triangle rectiligne NM'M on aura évidemment, en faisant MNM' = C,

$$\delta + \theta + \delta_1 + \theta = 200^\circ + C,$$

d'où

$$\theta = 100^g + \frac{C}{2} - \left(\frac{\delta + \delta_1}{2}\right);\quad \text{de là}\quad \delta + \theta = 100 + \frac{C}{2} + \left(\frac{\delta - \delta_1}{2}\right).$$

Reste à trouver la relation qui existe entre $\delta_1 + \theta$ et $\delta' + \theta$; car δ_1 n'ayant pu être observé, il faut éliminer cette distance zénithale auxiliaire de la valeur précédente de θ.

Pour cet effet, on remarquera que dans le triangle sphérique *mnn'* (*fig.* 50), on a (z' étant l'azimut de M sur l'horizon de M', compté du nord vers l'est),

$$\cos(\delta_1 + \theta) = \cos\psi \cos(\delta' + \theta) + \sin\psi \sin(\delta' + \theta) \cos z',$$

ou, en supposant $\cos\psi = 1$,

$$\begin{aligned}\cos(\delta_1 + \theta) - \cos(\delta' + \theta) &= \sin\psi \sin(\delta' + \theta) \cos z' \\ &= 2 \sin\left(\frac{\delta_1 + \delta'}{2} + \theta\right) \sin\left(\frac{\delta' - \delta_1}{2}\right);\end{aligned}$$

or, δ_1 et δ' devant différer très-peu l'une de l'autre, on a, par une première approximation,

$$\sin\psi \sin(\delta' + \theta) \cos z' = \sin(\delta' + \theta) \sin(\delta' - \delta_1),$$

et même

$$\delta' - \delta_1 = \psi \cos z', \qquad \text{ou} \qquad \delta_1 = \delta' - \psi \cos z'.$$

Substituant cette valeur dans l'avant-dernière équation ci-dessus, on aura plus exactement

$$\sin\psi \sin(\delta' + \theta) \cos z' = 2 \sin\left(\delta' + \theta - \frac{\psi}{2}\cos z'\right) \sin\left(\frac{\delta' - \delta_1}{2}\right),$$

et par suite

$$\begin{aligned}\delta' - \delta_1 &= \frac{\psi \cos z' \sin(\delta' + \theta)}{\sin(\delta' + \theta)\left[1 - \frac{\psi}{2}\cos z' \cot(\delta' + \theta)\right]} \\ &= \psi \cos z' \left[1 + \frac{\psi}{2}\cos z' \cot(\delta' + \theta)\right] \\ &= \psi \cos z' + \tfrac{1}{2}\psi^2 \cos^2 z' \cot(\delta' + \theta);\end{aligned}$$

mais comme nous sommes convenus de négliger les quantités du quatrième ordre, nous aurons seulement

$$\delta' - \delta_1 = \psi \cos z' = \varphi;$$

partant,

$$(7) \qquad \theta = 100^g + \frac{C}{2} - \left(\frac{\delta + \delta' - \varphi}{2}\right):$$

d'ailleurs on a, par la théorie développée à l'art. **192**,

$$z' = Z - u \sin Z \operatorname{tang} H;$$

de là

$$\cos z' = \cos Z + u \sin^2 Z \operatorname{tang} H,$$

et

$$\varphi = \psi \cos z' = e^2 \cos^2 H' \cos^2 Z . \frac{K}{\rho \sin 1''}$$

$$+ e^2 \cos^2 H' \cos Z \sin^2 Z \operatorname{tang} H . \frac{K^2}{\rho^2 \sin 1''}$$

$$= e^2 \cos^2 H' \cos^2 Z . \frac{K}{\rho \sin 1''}$$

$$+ \frac{e^2}{4} \sin 2H' \sin 2Z \sin Z . \frac{K^2}{\rho^2 \sin 1''};$$

le second terme, qui est du troisième ordre, est tout-à-fait insensible.

Quelle que soit la nature de la trajectoire MM', cette courbe peut toujours, dans la pratique de la Géodésie, être, comme nous l'avons déjà dit, remplacée par son cercle osculateur; et alors il est évident que, dans les mêmes circonstances météorologiques, la réfraction terrestre est proportionnelle à l'angle C: on a donc, comme à l'art. **214**,

$$(7') \qquad \theta = nC.$$

Tenir compte du terme φ dans la formule précédente, c'est supposer que les observations de distances zénithales sont très-exactes, que la réfraction n'a pas varié pendant ces observations, et que la Terre est effectivement un ellipsoïde de révolution; mais rien de tout cela n'est parfaitement prouvé.

L'angle C est nécessairement déterminé, si l'on connaît sur le globe

la position des deux stations M, M′ (*fig.* 49). Or, par la résolution des triangles d'un réseau, l'on obtient l'arc de distance bm'', ou la corde $bm'' = K$ du sphéroïde, comprise entre les verticales VN, V′N′; et il est évident que cette corde diffère, dans tous les cas, extrêmement peu de la droite bm' correspondante, puisque dans le triangle rectiligne $bm'm''$, le côté $m'm''$ opposé à l'angle ψ de 5″ sexagésimales au plus, est extrêmement petit, et même absolument insensible, à cause du peu d'élévation du point M′ au-dessus de m'' ou du niveau des mers. En effet, en supposant $m''M'$ de 2000^m, $m'm''$ ne vaudrait que $0^m,048$; ainsi nous considérerons à l'avenir bm'' comme égal à bm'.

On a remarqué d'ailleurs que $\rho - \rho_1 = \mu$ est une quantité du troisième ordre; d'où l'on peut inférer que si $m'''N = mN$ (*fig.* 51), on a aussi à très-peu près mm''' ou $K_1 = K$: c'est au surplus ce que prouve le calcul suivant.

On a d'une part

$$K_1^2 = 2\rho - 2\rho^2 \cos C = 4\rho^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C;$$

d'où

$$K_1 = 2\rho \sin \tfrac{1}{2} C;$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} K^2 &= \rho^2 + (\rho - \mu)^2 - 2\rho(\rho - \mu)\cos C \\ &= \mu^2 + 4\rho^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C - 4\rho\mu \sin^2 \tfrac{1}{2} C \\ &= 4\rho^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C \left[1 + \frac{\mu^2 - 4\rho\mu \sin^2 \frac{1}{2} C}{4\rho^2 \sin^2 \frac{1}{2} C}\right]; \end{aligned}$$

et de là

$$K = 2\rho \sin \tfrac{1}{2} C + \frac{\mu^2}{4\rho \sin \frac{1}{2} C} - \mu \sin \tfrac{1}{2} C.$$

Cette dernière expression de K, dans laquelle $\sin \frac{1}{2} C$ est une quantité du premier ordre, peut se réduire à son premier terme, c'est-à-dire à $K = 2\rho \sin \frac{1}{2} C$, puisque la fraction $\frac{\mu^2}{4\rho \sin \frac{1}{2} C}$, qui renferme la normale ρ au dénominateur, est de beaucoup inférieure au terme du quatrième ordre $\mu \sin \frac{1}{2} C$. L'angle C sera donc assez exactement connu par l'équation $\sin \frac{1}{2} C = \frac{K}{2\rho}$, ou $\sin \frac{1}{2} C = \frac{K}{2\rho'}$, puisque ρ et ρ' ne diffèrent que d'une quantité du second ordre.

232. Problème ii. *Déterminer la différence de niveau de deux points, par le moyen de deux distances zénithales réciproques.*

Admettons la même notation que précédemment; supposons de plus, que *bm'* (*fig.* 49) soit la corde du sphéroïde qui mesure la distance rectiligne des deux stations M, M'; menons *mm'* parallèle à MM', et désignons par dE la différence de niveau *bm* des deux points *m*, *m'*. Cela posé, on tirera du triangle *m*N*m'* la proportion suivante :

$$\sin(\delta+\theta) : \rho_1 :: \sin(\delta_1+\theta) : \rho + dE,$$

d'où
$$dE = \frac{\rho_1 \sin(\delta_1+\theta) - \rho\sin(\delta+\theta)}{\sin(\delta+\theta)};$$

mais $\rho = \rho_1 + \mu$, et $\delta + \theta = 100^g + \frac{C}{2} + \frac{\delta-\delta_1}{2}$; par conséquent

$$dE = \frac{\rho_1[\sin(\delta_1+\theta) - \sin(\delta+\theta)]}{\sin(\delta+\theta)} - \mu$$
$$= \frac{2\rho_1 \cos\left(\frac{\delta_1+\delta}{2}+\theta\right)\sin\left(\frac{\delta_1-\delta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\delta-\delta_1}{2}+\frac{C}{2}\right)} - \mu.$$

De plus, à cause de $\delta_1 + \theta + \delta + \theta = 200^g + C$, on a

$$\frac{\delta_1+\delta}{2} + \theta = 100^g + \frac{C}{2};$$

par suite,

$$dE = \frac{2\rho_1 \sin\frac{1}{2}C \sin\left(\frac{\delta-\delta_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\delta-\delta_1}{2}\right)\cos\frac{C}{2}\left[1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}C\operatorname{tang}\left(\frac{\delta-\delta_1}{2}\right)\right]} - \mu$$

$$= K \operatorname{séc}\tfrac{1}{2}C \operatorname{tang}\left(\frac{\delta-\delta_1}{2}\right) + K\operatorname{séc}\tfrac{1}{2}C\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C\operatorname{tang}^2\left(\frac{\delta-\delta_1}{2}\right) - \mu;$$

d'ailleurs

$$\delta_1 = \delta' - \psi\cos z',$$

par conséquent

$$dE = K\ \text{séc}\ \tfrac{1}{2}C\ \text{tang}\left(\frac{\delta-\delta_1}{2} + \frac{\psi}{2}\cos z'\right) +$$
$$+ K\ \text{séc}\ \tfrac{1}{2}C\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}C\ \text{tang}^2\left(\frac{\delta-\delta'}{2} + \frac{\psi}{2}\cos z'\right) - \mu$$
$$= K\ \text{séc}\ \tfrac{1}{2}C\left[\frac{\text{tang}\left(\frac{\delta-\delta'_1}{2}\right) + \frac{1}{2}\text{tang}\,\psi\cos z'}{1 - \frac{1}{2}\text{tang}\,\psi\cos z'\,\text{tang}\left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right)}\right]$$
$$+ K\ \text{séc}\ \tfrac{1}{2}C\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}C\ \text{tang}^2\left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right) - \mu$$

$$= K\ \text{séc}\ \tfrac{1}{2}C\left[\text{tang}\left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\text{tang}\,\psi\cos z'\,\text{séc}^2\left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right)\right] + \text{etc.}$$
$$= K\ \text{séc}\ \tfrac{1}{2}C\ \text{tang}\left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right) + K\ \text{séc}\ \tfrac{1}{2}C\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}C\ \text{tang}^2\left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right)$$
$$+ \frac{K}{2}\text{tang}\,\psi\cos z' - \mu;$$

car $\text{séc}^2\left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right)$ et $\text{séc}\ \frac{1}{2}C$ diffèrent l'une et l'autre très-peu de l'unité.

Cette valeur de dN, dans laquelle δ est supposée plus grande que δ', doit être prise positivement, lorsqu'on nivelle de M′ en M, et négativement lorsqu'on nivelle de M en M′, c'est-à-dire quand on va du nord vers le sud; dans ce second cas,

$$dE = K\ \text{séc}\ \tfrac{1}{2}C\ \text{tang}\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right) - K\ \text{séc}\ \tfrac{1}{2}C\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}C\ \text{tang}^2\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right)$$
$$- \frac{K}{2}\text{tang}\,\psi\cos z' + \mu.$$

Les deux derniers termes de cette valeur de dE se détruisent mutuellement; en effet, à cause de

$$\text{tang}\,\psi = e^2\cos^2 H'.\Delta H = e^2\cos^2 H'.\frac{K}{\rho}\cos Z,$$

on a

$$\frac{K}{2}\text{tang}\,\psi\cos z' = \tfrac{1}{2}e^2\cos^2 H'.\frac{K^2}{\rho}\cos^2 Z;$$

d'ailleurs

$$(8) \qquad \mu = \tfrac{1}{2} ae^2 \frac{K^2}{\rho^2} \cos^2 H' \cos^2 Z = \tfrac{1}{2} e^2 \cos^2 H' . \frac{K^2}{\rho} \cos^2 Z;$$

ainsi l'on a seulement

$$(9) \quad dE = K \text{ séc } \tfrac{1}{2} C \text{ tang} \left(\frac{\delta' - \delta}{2}\right) - K \text{ séc } \tfrac{1}{2} C \text{ tang } \tfrac{1}{2} C \text{ tang}^2 \left(\frac{\delta' - \delta}{2}\right).$$

Dans la pratique, on aura égard au signe de la tangente, ce qui rendra les deux termes négatifs si $\delta > \delta'$.

Il suit de là que la différence de niveau sur le sphéroïde, déterminée à l'aide de deux distances zénithales réciproques, s'obtient comme sur une sphère dont le rayon serait égal à la normale ρ. Cependant la vraie différence de niveau cherchée est BM au lieu de bm; mais il n'est pas difficile de voir que puisque ces deux hauteurs sont proportionnelles aux lignes NB, Nb, la différence BM — bm est très-souvent insensible dans la pratique et bien au-dessous des erreurs qui affectent les observations.

Il est à remarquer que la valeur ci-dessus de dE ne doit être en erreur que de celle résultant de la moitié de la différence qui pourrait exister entre les réfractions aux points M et M' (art. 224).

233. Problème iii. *Calculer la différence de niveau de deux points, à l'aide d'une seule distance zénithale.*

Supposons d'abord que le lieu M (*fig.* 49) le plus boréal soit celui d'où l'on a observé la distance zénithale δ du point M'; on demande la différence de niveau BM ou bm, toutes choses d'ailleurs étant comme dans le problème précédent.

Le triangle mNm' donne

$$dE = \frac{\rho_1 \sin(\delta + \theta - C) - \rho \sin(\delta + \theta)}{\sin(\delta + \theta)};$$

ou bien, à cause de $\rho = \rho_1 + \mu$,

$$dE = \frac{\rho_1[\sin(\delta+\theta-C)-\sin(\delta+\theta)]}{\sin(\delta+\theta)} - \mu$$

$$= \frac{-2\rho_1\cos\left(\delta+\theta-\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}}{\sin\left(\delta+\theta-\frac{C}{2}+\frac{C}{2}\right)} - \mu$$

$$= \frac{-K\cot\left(\delta+\theta-\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{1}{2}C\left[1+\tang\frac{1}{2}C\cot\left(\delta+\theta-\frac{C}{2}\right)\right]} - \mu$$

$$= -K\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}C\cot\left(\delta+\theta-\frac{C}{2}\right)$$

$$+ K\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}C\,\tang\,\tfrac{1}{2}C\cot^2\left(\delta+\theta-\frac{C}{2}\right) - \mu;$$

ou, changeant le signe cette valeur, puisqu'on nivelle du nord vers le sud, et que δ est obtus dans la figure,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} dE &= K\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}C\cot\left(\delta+\theta-\frac{C}{2}\right)\\ &- K\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}C\,\tang\,\tfrac{1}{2}C\cot^2\left(\delta+\theta-\frac{C}{2}\right)+\mu. \end{aligned}\right.$$

On aura, dans l'un comme dans l'autre cas, égard au signe de la cotangente.

Le terme μ n'est pas détruit comme dans la question précédente; mais il n'y aurait aucun inconvénient à le négliger, car il est du troisième ordre, et le plus souvent en deçà des limites des erreurs d'observation : d'ailleurs l'erreur de l'hypothèse à faire dans ce cas sur le coefficient de la réfraction, faute de mesures météorologiques, l'emportera souvent sur la valeur de ce terme.

On déduit, comme conséquence de cette formule, celle (9) dépendante de deux distances zénithales, et cela en remarquant que

$$\delta+\theta-\frac{C}{2} = 1^q + \left(\frac{\delta-\delta_1}{2}\right),\quad \delta_1 = \delta' - \psi\cos z',$$
$$\tfrac{1}{2}K\tang\psi\cos z' - \mu = 0.$$

Supposons, en second lieu, que l'on connaisse seulement la distance zénithale δ' observée du point M'; il est aisé de voir que l'on aura, en nivelant du nord au sud,

$$(11)\left\{\begin{aligned} dE = &-K\,\text{séc}\tfrac{1}{2}C\cot\left(\delta'+\theta-\frac{C}{2}\right)\\ &-K\,\text{séc}\tfrac{1}{2}C\,\text{tang}\tfrac{1}{2}C\cot^2\left(\delta'+\theta-\frac{C}{2}\right)-\mu.\end{aligned}\right.$$

Concluons de là, que la formule pour déterminer, sur le sphéroïde, la différence de niveau de deux points par une seule distance zénithale, est dépendante de l'aplatissement, soit qu'on nivelle du nord vers le sud, soit qu'on nivelle en sens opposé. Delambre a déduit de ses calculs une conséquence toute contraire et évidemment paradoxale, pag. 746 et 749 du tome II de la *Base du Système métrique décimal;* mais il est aisé de voir que c'est par une légère inadvertance. On remarquera en outre que le signe du terme μ qui contient l'aplatissement, dépend de l'espèce de l'angle observé. A cet égard, on peut établir pour règle générale, 1° que si la distance zénithale observée est $> 100^g$, le terme μ est de signe contraire à celui du premier terme de la valeur de dE; 2° que si cette distance zénithale est $< 100^g$, ces deux termes ont le même signe.

Des deux formules (10) et (11), dans lesquelles on négligerait la réfraction θ, la première relative à $\delta > 100^g$ donnerait évidemment une hauteur dE trop faible de toute la quantité due à cette réfraction, dans l'hypothèse que la densité de l'air décroît à mesure qu'on s'élève; et la deuxième, relative à $\delta' < 100^g$, donnerait une hauteur dE' trop grande de la même quantité; ainsi la demi-différence de ces deux valeurs est précisément la correction à faire à l'une des hauteurs calculées. Or, soit $\Delta h = \frac{1}{2}(dE' + dE)$ cette correction; comme elle sera donnée en mètres, on l'obtiendra en secondes par la formule suivante

$$(12)\qquad \theta = \frac{\Delta h}{K \sin 1''},$$

K étant la distance des deux points M, M'. C'est là une des méthodes que Méchain employait pour déterminer la réfraction terrestre.

234. Problème iv. *Déterminer la hauteur d'un lieu d'où l'on voit l'horizon de la mer.*

Examinons, comme dans le problème précédent, les deux cas qui peuvent se présenter. Pour cela, supposons que la station M soit boréale par rapport au point de l'horizon observé M' (*fig.* 52), point dont la distance zénithale apparente est δ; alors la hauteur cherchée E sera représentée par AM, et le triangle rectiligne MNM' donnera, à cause que l'angle $\text{MM}'\text{V}_1 = 100^g - \psi \cos z' = 100^g - \varphi$,

$$\begin{aligned} \text{E} &= \frac{\rho_1[\cos\varphi - \cos(\varphi + \text{C})]}{\cos(\theta + \text{C})} - \mu \\ &= \frac{\rho_1[\cos\varphi(1 - \cos\text{C}) + \sin\varphi\sin\text{C}]}{\cos\varphi\cos\text{C}[1 - \text{tang}\varphi\,\text{tang}\,\text{C}]} - \mu \\ &= \rho_1\left[\frac{1 - \cos\text{C}}{\cos\text{C}}(1 + \text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\text{C}) + \text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\text{C}\right] - \mu, \end{aligned}$$

ou simplement, à cause de la petitesse des angles C et φ,

$$\begin{aligned} \text{E} &= \rho_1\left[\frac{1 - \cos\text{C}}{\cos\text{C}} + \text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\text{C}\right] - \mu \\ &= \rho_1\left[\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\text{C}}{\cos^2\frac{1}{2}\text{C} - \sin^2\frac{1}{2}\text{C}} + \text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\text{C}\right] - \mu \\ &= \frac{2\rho_1\,\text{tang}^2\frac{1}{2}\text{C}}{1 - \text{tang}^2\frac{1}{2}\text{C}} + \rho_1\,\text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\text{C} - \mu \\ &= \tfrac{1}{2}\rho_1\,\text{tang}^2\,\text{C} + \rho_1\,\text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\text{C} - \mu; \end{aligned}$$

mais dans le triangle dont il s'agit, $\delta + \theta = 100^g + \varphi + \text{C}$, ou

$$\delta + n\text{C} = 100^g + \varphi + \text{C},\ \text{d'où}\ \text{C} = \frac{\delta - 100 - \varphi}{1 - n};$$

ainsi

$$\begin{aligned} \text{E} &= \tfrac{1}{2}\rho_1\,\text{tang}^2\left(\frac{\delta - 100 - \varphi}{1 - n}\right) + \rho_1\,\text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\left(\frac{\delta - 100}{1 - n}\right) - \mu \\ &= \tfrac{1}{2}\rho_1\,\text{tang}^2\left(\frac{\delta - 100}{1 - n}\right) - \rho_1\,\text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\frac{(\delta - 100)}{(1 - n)^2} \\ &\qquad + \rho_1\,\text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\left(\frac{\delta - 100}{n - 1}\right) - \mu. \end{aligned}$$

La valeur moyenne du coefficient n de la réfraction étant seulement de 0,08 environ, il s'ensuit que le deuxième et le troisième terme de cette valeur se détruisent sensiblement; ainsi l'on a seulement

$$(13) \qquad E = \tfrac{1}{2}\rho_1 \operatorname{tang}^2 \frac{(\delta - 100^g)}{(1-n)^2} - \mu;$$

et si l'on mettait ρ au lieu de ρ_1, l'on ne négligerait encore que des quantités absolument insensibles dans la pratique.

Le cas où le lieu de l'observation est au sud, c'est-à-dire en M' (*fig.* 53), se traite de la même manière. Soit alors δ' la distance zénithale observée; l'angle auxiliaire $MM'V_1$ sera $\delta_1 + \theta$, et la hauteur cherchée N sera A'M' ou A''M'. De plus le triangle MM'N donnera

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho - \rho_1 \cos C}{\cos C} = \frac{\rho(1-\cos C)}{\cos C} + \mu \\ &= \frac{2\rho \sin^2 \frac{1}{2}C}{\cos^2\frac{1}{2}C(1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}C)} + \mu = 2\rho \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}C + \mu \\ &= \frac{\rho}{2}\operatorname{tang}^2 C + \mu; \end{aligned}$$

et comme $\delta_1 + \theta = 100^g + C$, ou $\delta_1 + nC = 100 + C$, d'où

$$C = \frac{\delta_1 - 100}{1-n} = \frac{\delta' - 100 - \varphi}{1-n},$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} E = \frac{\rho}{2}\frac{\operatorname{tang}^2(\delta' - 100 - \varphi)}{(1-n)^2} + \mu = \tfrac{1}{2}\rho \frac{\operatorname{tang}^2(\delta'-100)}{(1-n)^2} \\ - \rho \operatorname{tang}\varphi \frac{\operatorname{tang}(\delta' - 100)}{(1-n)^2} + \mu, \end{aligned}$$

ou seulement

$$E = \frac{\rho}{2}\frac{\operatorname{tang}^2(\delta'-100)}{(1-n)^2} - \rho \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}(\delta' - 100) + \mu.$$

Mais la petitesse de l'angle C permet de faire

$$\begin{aligned} \rho \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}(\delta' - 100) = \rho \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang} C = 2\rho \sin\tfrac{1}{2}C \operatorname{tang}\varphi \\ = K \operatorname{tang}\psi \cos z' = 2\mu; \end{aligned}$$

ainsi définitivement

$$(13') \qquad E = \frac{\rho}{2}\frac{\tan^2(\delta' - 100^g)}{(1-n)^2} - \mu;$$

formule qui est la même que la précédente, parce que la différence de ρ à ρ_1 peut, comme nous l'avons déjà dit, être considérée comme nulle.

A la rigueur, les distances zénithales apparentes δ, δ', prises au même moment au point M, l'une vers le sud, l'autre vers le nord, ne doivent pas, en général, être les mêmes sur le sphéroïde; mais leur différence est si petite qu'elle échappe nécessairement aux observations: ainsi les termes du quatrième ordre, rejetés des formules (13) et (13'), et de toutes celles qui précèdent, sont très-inutiles.

233. Il résulte de cette analyse, 1° que les formules pour calculer les différences de niveau sur le sphéroïde de révolution, sont les mêmes dans tous les sens du nivellement; 2° que ces formules ne renferment plus les termes dépendants de l'aplatissement de la Terre, si l'on y introduit deux distances zénithales réciproques; ou bien si, en ne faisant usage que d'une seule distance, on opère dans le sens des parallèles; 3° enfin, que la correction d'aplatissement, lorsqu'elle paraît nécessaire, étant presque toujours au-dessous des erreurs des observations, le nivellement trigonométrique peut, dans tous les cas, être considéré comme ayant lieu sur une sphère dont le rayon est égal à la normale comprise entre le point d'où l'on observe et l'axe de rotation de la Terre.

Il paraîtrait cependant convenable d'introduire dans les formules précédentes, au lieu de la normale dont il s'agit, le rayon de courbure de la ligne géodésique K obtenu à l'art. **187**. Si l'on prenait ce parti, on aurait

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{K(\rho'\cos^2 Z + \rho\sin^2 Z)}{2\rho\rho'} = \frac{K}{2\rho} - \frac{K(\rho'-\rho)}{2\rho\rho'}\sin^2 Z;$$

ρ, ρ' et Z ayant ici les mêmes significations qu'aux art. **187** et **192**: mais, après tout, ce serait compliquer le calcul sans avoir l'espérance de parvenir à de meilleurs résultats; puisqu'il existera toujours, quoi

qu'on fasse, une petite incertitude sur les distances zénithales employées comme éléments des différences de niveau.

Explication de nouvelles Tables servant à abréger le calcul des différences de niveau.

236. Parmi les nivellements trigonométriques de premier ordre, dont on est redevable à l'ex-corps des Ingénieurs-Géographes français, il en est un (art. **228**) qui a eu spécialement pour objet de faire connaître si les eaux de l'Océan et celles de la Méditerranée, considérées dans un état de repos absolu, forment une seule surface de niveau, ainsi qu'on était déjà porté à le croire d'après des calculs provisoires de Delambre. Un réseau de triangles très-bien conditionnés lie ces deux mers l'une à l'autre, et fait partie des chaînes primordiales du canevas de la nouvelle carte de France. De nombreuses observations de distances zénithales, prises la plupart sur de hautes sommités des Pyrénées, et dans des circonstances atmosphériques qui ne nuisent pas sensiblement à leur accord, ont permis de regarder celles qui sont relatives à deux stations voisines comme étant susceptibles de procurer de très-bonnes différences de niveau, malgré leur défaut de simultanéité.

Pour envisager cette question sous le point de vue le plus général et le plus conforme à l'état des choses, il convient de considérer la Terre comme un ellipsoïde de révolution, et d'avoir égard surtout, dans le calcul des différences de niveau, aux hauteurs des stations au-dessus de la surface à laquelle se rapportent toutes les distances géodésiques, puisque, relativement aux Pyrénées, ces hauteurs surpassent souvent 2800 mètres. Mais nous avons démontré précédemment que les différences de niveau peuvent, en pareil cas, être calculées comme sur une sphère dont le rayon serait égal à la normale comprise entre l'une des stations et la ligne des pôles.

Les formules pour le calcul desquelles nous avons formé des tables sont les trois suivantes, démontrées aux articles **218**, **220** et **222**.

1°. Lorsque δ et δ' sont les distances zénithales réciproques observées aux extrémités d'une base K dont l'amplitude est C, la différence de

niveau de ces deux extrémités est

$$(a)\quad dE = K \operatorname{séc}\tfrac{1}{2}C \operatorname{tang}\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right) + K \operatorname{séc}\tfrac{1}{2}C \operatorname{tang}^2\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right)\ldots,$$

série indépendante de la réfraction et dans laquelle les deux premiers termes doivent toujours être de même signe, quand on prend pour K la base du triangle hypsométrique dont une des extrémités est la station la moins élevée au-dessus du niveau de la mer. Ainsi ces deux termes sont positifs ou négatifs, selon que la distance zénithale δ' est plus grande ou plus petite que δ.

2°. Lorsqu'une seule distance zénithale est connue, δ' par exemple, et que n désigne le coefficient de la réfraction, la différence de niveau est

$$(b)\ dE = K \operatorname{séc}\tfrac{1}{2}C \cot\left(\delta' + \frac{2n-1}{2}C\right) + K \operatorname{séc}\tfrac{1}{2}C \cot^2\left(\delta' + \frac{2n-1}{2}C\right)\ldots$$

Notez bien qu'il faut avoir égard au signe de la cotangente, et que les deux termes du second membre sont, comme précédemment, de même signe toutes les fois que K répond à la station la plus basse des deux que l'on compare.

Si les observations ne font pas connaître le coefficient n de la réfraction pour le moment où elles ont été faites, on suppose $n = 0{,}08$, et alors $\frac{2n-1}{2} = -\ 0{,}42$.

3°. Enfin la hauteur absolue d'un lieu élevé d'où l'on voit l'horizon de la mer, se détermine par cette formule

$$(c)\qquad E = \tfrac{1}{2} R (1+n)^2 \operatorname{tang}^2(\delta - 1^q),$$

démontrée à l'art. 222 et dans laquelle $\delta - 1^q$ est l'angle de dépression apparente de ce même horizon, et R le rayon terrestre, ou encore mieux la normale N au lieu de la station. Il serait cependant plus exact de remplacer, dans cette formule, le facteur $(1+n)^2$ par $\frac{1}{1-n-n'}$ (*voyez* art. 222).

Nous avons déjà dit que les triangles géodésiques sont tous projetés sur une même surface de niveau regardée comme le prolongement de celle de la mer, et que leurs côtés sont des arcs de plus courte distance sur cette même surface. Dans la recherche des hauteurs relatives des

stations par les distances zénithales, on prend communément pour base du triangle hypsométrique l'arc terrestre au niveau de la mer, compris entre les verticales des deux stations mises en comparaison, au lieu de la corde de l'arc semblable à la station la plus basse; et en effet, il est très-rarement nécessaire que la ligne géodésique, donnée par la résolution des triangles très-peu courbes, soit augmentée d'une quantité dépendante de la hauteur absolue de cette dernière station, et diminuée de son excès sur la corde correspondante; mais pour le cas dont il s'agit dans cet article, la première correction est indispensable.

Cela posé, si k désigne au niveau de la mer la plus courte distance curviligne des deux stations dont on cherche la différence de niveau, et que h soit la plus petite hauteur absolue, connue à peu près par un calcul provisoire, le log. de la base K du triangle hypsométrique, qui fera connaître cette différence de niveau par l'une des deux premières formules précédentes, sera

$$\log K = \log k + \frac{\mu h}{N} - \frac{\mu k^2}{24N^2},$$

$\mu = 0,43429$ étant le module des tables, et N la normale prise pour rayon moyen de la Terre. Dans cette expression, $\log \frac{\mu}{24N^2} = 4.6498$; si donc on avait $\log k = 4.5563$, on trouverait que $-\frac{\mu k^2}{24N^2} = -0.00000058$; quantité qu'on pourrait négliger sans inconvénient.

D'un autre côté, si $h = 1000$ mètres, on aurait, à cause de... $\log \frac{\mu}{N} = 2.83390$, à la latitude de 50^G, $\frac{\mu h}{N} = 0.000682$, quantité utile à conserver; c'est cette quantité qui est désignée par log A (tab. VI). Quant à la table VII, elle donne $\log B = \log.\ \text{séc}\ \frac{1}{2} u - \frac{\mu k^2}{24N^2}$; ainsi l'on a tout ce qu'il faut pour évaluer $K = k.A.B$. Enfin la table VIII fait connaître le second terme $T = qK^2$ de la formule (8′), art. **221**, soit que $n = 0,08$, ou que ce coefficient ait une autre valeur.

APPLICATIONS.

1er *Exemple*. Déterminer la différence de niveau E par deux distances zénithales δ, δ', sachant que la hauteur h de la station où a été prise δ

est $h = 1000^{m}$ à peu près.

Soient $\log k = 4.5563025$, $\delta = 99^{G}\,50'$, $\delta' = 100^{G}\,36'$;

on aura

$$\delta' - \delta = 1^{G}\,36', \quad \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = 0^{G}\,68',$$

et ensuite, d'après la formule (a),

$$\begin{array}{rcll}
\log k & = & 4.5563025 & \\
\log A,\ \text{tab. VI} & = & 0.0000682 & \\
\log B,\ \text{tab. VII} & = & 0.0000011 & \\
\hline
\log K & = & 4.5563718 & \\
\text{l. tang}\,\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) & = & 8.0286453 & \\
\hline
\text{log. 1}^{\text{er}}\ \text{terme} & = & 2.5850171 & = 384^{m},61 \\
\log C,\ \text{tab. VII} & = & 7.44897 & \\
\text{l. tang}\,\tfrac{1}{2}(\delta - \delta') & = & 8.02865 & \\
\hline
\text{log. 2}^{\text{e}}\ \text{terme} & = & 8.06263 & = +\ 0,01
\end{array}$$

On voit donc que le 2e terme est insensible, et que la différence de niveau cherchée est exactement $E = 384^{m},6$ (*).

2e *Exemple*. Déterminer la différence de niveau E par une seule distance zénithale δ, en supposant connu le coefficient n de la réfraction.

$$\text{Soient } \log k = 4.6989700, \quad \delta = 98^{G}\,50', \quad n = 0{,}08, \quad h = 2000^{m};$$

(*) Ce calcul suppose que la réfraction est la même aux deux stations, et c'est ce qui fait que son influence est nulle sur la différence $\frac{1}{2}(\delta' - \delta)$; mais l'erreur qui peut exister à cet égard n'est d'aucune importance dans les hautes régions de l'atmosphère, où les variations de densité de l'air sont généralement moins fréquentes et moins fortes que dans les parties basses.

on aura, par la formule (b),

$\log k$	$=$	4.6989700	
log A, tab. VI	$=$	0.0001364	
log B, tab. VII	$=$	0.0000022	
log K	$=$	4.6991086	
log cot δ	$=$	8.3722915	
log 1[er] terme	$=$	3.0714001	$= 1178^m,7$
2[e] terme T, tab. VIII	$=$		$+ \quad 164\ ,5$
		E $=$	$1343\ ,2.$

Le point dont on a observé la distance zénithale est donc élevé de $1343^m,2$ au-dessus de la station.

On fera attention que le second terme $T = qK^2$ est toujours positif, et que le signe du premier dépend de celui de cot δ.

Si le coefficient n de la réfraction avait une valeur autre que 0,08, on multiplierait par $\frac{1}{2} - n$ le nombre qu'on trouve dans la cinquième colonne de la table VIII, et le produit serait le second terme T cherché. Il est évident que la moitié de ce nombre est précisément la correction due à la sphéricité de la Terre.

3[e] *Exemple.* La hauteur absolue h d'un lieu élevé d'où l'on voit l'horizon de la mer se détermine sur-le-champ au moyen de la table IX qui est à double entrée. Cette table sera principalement utile pour faire connaître les hauteurs relatives des stations le long des côtes que l'on devra figurer. Les nombres qu'elle renferme se rapportent à $n=0,08$, et cela est bien suffisant pour les besoins de la Topographie; mais soient en général $n = 0,08 \pm z$, et h' la hauteur approchée, donnée par la table, on aura pour véritable hauteur

$$h = h' \pm 1,85zh'.$$

Par exemple, pour le coefficient $n = 0,07$, on a $z = -0,01$, et pour une dépression apparente de $0^\circ,8450$, la table IX donne $h'=655^m,17$; donc

$$h = h' - 1,85 \times 0,01h' = 655^m,17 - 12^m,11 = 643^m,06.$$

C'est en effet le nombre que l'on trouverait en évaluant la formule (c) précédente, indépendamment de la table dont il s'agit, et supposant que log. N eût pour valeur celle tirée de la table IV, à la latitude de 50°.

CHAPITRE XXI.

MÉTHODES SIMPLES POUR APPRÉCIER L'ERREUR D'UN NIVELLEMENT TRIGONOMÉTRIQUE, ET RÉPARTIR AVANTAGEUSEMENT CETTE ERREUR.

237. C'est en calculant en toute rigueur les différences de hauteur par les procédés expliqués précédemment que les résultats numériques seront parfaitement comparables entre eux, et c'est ainsi que l'on a pu vérifier si les eaux de l'Océan et de la Méditerranée forment une seule surface de niveau, abstraction faite de l'action que la Lune et le Soleil exercent sur elles. Par exemple, lorsqu'une chaîne de triangles joint deux points de l'une de ces deux mers, il faut que la somme algébrique de toutes les différences de niveau E comprises entre ces points satisfasse à l'équation $\int E = 0$, ou tout au moins que l'erreur dont cette équation se trouve affectée soit assez petite pour être considérée comme la plus forte que produise un nivellement trigonométrique qui réunirait toutes les conditions nécessaires. Dans ce dernier cas, cette erreur sera la limite probable de celle dont est susceptible le nivellement géodésique; et voici alors comment on la fera disparaître.

Puisqu'un pareil nivellement est naturellement vérifié lorsqu'il s'appuie sur deux points d'une même surface de niveau, et qu'il peut arriver, en désignant respectivement par E, E', E'',..., Δ, Δ', Δ'',..., les hauteurs et dépressions relatives, que l'on ait

$$E + E' + E'' \ldots - \Delta - \Delta' - \Delta'' \ldots = \varepsilon$$

au lieu de $= 0$, il est convenable d'appliquer à chacune de ces quantités les corrections les plus avantageuses. Or, en représentant par dE, dE',..., $d\Delta$, $d\Delta'$, .., les corrections de E, E',..., Δ, Δ',..., il est évident

qu'on aura généralement

$$dE + dE' + \ldots + d\Delta + d\Delta' + \ldots = \varepsilon.$$

Ainsi l'équation de condition $\int E = 0$ deviendra

$$(E - dE) + (E' - dE') + \ldots - (\Delta + d\Delta) - (\Delta' + d\Delta') - \ldots = 0.$$

Les corrections partielles $dE, \ldots, d\Delta, \ldots$, étant de signes contraires et arbitraires, il semble à propos de leur donner des valeurs absolues proportionnelles aux bases K, K', K'',... qui ont servi à déterminer les différences de niveau correspondantes; puisque les erreurs de ces différences, en tant qu'elles ne dépendent que de celles des mesures angulaires, sont proportionnelles à ces dernières multipliées par ces mêmes bases. Partant donc de cette hypothèse, on aura en général

$$dE \text{ ou } d\Delta = \frac{\varepsilon . K}{K + K' + K'' + \ldots};$$

et par suite les hauteurs absolues des stations seront dégagées de l'erreur ε du nivellement.

Nous supposons toutefois, dans ce mode de correction, que le nombre des observations de distances zénithales est le même pour chaque différence de niveau, et que l'état moyen de l'atmosphère n'a pas varié pendant les observations réciproques; dans le cas contraire, il faut considérer les $dE, \ldots, d\Delta, \ldots$ comme composés de deux parties λ, γ, l'une produite par les erreurs commises sur les distances zénithales δ', l'autre par la non-simultanéité des observations réciproques. Or il n'est pas difficile de voir que, dans ce cas général, λ et γ seront respectivement proportionnelles à K et K^2, et que si l'on accorde aux valeurs de λ une confiance d'autant plus grande que le nombre des observations auxquelles elles sont dues est plus considérable, c'est-à-dire si on les suppose en raison inverse des nombres d'observations i, i', i'',... qui leur correspondent, on aura

$$dE = \lambda + \gamma, \quad dE' = \lambda' + \gamma', \quad dE'' = \lambda'' + \gamma'', \ldots,$$

$$\lambda' = \lambda . \frac{iK'}{i'K}, \quad \lambda'' = \lambda . \frac{iK''}{i''K}, \ldots,$$

$$\gamma' = \gamma . \frac{K'^2}{K^2}, \quad \gamma'' = \gamma . \frac{K''^2}{K^2}, \ldots;$$

et de là

$$\varepsilon = \lambda\left[1 + \frac{\theta}{K}\left(\frac{K'}{i'} + \frac{K''}{i''} + \ldots\right)\right] + \gamma\left[1 + \frac{1}{K^2}\left(K'^2 + K''^2 + \ldots\right)\right].$$

La chaîne de triangles procurera nécessairement deux équations de cette forme ; et si elles ne sont pas identiques, elles serviront à faire connaître λ et γ : autrement on attribuera à ces inconnues la même influence sur l'erreur totale ε, ou l'on fera

$$\gamma\left[1 + \frac{1}{K^2}\left(K'^2 + K''^2 + \ldots\right)\right] = \frac{1}{2}\varepsilon.$$

De l'une ou l'autre manière, les corrections partielles λ, γ, λ', γ',..., et par suite dE, dE',..., seront déterminées.

Tel est le procédé élémentaire qui me paraît le plus naturel et le plus commode pour répartir avantageusement l'erreur connue d'un nivellement trigonométrique, laquelle est presque toujours fort petite quand ce nivellement est effectué avec tous les soins convenables. Faute d'un moyen direct de vérification pareil à celui dont il vient d'être question, ce n'est que par la savante méthode que Laplace a exposée dans le troisième Supplément à sa *Théorie analytique des Probabilités*, qu'il sera possible de déterminer les limites de l'erreur dont il s'agit, et d'obtenir les corrections les plus avantageuses. Faisons donc encore ici une application des formules qui s'en déduisent.

Recherche de l'erreur moyenne probable d'un nivellement.

D'abord, partons de ce principe fondamental et connu, savoir : Si x est le résultat moyen d'un grand nombre de valeurs particulières provenant de la mesure réitérée d'une même quantité, et que α', α'',..., $\alpha^{(\omega)}$ soient les écarts de ces ω valeurs de part et d'autre de la moyenne x, l'erreur δx de ce résultat, dont la probabilité est $\frac{1}{2}$, aura pour expression

$$\delta x = \pm \frac{0,47708}{\omega}\sqrt{2\left(\alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots. + \alpha^{(\omega)2}\right)}:$$

c'est ce qu'on nomme l'*erreur moyenne*. En donnant à cette expression

la forme

$$\delta x = \pm 0{,}47708\, g, \quad \text{ou simplement} \quad \delta x = \pm \tfrac{1}{2} g,$$

le facteur $g = \frac{1}{(\omega)} \sqrt{2(\alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots + \alpha^{(\omega)2})}$ sera la mesure ou le *module* d'un grand nombre d'observations.

En second lieu, représentons par X la différence de niveau de deux points tellement éloignés l'un de l'autre que l'on a, par une suite de nivellements partiels,

$$X = x' + x'' + \ldots + x^{(\omega)},$$

et appelons $\delta x', \delta x'', \ldots, \delta x^{(\omega)}$ les erreurs moyennes de $x', x'', \ldots, x^{(\omega)}$, lesquelles sont indépendantes entre elles; celle de X sera, conformément à un autre principe de la Théorie des Probabilités,

$$(1) \qquad \delta X = \pm \sqrt{(\delta x')^2 + (\delta x'')^2 + \ldots + (\delta x^{(\omega)})^2}.$$

Pour appliquer cette dernière formule à la pratique, on remarquera que dans l'expression de X on a généralement

$$(A) \qquad x = \frac{K}{\cos \frac{1}{2} C} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(z - z_1),$$

z et z_1 étant les distances zénithales moyennes apparentes observées réciproquement aux extrémités de la base K, C désignant l'angle formé par les verticales des deux stations, et x étant leur différence de niveau. D'un autre côté l'on sait que les distances zénithales, qui sont données par plusieurs séries prises avec le cercle répétiteur, et qui diffèrent peu de l'angle droit, sont en général affectées d'erreurs fortuites provenant des défauts de l'instrument, des erreurs du pointé ou d'autres causes accidentelles; nous désignerons donc ces erreurs respectivement par dz et dz'. Enfin il est évident que si les observations n'ont pas été faites simultanément aux extrémités de la base, ou si elles ont eu une assez longue durée, la réfraction, supposée la même dans la formule (A), aura pu être différente aux deux stations; ainsi nous aurons égard à cette circonstance en appelant θ et θ' les réfractions relatives à z et z'.

Ces préliminaires posés, on aura, en désignant par Z et Z' les distances zénithales moyennes rigoureuses,

$$Z = z + dz + \theta = z + dz + \frac{nK}{R},$$
$$Z' = z' + dz' + \theta' = z' + dz' + \frac{n'K}{R};$$

n et n' étant ici les coefficients variables de la réfraction, et R représentant le rayon de la Terre.

De là

$$\tfrac{1}{2}(Z' - Z) = \tfrac{1}{2}(z' - z) + \tfrac{1}{2}(\delta z' - \delta z) + \tfrac{1}{2}(n' - n)\frac{K}{R},$$

et pour véritable différence de niveau partielle,

$$x + dx = \frac{K}{\cos\frac{1}{2}C}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(z' - z) + \frac{K}{2}(dz' - dz) + \frac{K^2}{2R}(n' - n);$$

dans la supposition toutefois que la base K est exactement connue. Si au contraire elle est entachée d'une erreur dk, on aura, en faisant $\frac{1}{2}(z' - z) = v$, et $n' - n = dn$, pour abréger, et prenant pour K sa longueur k au niveau de la mer,

$$dx = vdk + kdv + \frac{k^2}{2R}dn.$$

Chaque nivellement partiel donnera évidemment une équation semblable; ainsi, en supposant $\cos\frac{1}{2}C = 1$, on aura

$$X = k_1 \operatorname{tang} v_1 + k_2 \operatorname{tang} v_2 + k_3 \operatorname{tang} v_3 + \ldots + k_i \operatorname{tang} v_i,$$

i étant le nombre de ces nivellements partiels; et sa différentielle dX aura généralement pour expression, à cause de la petitesse de v,

$$dX = \Sigma(vdk) + \Sigma(kdv) + \Sigma\left(\frac{k^2}{2R}dn\right),$$

Σ désignant, comme à l'ordinaire, la somme de tous les termes pareils à celui que cette caractéristique précède. Il résulte de là que l'erreur

moyenne dont la différence de niveau X pourra être affectée, sera représentée par

$$(2) \qquad \delta X = \sqrt{\Sigma(v\delta k)^2 + \Sigma(k\delta v)^2 + \Sigma\left(\frac{k^2}{2R}\delta n\right)^2};$$

quant à ses limites, elles seront $\pm 6\delta X$; on aura donc de la sorte la mesure de la précision du nivellement trigonométrique.

Dans cette formule, les erreurs moyennes δv, δn dont la probabilité est $\frac{1}{2}$, s'obtiendront par le premier principe qui sert de base au calcul actuel; et l'on pourra faire d'ailleurs $\delta k = \frac{k}{30000}$, d'après ce qui a été dit sur la discordance des valeurs d'un même côté, déduites de différentes chaînes. Enfin l'on aura soin de satisfaire au principe de l'homogénéité, en réduisant en parties du rayon les quantités angulaires v et δv, c'est-à-dire en écrivant $v \sin 1''$ et $\delta v \sin 1''$, si ces quantités sont exprimées en secondes : alors la valeur de δX sera donnée en mêmes unités que les bases du nivellement.

Deux cas se présentent dans la pratique : le premier est celui de la simultanéité des distances zénithales réciproques, et alors l'erreur moyenne δv est celle correspondante aux différences $\frac{Z'-Z}{2}$, qu'on obtient en combinant les séries contemporaines dans chaque nivellement partiel. De même l'erreur moyenne δn, pour chacun de ces nivellements, est celle relative aux différences $n'-n$ que procurent ces séries prises deux à deux. Le second cas, qui est le plus fréquent, est celui de la non-simultanéité des distances zénithales réciproques; il exige que l'on opère sur l'ensemble des séries prises à chaque station, parce qu'elles ne donnent qu'une valeur de n relative à l'état actuel de l'atmosphère pour chaque nivellement partiel; la variation δn déduite de toutes les valeurs particulières n', n'',..., $n^{(i)}$, est donc celle qu'il convient d'adopter pour $\delta n'$, $\delta n''$,..., $\delta n^{(i)}$.

Dans ce dernier cas, si σ', σ'', σ''',... représentent respectivement le nombre des observations qui ont produit n', n'', n''',..., et qu'on fasse $\sigma = \sigma' + \sigma'' + \sigma'''$,..., on aura

1°. Pour la valeur moyenne des n', n'', n''',...

$$\frac{\sigma' n' + \sigma'' n'' + \sigma''' n''' + \ldots}{\sigma} = m;$$

2°. Pour la valeur moyenne des carrés de ces mêmes quantités,

$$\frac{\sigma' n'^2 + \sigma'' n''^2 + \sigma''' n'''^2 + \ldots}{\sigma} = m'.$$

Prenant ensuite

$$g = \sqrt{\frac{2(m' - m)}{\sigma}},$$

le nombre g sera, comme on l'a déjà dit, la mesure de la précision du coefficient moyen n de la réfraction, et $\frac{1}{2} g = \delta n$ exprimera l'erreur moyenne δn de ce même coefficient.

De plus, il est indispensable de remplacer dans la formule (2) la somme $\Sigma (k \delta v)^2$ par celle-ci : $\Sigma \left(\frac{k}{2} \delta z'\right)^2 + \Sigma \left(\frac{k}{2} \delta z\right)^2$, c'est-à-dire de chercher séparément les erreurs moyennes δz, $\delta z'$ qui se rapportent aux distances zénithales à chacune des stations comparées; ainsi l'on a, dans cette circonstance,

$$(3) \quad \delta X = \sqrt{\Sigma (v \delta k)^2 + \Sigma \left(\frac{k}{2} \delta z'\right)^2 + \Sigma \left(\frac{k}{2} \delta z\right)^2 + \Sigma \left(\frac{k^2}{2R} \delta n\right)^2}.$$

Ce serait nous engager ici dans de trop longs calculs, que de faire une application numérique de ces deux dernières formules, dont l'importance ne se fait d'ailleurs sentir que dans les opérations très-délicates de la Géodésie; mais le lecteur pourra consulter, à cet égard, le 1[er] volume de la *Nouvelle Description géométrique de la France*, dans lequel nous avons apprécié le degré de précision de deux des nivellements les plus étendus et les plus exacts qui aient été exécutés de nos jours. Nous nous bornerons donc à faire les remarques suivantes :

D'abord, en faisant abstraction des termes en δk et en δv, la formule (2) se réduit à

$$\delta X = \sqrt{\Sigma \left(\frac{k^2}{2R} \delta n\right)^2};$$

et lorsque les erreurs individuelles $\delta n'$, $\delta n''$, ... sont nombreuses, on peut remplacer les carrés de chacune d'elles par la somme q de leurs carrés, divisée par leur nombre i; ainsi l'on a

$$\delta X = \pm \sqrt{\frac{q}{i} \Sigma \left(\frac{k^2}{2R}\right)^2}.$$

En supposant de plus égales toutes les bases partielles $k_1, k_2, \ldots, k_\sigma$, ($\sigma$ étant leur nombre), et appelant A la longueur entière de la ligne trigonométrique, on a enfin

$$\delta X = \frac{A^2}{2R}\sqrt{\frac{1}{\sigma^3}\cdot\frac{q}{i}};$$

d'où l'on voit que, toutes choses étant égales d'ailleurs, plus σ augmentera plus l'erreur moyenne δX sera petite. En général, il est nécessaire que k ne dépasse pas 12000 mètres, afin que le pointé soit plus certain et que la variabilité de la réfraction ait moins d'influence sur les différences de niveau.

Les conséquences déduites du calcul des probabilités n'étant relatives qu'aux erreurs fortuites des mesures, il est essentiel d'employer les meilleurs instruments, de multiplier le nombre des observations et d'en varier les circonstances, afin d'atténuer l'effet des erreurs accidentelles, d'éviter les causes constantes d'erreurs, et d'obtenir des résultats précis. On remarquera cependant que si les distances zénithales ont été observées avec le même cercle répétiteur, l'erreur constante dont cet instrument peut être affecté (art. **120**), n'a aucune influence sur les différences de niveau déduites de la formule (A); mais dans les observations correspondantes et simultanées, comme on fait nécessairement usage de deux cercles, l'effet de leurs erreurs constantes, supposées inégales et inconnues, ne peut être détruit que par le moyen indiqué à l'art. **214**, ou en répétant le nivellement en sens inverse, c'est-à-dire de manière que les stations du premier observateur soient faites par le second observateur, et réciproquement, et en prenant la demi-somme des deux résultats. Il est donc évident que sans cette précaution, il resterait toujours de l'incertitude sur la différence de niveau des termes extrêmes, et même des points intermédiaires d'un grand nivellement trigonométrique, quelles que fussent d'ailleurs la multiplicité et la précision des observations.

TABLEAU

DE PLUSIEURS QUANTITÉS NUMÉRIQUES EMPLOYÉES EN GÉODÉSIE.

Rayon réduit en secondes { sexagésimales. . . . . . . log. R″ = 5,31442 513317
{ centésimales. . . . . log. Rᵐ = 5,80388 012297

log. demi-circonfér. d'un cercle dont le rayon = 1, ou log. π = 0,49714 987269

Logarithme du nombre μ par lequel il faut multiplier les logarithmes hyperboliques ou népériens, pour les convertir en logarithmes ordinaires, ou. . . . . log. μ = 9,63778 431130

Logarithmes constants et additifs pour convertir	la toise en mètre.	0,28981 99927
	le pied en mètre.	9,51166 87423
	le pouce en mètre.	8,43248 74963
	la ligne en mètre.	7,35330 62503
	le degré vulgaire en grade.	0,04575 74906
	la minute vulgaire en grade.	8,26760 62402
	la seconde vulgaire en grade.	6,48945 49898

Les compléments arithmétiques de ces sept derniers logarithmes serviraient à convertir les mètres en toises, ou en pieds, ou en pouces, ou en lignes; les degrés décimaux, en degrés, ou en minutes, ou en secondes vulgaires.

Logarithmes constants et additifs pour convertir les pieds de Paris	en pieds de Londres, selon le baron de Zach.	log 0,0276553
	de Vienne.	log 0,0118410
	du Rhin.	log 0,0147747

Mesures françaises

Le mètre. . . . . = $443^{\text{lig}},296$ = 0,513074 de toise;
La toise. . . . . = 1,9490365912 mètre;
Le mètre carré. . . . . . . = 0,263244929476 de toise carrée;
La toise carrée. . . . . . . = 3,7987436338 mètres carres;
Le mètre cube. . . . . . . = 0,135064128946 de toise cube;
La toise cube. . . . . = 7,4038903430 mètres cubes;
Un are ou 100 mètres carrés. = 26,3245 toises carrées;

L'hectare ou l'arpent métrique se compose de 100 ares ou de 10000 mètres carrés, et vaut en ancienne mesure 2,9249437 arpents de Paris, de 100 perches carrées de 18 pieds de côte chacune, ou 1,9580201 arpent des eaux et forêts; chaque arpent de 100 perches, chacune de 22 pieds linéaires.

Les mesures linéaires en usage dans la marine, sont :

La brasse de 5 pieds = $1^{m},6242$;

La lieue marine de 20 au degré = $2850^{t},41$ = $5555^{m},\frac{5}{9}$;

Le mille marin est le tiers de la lieue marine;

Le nœud vaut 45 pieds ou $14^{m},6178$.

Mesures itinéraires de différents pays.

Lieue francaise de 25 au degré = $4444^{m},4$ = 4,4444 kilomètres;

Le myriamètre = 10000 mètres ou 2,25 lieues de 25 au degré;

Selon Prony (*Annuaire de* 1839, p. 70), la toise anglaise ou le fathom = 1,82876696 mètre ou 1,065765 toise française;

Le yard impérial est la moitié du fathom;

Le mille anglais = 1760 yards = 1609,3149 mètres;

Le myriamètre = 6,2138 milles anglais;

Selon le *Manuel allemand de Géographie,* par Muncke, le mille géographique allemand = 3807,07 toises françaises;

Enfin le mille italien de 60 au degré = 1851,8 mètres;

Le mille polonais de 20 au degré = 5555,6 mètres;

Le mille prussien de 2000 verges = 7508,0 mètres;

Dilatations de diverses substances.

Une colonne de mercure se dilate de $\frac{1}{5550}$ par degré du même thermomètre, et à partir de la glace fondante.

Voici les dilatations de quelques autres substances :

NOMS DES SUBSTANCES.	DILATATION LINÉAIRE pour un degré centigrade.
Platine	0,000008565
Argent de coupelle	0,000019097
Cuivre	0,000017173
Laiton en cuivre jaune	0,000018778
Fer doux forgé	0,000012204
Fer rond passé à la filière	0,000012350
Acier non trempé	0,000010791
Tube de verre sans plomb	0,000008757

Toutes ces dilatations sont en parties de l'unité, et sont comptées à partir de la température zéro.

Quant à un volume d'air sec passant de la température de la glace fondante à celle de l'eau bouillante, il se dilate, non pas de 0,375 comme l'ont admis depuis longtemps les physiciens, mais de 0,3665 suivant de nouvelles expériences très-précises dont M. Regnault vient d'entretenir l'Académie des Sciences (13 décembre 1841).

Dimensions de la Terre.

Rayon de la Terre supposée sphérique 6366198 mètres; log = 6.8038801
Degré moyen en France = 57020 toises = 111134 mètres.
Pour l'aplatissement $\frac{1}{305}$ et le quart du méridien de 10 millions 722 mètres, on a

log aplat. α = 7.5157002; log e^2 = 7.8160176
log rayon de l'équateur ou log a = 6.8046237;
log rayon du pôle ou log b = 6.8031974;
log rayon à la latitude de 45° ou log r = 6.8039123.

Quant aux dimensions adoptées dans les opérations géodésiques de la carte de France, *voyez* page 325.

TABLES GÉODÉSIQUES.

TABLE I.

Argument, *Angle à réduire.*

Cherchez l'angle observé dans la colonne à gauche et descendante, si cet angle est moindre que 100G, et dans la colonne à droite et ascendante, s'il surpasse 100G.

Pour un angle à réduire à l'horizon, le nombre *tangente* est positif, et le nombre *cotangente* est négatif; c'est le contraire pour un angle à réduire au plan des cordes.

Angle.	Tang.	D	Cotang.	Diff.		Angle.	Tang	D	Cotang.	Diff.		Angle.	Tang.	D	Cotang.	Diff.	
10G 1	5"06	5	800"86	8"04	189G 9	14G 1	7"08	5	572"52	4"12	185G 9	18G 1	9"11	5	444"81	2"50	181G 9
2	5,11	5	792,98	7,88	8	2	7,13	5	568,45	4,07	8	2	9,16	5	442,33	2,48	8
3	5,16	5	785,24	7,74	7	3	7,18	5	564,45	4,00	7	3	9,21	5	439,88	2,45	7
4	5,21	5	777,66	7,58	6	4	7,23	5	560,49	3,96	6	4	9,26	5	437,46	2,42	6
5	5,26		770,22	7,44	5	5	7,28	5	556,59	3,90	5	5	9,32	6	435,06	2,40	5
	—	5	—	7,30			—	5	—	3,84			—	5	—	2,37	
6	5,31	5	762,92	7,16	4	6	7,33	5	552,75	3,80	4	6	9,37	5	432,69	2,35	4
7	5,36	5	755,76	7,04	3	7	7,38	5	548,95	3,74	3	7	9,42	5	430,34	2,32	3
8	5,41	5	748,72	6,90	2	8	7,43	5	545,21	3,69	2	8	9,47	5	428,02	2,30	2
9	5,46	5	741,82	6,77	1	9	7,48	5	541,52	3,64	1	9	9,52	5	425,72	2,26	1
11 0	5,51		735,05		189 0	15 0	7,53		537,88		185 0	19 0	9,57		423,44		181 0
	—	5	—	6,66			—	6	—	3,60			—	5	—	2,25	
1	5,56	5	728,39	6,53	9	1	7,59	5	534,28	3,55	9	1	9,62	5	421,19	2,22	9
2	5,61	5	721,86	6,42	8	2	7,64	5	530,73	3,50	8	2	9,67	5	418,97	2,21	8
3	5,66	5	715,44	6,30	7	3	7,69	5	527,23	3,46	7	3	9,72	6	416,76	2,18	7
4	5,71	5	709,14	6,20	6	4	7,74	5	523,77	3,41	6	4	9,78	5	414,58	2,16	6
5	5,77		702,94		5	5	7,79		520,36		5	5	9,83		412,42		5
	—	5	—	6,10			—	5	—	3,37			—	5	—	2,14	
6	5,82	5	696,84	5,99	4	6	7,84	5	516,99	3,32	4	6	9,88	5	410,28	2,12	4
7	5,87	5	690,85	5,89	3	7	7,89	5	513,67	3,29	3	7	9,93	5	408,16	2,09	3
8	5,92	5	684,96	5,79	2	8	7,94	5	510,38	3,24	2	8	9,98	5	406,07	2,07	2
9	5,97	5	679,17	5,70	1	9	7,99	5	507,14	3,20	1	9	10,03	5	404,00	2,05	1
12 0	6,02		673,47		188 0	16 0	8,04		503,94		184 0	20 0	10,08		401,95		180 0
	—	5	—	5,60			—	5	—	3,16			—	5	—	2,03	
1	6,07	5	667,87	5,50	9	1	8,09	5	500,78	3,13	9	1	10,13	6	399,92	2,02	9
2	6,12	5	662,37	5,42	8	2	8,14	5	497,65	3,09	8	2	10,19	5	397,90	2,00	8
3	6,17	5	656,95	5,33	7	3	8,19	6	494,56	3,05	7	3	10,24	5	395,90	1,97	7
4	6,22	5	651,62	5,25	6	4	8,25	5	491,51	3,01	6	4	10,29	5	393,93	1,95	6
5	6,27		646,37		5	5	8,30		488,50		5	5	10,34		391,98		5
	—	5	—	5,17			—	5	—	2,97			—	5	—	1,94	
6	6,32	5	641,20	5,08	4	6	8,35	5	485,53	2,94	4	6	10,39	5	390,04	1,92	4
7	6,37	5	636,12	5,00	3	7	8,40	5	481,59	2,91	3	7	10,44	5	388,12	1,90	3
8	6,42	5	631,12	4,92	2	8	8,45	5	479,68	2,88	2	8	10,49	5	386,22	1,88	2
9	6,47	5	626,20	4,85	1	9	8,50	5	476,80	2,84	1	9	10,54	6	384,34	1,86	1
13 0	6,52		621,35		187 0	17 0	8,55		473,96		183 0	21 0	10,60		382,48		179 0
	—	5	—	4,78			—	5	—	2,80			—	5	—	1,85	
1	6,57	5	616,57	4,71	9	1	8,60	5	471,16	2,77	9	1	10,65	5	380,63	1,83	9
2	6,62	5	611,86	4,63	8	2	8,65	5	468,39	2,74	8	2	10,70	5	378,80	1,81	8
3	6,67	5	607,23	4,56	7	3	8,70	5	465,65	2,71	7	3	10,75	5	376,99	1,79	7
4	6,72	5	602,67	4,50	6	4	8,75	6	462,94	2,68	6	4	10,80	5	375,20	1,78	6
5	6,78		598,17		5	5	8,81		460,26		5	5	10,85		373,42		5
	—	5	—	4,43			—	5	—	2,65			—	5	—	1,76	
6	6,83	5	593,74	4,37	4	6	8,86	5	457,61	2,62	4	6	10,90	6	371,66	1,75	4
7	6,88	5	589,37	4,30	3	7	8,91	5	454,99	2,59	3	7	10,95	5	369,91	1,73	3
8	6,93	5	585,07	4,24	2	8	8,96	5	452,40	2,56	2	8	11,01	5	368,18	1,71	2
9	6,98	5	580,83	4,19	1	9	9,01	5	449,84	2,53	1	9	11,06	5	366,47	1,70	1
14 0	7,03		576,64		186 0	18 0	9,06		447,31		182 0	22 0	11,11		364,77		178 0
	Cot.		Tang.		Angle.		Cot.		Tang.		Angle.		Cot.		Tang.		Angle.

Angle.	Tang.	D	Cotang.	Diff.	
22G 1	11"16	5	363"08	1"69	177G 9
2	11,21	5	361,41	1,67	8
3	11,27	6	359,76	1,65	7
4	11,32	5	358,12	1,64	6
5	11,37	5	356,50	1,62	5
	—	5	—	1,61	
6	11,42	5	354,89	1,60	4
7	11,47	5	353,29	1,58	3
8	11,52	6	351,71	1,57	2
9	11,58	5	350,14	1,56	1
23 0	11,63		348,58		177 0
	—	5	—	1,54	
1	11,68	5	347,04	1,53	9
2	11,73	5	345,51	1,52	8
3	11,78	5	343,99	1,50	7
4	11,83	5	342,49	1,49	6
5	11,88		341,00		5
	—	6	—	1,48	
6	11,94	5	339,52	1,47	4
7	11,99	5	338,05	1,45	3
8	12,04	5	336,60	1,44	2
9	12,09	5	335,16	1,43	1
24 0	12,14		333,73		176 0
	—	6	—	1,42	
1	12,20	5	332,31	1,41	9
2	12,25	5	330,90	1,39	8
3	12,30	5	329,51	1,38	7
4	12,35	5	328,13	1,37	6
5	12,40		326,76		5
	—	6	—	1,36	
6	12,46	5	325,40	1,35	4
7	12,51	5	324,05	1,34	3
8	12,56	5	322,71	1,33	2
9	12,61	5	321,38	1,32	1
25 0	12,66		320,06		175 0
	—	6	—	1,31	
1	12,72	5	318,75	1,30	9
2	12,77	5	317,45	1,29	8
3	12,82	5	316,16	1,28	7
4	12,87	5	314,88	1,27	6
5	12,92		313,61		5
	—	6	—	1,26	
6	12,98	5	312,35	1,25	4
7	13,03	5	311,10	1,24	3
8	13,08	5	309,86	1,23	2
9	13,13	5	308,63	1,22	1
26 0	13,18		307,41		174 0
	—	6	—	1,21	
1	13,24	5	306,20	1,20	9
2	13,29	5	305,00	1,19	8
3	13,34	5	303,81	1,18	7
4	13,39	6	302,63	1,18	6
5	13,45		301,45		5
	—	5	—	1,17	
6	13,50	5	300,28	1,16	4
7	13,55	5	299,12	1,15	3
8	13,60	5	297,97	1,14	2
9	13,65	6	296,83	1,13	1
27 0	13,71		295,70		173 0
	Cot.		Tang.		Angle.

Angle.	Tang.	D	Cotang.	Diff.	
27G 1	13"76	5	294"58	1"12	172G 9
2	13,81	5	293,46	1,12	8
3	13,86	5	292,35	1,11	7
4	13,92	6	291,25	1,10	6
5	13,97	5	290,16	1,09	5
	—	5	—	1,09	
6	14,02	5	289,07	1,08	4
7	14,07	6	287,99	1,07	3
8	14,13	5	286,92	1,06	2
9	14,18	5	285,86	1,05	1
28 0	14,23		284,81		172 0
	—	5	—	1,05	
1	14,28	6	283,76	1,04	9
2	14,34	5	282,72	1,03	8
3	14,39	5	281,69	1,02	7
4	14,44	5	280,67	1,02	6
5	14,49		279,65		5
	—	6	—	1,01	
6	14,55	5	278,64	1,01	4
7	14,60	5	277,63	1,00	3
8	14,65	5	276,63	99	2
9	14,70	6	275,64	98	1
29 0	14,76		274,66		171 0
	—	5	—	98	
1	14,81	5	273,68	97	9
2	14,86	5	272,71	96	8
3	14,91	6	271,75	96	7
4	14,97	5	270,79	95	6
5	15,02		269,84		5
	—	5	—	95	
6	15,07	6	268,89	94	4
7	15,13	5	267,95	93	3
8	15,18	5	267,02	93	2
9	15,23	5	266,09	92	1
30 0	15,28		265,17		170 0
	—	6	—	91	
1	15,34	5	264,26	91	9
2	15,39	5	263,35	90	8
3	15,44	6	262,45	90	7
4	15,50	5	261,55	89	6
5	15,55		260,66		5
	—	5	—	89	
6	15,60	6	259,77	88	4
7	15,66	5	258,89	87	3
8	15,71	5	258,02	87	2
9	15,76	5	257,15	86	1
31 0	15,81		256,29		169 0
	—	6	—	86	
1	15,87	5	255,43	85	9
2	15,92	5	254,58	85	8
3	15,97	6	253,73	84	7
4	16,03	5	252,89	84	6
5	16,08		252,05		5
	—	5	—	83	
6	16,13	6	251,22	82	4
7	16,19	5	250,40	82	3
8	16,24	5	249,58	82	2
9	16,29	6	248,78	81	1
32 0	16,35		247,95		168 0
	Cot.		Tang.		Angle.

Angle.	Tang.	D	Cotang.	Diff.	
32G 1	16"40	5	247"14	81	167G 9
2	16,45	5	246,34	80	8
3	16,51	6	245,54	80	7
4	16,56	5	244,75	79	6
5	16,61	5	243,96	79	5
	—	6	—	78	
6	16,67	5	243,18	77	4
7	16,72	5	242,41	77	3
8	16,77	6	241,64	76	2
9	16,83	5	240,87	76	1
33 0	16,88		240,11		167 0
	—	5	—	76	
1	16,93	6	239,35	76	9
2	16,99	5	238,59	75	8
3	17,04	5	237,84	75	7
4	17,09	6	237,09	74	6
5	17,15		236,35		5
	—	5	—	74	
6	17,20	5	235,61	73	4
7	17,25	6	234,88	73	3
8	17,31	5	234,15	72	2
9	17,36	6	233,43	72	1
34 0	17,42		232,71		166 0
	—	5	—	72	
1	17,47	5	231,99	71	9
2	17,52	6	231,28	71	8
3	17,58	5	230,57	70	7
4	17,63	6	229,87	70	6
5	17,69		229,17		5
	—	5	—	70	
6	17,74	5	228,47	69	4
7	17,79	6	227,78	69	3
8	17,85	5	227,09	68	2
9	17,90	6	226,41	68	1
35 0	17,96		225,73		165 0
	—	5	—	68	
1	18,05	5	225,05	67	9
2	18,06	6	224,38	67	8
3	18,12	5	223,71	67	7
4	18,17	6	223,04	66	6
5	18,23		222,38		5
	—	5	—	66	
6	18,28	5	221,72	65	4
7	18,33	6	221,07	65	3
8	18,39	5	220,42	65	2
9	18,44	6	219,77	64	1
36 0	18,50		219,13		164 0
	—	5	—	64	
1	18,55	5	218,49	64	9
2	18,60	6	217,85	64	8
3	18,66	5	217,21	63	7
4	18,71	6	216,58	62	6
5	18,77		215,96		5
	—	5	—	63	
6	18,82	6	215,33	62	4
7	18,88	5	214,71	61	3
8	18,93	5	214,10	62	2
9	18,98	6	213,48	61	1
37 0	19,04		212,87		163 0
	Cot.		Tang.		Angle.

ANGLE.	TANG.	D	COTANG.	DIFF.		ANGLE.	TANG.	D	COTANG.	DIFF.		ANGLE.	TANG.	D	COTANG.	DIFF.	
37G 1	19"09	5	212"26	61	162G 9	42G 1	21"85	5	185"47	47	157G 9	47G 1	24"69	6	164"17	39	152G 9
2	19,15	6	211,66	60	8	2	21,91	6	184,99	48	8	2	24,74	5	163,79	38	8
3	19,20	5	211,06	60	7	3	21,96	5	184,52	47	7	3	24,80	6	163,41	38	7
4	19,26	6	210,46	60	6	4	22,02	6	184,05	47	6	4	24,86	6	163,03	38	6
5	19,31	5	209,87	59	5	5	22,08	6	183,59	46	5	5	24,92	6	162,65	38	5
	——	6	——	60			——	5	——	47			——	5	——	37	
6	19,37	5	209,27	59	4	6	22,13	6	183,12	46	4	6	24,97	6	162,28	37	4
7	19,42	6	208,68	58	3	7	22,19	5	182,66	46	3	7	25,03	6	161,91	38	3
8	19,48	5	208,10	58	2	8	22,24	6	182,20	46	2	8	25,09	6	161,53	37	2
9	19,53	6	207,52	58	1	9	22,30	6	181,74	46	1	9	25,15	6	161,16	37	1
38 0	19,59		206,94		162 0	43 0	22,36		181,28		157 0	48 0	25,21		160,79		152 0
	——	5	——	58			——	5	——	45			——	5	——	37	
1	19,64	5	206,36	57	9	1	22,41	6	180,83	45	9	1	25,26	6	160,42	36	9
2	19,69	6	205,79	58	8	2	22,47	6	180,38	45	8	2	25,32	6	160,06	37	8
3	19,75	5	205,21	57	7	3	22,53	5	179,93	45	7	3	25,38	6	159,69	36	7
4	19,80	6	204,64	56	6	4	22,58	6	179,48	45	6	4	25,44	6	159,33	36	6
5	19,86		204,08		5	5	22,64		179,03		5	5	25,50		158,97		5
	——	5	——	56			——	5	——	44			——	5	——	37	
6	19,91	6	203,52	56	4	6	22,69	6	178,59	45	4	6	25,55	6	158,60	36	4
7	19,97	5	202,96	56	3	7	22,75	5	178,14	44	3	7	25,61	6	158,24	35	3
8	20,02	6	202,40	55	2	8	22,80	6	177,70	44	2	8	25,67	6	157,89	36	2
9	20,08	5	201,85	55	1	9	22,86	6	177,26	43	1	9	25,73	6	157,53	35	1
39 0	20,13		201,30		161 0	44 0	22,92		176,83		156 0	49 0	25,79		157,18		151 0
	——	6	——	55			——	6	——	44			——	5	——	36	
1	20,19	5	200,75	55	9	1	22,98	5	176,39	43	9	1	25,84	6	156,82	35	9
2	20,24	6	200,20	54	8	2	23,03	6	175,96	43	8	2	25,90	6	156,47	35	8
3	20,30	5	199,66	54	7	3	23,09	6	175,53	43	7	3	25,96	6	156,12	35	7
4	20,35	6	199,12	54	6	4	23,15	5	175,10	43	6	4	26,02	6	155,77	35	6
5	20,41		198,58		5	5	23,20		174,67		5	5	26,08		155,42		5
	——	5	——	53			——	6	——	42			——	6	——	35	
6	20,46	6	198,05	54	4	6	23,26	6	174,25	43	4	6	26,14	5	155,07	35	4
7	20,52	5	197,51	53	3	7	23,32	5	173,82	42	3	7	26,19	6	154,72	34	3
8	20,57	6	196,98	52	2	8	23,37	6	173,40	42	2	8	26,25	6	154,38	34	2
9	20,63	6	196,46	53	1	9	23,43	6	172,98	42	1	9	26,31	6	154,04	35	1
40 0	20,69		195,93		160 0	45 0	23,49		172,56		155 0	50 0	26,37		153,69		150 0
	——	5	——	52			——	5	——	41			——	6	——	34	
1	20,74	6	195,41	52	9	1	23,54	6	172,15	42	9	1	26,43	6	153,35	34	9
2	20,80	5	194,89	52	8	2	23,60	6	171,73	41	8	2	26,49	6	153,01	34	8
3	20,85	6	194,37	51	7	3	23,66	5	171,32	41	7	3	26,55	5	152,67	33	7
4	20,91	5	193,86	52	6	4	23,71	6	170,91	41	6	4	26,60	6	152,34	34	6
5	20,96		193,34		5	5	23,77		170,50		5	5	26,66		152,00		5
	——	6	——	51			——	6	——	41			——	6	——	33	
6	21,02	5	192,83	50	4	6	23,83	5	170,09	40	4	6	26,72	6	151,67	34	4
7	21,07	6	192,33	51	3	7	23,88	6	169,69	41	3	7	26,78	6	151,33	33	3
8	21,13	5	191,82	50	2	8	23,94	6	169,28	40	2	8	26,84	6	151,00	33	2
9	21,18	6	191,32	50	1	9	24,00	6	168,88	40	1	9	26,90	6	150,67	33	1
41 0	21,24		190,82		159 0	46 0	24,06		168,48		154 0	51 0	26,96		150,34		149 0
	——	6	——	50			——	5	——	40			——	6	——	33	
1	21,30	5	190,32	49	9	1	24,11	6	168,08	40	9	1	27,02	6	150,01	32	9
2	21,35	6	189,83	50	3	2	24,17	6	167,68	40	8	2	27,08	5	149,69	33	8
3	21,41	5	189,33	49	7	3	24,23	5	167,28	39	7	3	27,13	6	149,36	32	7
4	21,46	6	188,84	49	6	4	24,28	6	166,89	39	6	4	27,19	6	149,04	33	6
5	21,52		188,35		5	5	24,34		166,50		5	5	27,25		148,71		5
	——	5	——	48			——	6	——	39			——	6	——	32	
6	21,57	6	187,87	49	4	6	24,40	6	166,11	39	4	6	27,31	6	148,39	32	4
7	21,63	5	187,38	48	3	7	24,46	5	165,72	39	3	7	27,37	6	148,07	32	3
8	21,68	6	186,90	48	2	8	24,51	6	165,33	39	2	8	27,43	6	147,75	32	2
9	21,74	6	186,42	48	1	9	24,57	6	164,94	38	1	9	27,49	6	147,43	31	1
42 0	21,80		185,94		158 0	47 0	24,63		164,56		153 0	52 0	27,55		147,12		148 0
	Cot.		Tang.		Angle.		Cot.		Tang.		Angle.		Cot.		Tang.		Angle.

ANGLE.	TANG.	D	COTANG.	DIFF.	
52G 1	27"61	6	146"80	32	147G 9
2	27,67	6	146,48	32	8
3	27,73	6	146,17	31	7
4	27,79	6	145,86	31	6
5	27,85	6	145,54	32	5
	——	6	——	31	
6	27,91	6	145,23	31	4
7	27,97	6	144,92	31	3
8	28,03	5	144,61	30	2
9	28,08	6	144,31	31	1
53 0	28,14		144,00		147 0
	——	6	——	30	
1	28,20	6	143,70	31	9
2	28,26	6	143,39	30	8
3	28,32	6	143,09	30	7
4	28,38	6	142,79	30	6
5	28,44		142,49		5
	——	6	——	30	
6	28,50	6	142,19	30	4
7	28,56	6	141,89	30	3
8	28,62	6	141,59	30	2
9	28,68	6	141,29	29	1
54 0	28,74		141,00		146 0
	——	6	——	30	
1	28,80	6	140,70	29	9
2	28,86	6	140,41	30	8
3	28,92	7	140,11	29	7
4	28,99	6	139,82	29	6
5	29,05		139,53		5
	——	6	——	29	
6	29,11	6	139,24	29	4
7	29,17	6	138,95	28	3
8	29,23	6	138,67	29	2
9	29,29	6	138,38	29	1
55 0	29,35		138,09		145 0
	——	6	——	28	
1	29,41	6	137,81	28	9
	29,47	6	137,53	29	8
3	29,53	6	137,24	28	7
4	29,59	6	136,96	28	6
5	29,65		136,68		5
	——	6	——	28	
6	29,71	6	136,40	28	4
7	29,77	7	136,12	28	3
8	29,84	6	135,84	28	2
9	29,90	6	135,56	27	1
56 0	29,96		135,29		144 0
	——	6	——	28	
1	30,02	6	135,01	27	9
2	30,08	6	134,74	27	8
3	30,14	6	134,47	28	7
4	30,20	6	134,19	27	6
5	30,26		133,92		5
	——	6	——	27	
6	30,32	7	133,65	27	4
7	30,39	6	133,38	27	3
8	30,45	6	133,11	27	2
9	30,51	6	132,84	26	1
57 0	30,57		132,58		143 0
	Cot.		Tang.		Angle.

ANGLE.	TANG.	D	COTANG.	DIFF.	
57G 1	30"63	6	132"31	27	142G 9
2	30,69	6	132,04	27	8
3	30,75	6	131,78	26	7
4	30,82	7	131,52	26	6
5	30,88	6	131,25	27	5
	——	6	——	26	
6	30,94	6	130,99	26	4
7	31,00	6	130,73	26	3
8	31,06	7	130,47	26	2
9	31,13	6	130,21	26	1
58 0	31,19		129,95		142 0
	——	6	——	26	
1	31,25	6	129,69	25	9
2	31,31	6	129,44	26	8
3	31,37	7	129,18	26	7
4	31,44	6	128,92	25	6
5	31,50		128,67		5
	——	6	——	26	
6	31,56	6	128,41	25	4
7	31,62	7	128,16	25	3
8	31,69	6	127,91	25	2
9	31,75	6	127,66	25	1
59 0	31,81		127,41		141 0
	——	6	——	25	
1	31,87	7	127,16	25	9
2	31,94	6	126,91	25	8
3	32,00	6	126,66	25	7
4	32,06	6	126,41	24	6
5	32,12		126,17		5
	——	7	——	25	
6	32,19	6	125,92	24	4
7	32,25	6	125,68	25	3
8	32,31	6	125,43	24	2
9	32,37	7	125,19	25	1
60 0	32,44		124,94		140 0
	——	6	——	24	
1	32,50	6	124,70	24	9
2	32,56	7	124,46	24	8
3	32,63	6	124,22	24	7
4	32,69	6	123,98	24	6
5	32,75		123,74		5
	——	6	——	24	
6	32,81	7	123,50	23	4
7	32,88	6	123,27	24	3
8	32,94	7	123,03	24	2
9	33,01	6	122,79	24	1
61 0	33,07		122,55		139 0
	——	6	——	23	
1	33,13	7	122,32	23	9
2	33,20	6	122,09	24	8
3	33,26	6	121,85	23	7
4	33,32	7	121,62	23	6
5	33,39		121,39		5
	——	6	——	23	
6	33,45	7	121,16	23	4
7	33,52	6	120,93	23	3
8	33,58	6	120,70	23	2
9	33,64	6	120,47	23	1
62 0	33,70		120,24		138 0
	Cot.		Tang.		Angle.

ANGLE.	TANG.	D	COTANG.	DIFF.	
62G 1	33"77	7	120"01	23	137G 9
2	33,84	7	119,78	23	8
3	33,90	6	119,55	23	7
4	33,96	6	119,33	22	6
5	34,03	7	119,10	23	5
	——	6	——	22	
6	34,09	7	118,88	23	4
7	34,16	6	118,65	22	3
8	34,22	7	118,43	22	2
9	34,29	6	118,21	22	1
63 0	34,35		117,99		137 0
	——	6	——	23	
1	34,41	6	117,76	22	9
2	34,47	7	117,54	22	8
3	34,54	7	117,32	22	7
4	34,61	6	117,10	21	6
5	34,67		116,89		5
	——	6	——	22	
6	34,73	7	116,67	22	4
7	34,80	7	116,45	22	3
8	34,87	6	116,23	21	2
9	34,93	7	116,02	22	1
64 0	35,00		115,80		136 0
	——	6	——	21	
1	35,06	7	115,59	22	9
2	35,13	6	115,37	21	8
3	35,19	7	115,16	22	7
4	35,26	6	114,94	21	6
5	35,32		114,73		5
	——	7	——	21	
6	35,39	7	114,52	21	4
7	35,46	6	114,31	21	3
8	35,52	7	114,10	21	2
9	35,59	6	113,89	21	1
65 0	35,65		113,68		135 0
	——	7	——	21	
1	35,72	6	113,47	21	9
2	35,78	7	113,26	21	8
3	35,85	7	113,05	21	7
4	35,92	6	112,84	20	6
5	35,98		112,64		5
	——	7	——	21	
6	36,05	6	112,43	20	4
7	36,11	7	112,23	21	3
8	36,18	7	112,02	20	2
9	36,25	6	111,82	21	1
66 0	36,31		111,61		134 0
	——	7	——	20	
1	36,38	6	111,41	20	9
2	36,44	7	111,21	21	8
3	36,51	7	111,00	20	7
4	36,58	6	110,80	21	6
5	36,64		110,60		5
	——	7	——	20	
6	36,71	7	110,40	20	4
7	36,78	6	110,20	20	3
8	36,84	7	110,00	20	2
9	36,91	7	109,80	20	1
67 0	36,98		109,60		133 0
	Cot.		Tang.		Angle.

Angle.	Tang.	D	Cotang.	Diff.	
67G 1	37"04	7	109"41	19	132G 9
2	37,11	7	109,21	20	8
3	37,18	7	109,01	20	7
4	37,25	7	108,81	20	6
5	37,31	6	108,62	19	5
	——	7	——	20	
6	37,38		108,42		4
7	37,45	7	108,23	19	3
8	37,51	6	108,03	20	2
9	37,58	7	107,84	19	1
68 0	37,65	7	107,65	19	132 0
	——	7	——	20	
1	37,72		107,45		9
2	37,78	6	107,26	19	8
3	37,85	7	107,07	19	7
4	37,92	7	106,88	19	6
5	37,99	7	106,69	19	5
	——	7	——	19	
6	38,06		106,50		4
7	38,12	6	106,31	19	3
8	38,19	7	106,12	19	2
9	38,26	7	105,93	19	1
69 0	38,33	7	105,74	19	131 0
	——	7	——	19	
1	38,40		105,55		9
2	38,46	6	105,37	18	8
3	38,53	7	105,18	19	7
4	38,60	7	104,99	19	6
5	38,67	7	104,80	19	5
	——	7	——	18	
6	38,74		104,62		4
7	38,81	7	104,44	18	3
8	38,87	6	104,25	19	2
9	38,94	7	104,07	18	1
70 0	39,01	7	103,89	18	130 0
	——	7	——	19	
1	39,08		103,70		9
2	39,15	7	103,52	18	8
3	39,22	7	103,34	18	7
4	39,29	7	103,16	18	6
5	39,36	7	102,98	18	5
	——	7	——	18	
6	39,43		102,80		4
7	39,50	7	102,62	18	3
8	39,56	6	102,44	18	2
9	39,63	7	102,26	18	1
71 0	39,70	7	102,08	18	129 0
	——	7	——	18	
1	39,77		101,90		9
2	39,84	7	101,72	18	8
3	39,91	7	101,54	18	7
4	39,98	7	101,36	18	6
5	40,05	7	101,19	17	5
	——	7	——	17	
6	40,12		101,02		4
7	40,19	7	100,84	18	3
8	40,26	7	100,66	18	2
9	40,33	7	100,49	17	1
72 0	40,40	7	100,32	17	128 0
	Cot.		Tang.		Angle.

Angle.	Tang.	D	Cotang.	Diff.	
72G 1	40"47	7	100"14	17	127G 9
2	40,54	7	99,97	17	8
3	40,61	7	99,79	18	7
4	40,68	7	99,62	17	6
5	40,75	7	99,45	17	5
	——	7	——	17	
6	40,82		99,28		4
7	40,89	7	99,11	17	3
8	40,96	7	98,94	17	2
9	41,04	8	98,77	17	1
73 0	41,11	7	98,60	17	127 0
	——	7	——	17	
1	41,18		98,43		9
2	41,25	7	98,26	17	8
3	41,32	7	98,09	17	7
4	41,39	7	97,92	17	6
5	41,46	7	97,75	17	5
	——	7	——	17	
6	41,53		97,58		4
7	41,60	7	97,42	16	3
8	41,68	8	97,25	17	2
9	41,75	7	97,08	17	1
74 0	41,82	7	96,92	16	126 0
	——	7	——	17	
1	41,89		96,75		9
2	41,96	7	96,59	16	8
3	42,03	7	96,42	17	7
4	42,10	7	96,26	16	6
5	42,18	8	96,09	17	5
	——	7	——	16	
6	42,25		95,93		4
7	42,32	7	95,76	17	3
8	42,39	7	95,60	16	2
9	42,47	8	95,44	16	1
75 0	42,54	7	95,28	16	125 0
	——	7	——	16	
1	42,61		95,12		9
2	42,68	7	94,95	17	8
3	42,75	7	94,79	16	7
4	42,83	8	94,63	16	6
5	42,90	7	94,47	16	5
	——	7	——	16	
6	42,97		94,31		4
7	43,05	8	94,15	16	3
8	43,12	7	93,99	16	2
9	43,19	7	93,83	16	1
76 0	43,26	7	93,68	15	124 0
	——	8	——	16	
1	43,34		93,52		9
2	43,41	7	93,36	16	8
3	43,49	8	93,20	16	7
4	43,56	7	93,05	15	6
5	43,63	7	92,89	16	5
	——	7	——	16	
6	43,70		92,73		4
7	43,78	8	92,58	15	3
8	43,85	7	92,42	16	2
9	43,93	8	92,27	15	1
77 0	44,00	7	92,11	16	123 0
	Cot.		Tang.		Angle.

Angle.	Tang.	D	Cotang.	Diff.	
77G 1	44"07	7	91"96	15	122G 9
2	44,15	8	91,80	16	8
3	44,22	7	91,65	15	7
4	44,30	8	91,50	15	6
5	44,37	7	91,34	16	5
	——	7	——	15	
6	44,44		91,19		4
7	44,52	8	91,04	15	3
8	44,59	7	90,89	15	2
9	44,67	8	90,73	16	1
78 0	44,74	7	90,58	15	122 0
	——	8	——	15	
1	44,82		90,43		9
2	44,89	7	90,28	15	8
3	44,97	8	90,13	15	7
4	45,04	7	89,98	15	6
5	45,12	8	89,83	15	5
	——	7	——	15	
6	45,19		89,68		4
7	45,27	8	89,53	15	3
8	45,34	7	88,38	15	2
9	45,42	8	89,24	14	1
79 0	45,49	7	89,09	15	121 0
	——	8	——	15	
1	45,57		88,94		9
2	45,64	7	83,79	14	8
3	45,72	8	88,64	15	7
4	45,80	8	88,50	14	6
5	45,87	7	88,35	15	5
	——	8	——	15	
6	45,95		88,20		4
7	46,02	7	88,06	14	3
8	46,10	8	87,91	15	2
9	46,18	8	87,77	14	1
80 0	46,25	7	87,62	15	120 0
	——	8	——	14	
1	46,33		87,48		9
2	46,41	8	87,33	15	8
3	46,48	7	87,19	14	7
4	46,56	8	87,05	14	6
5	46,64	8	86,90	15	5
	——	7	——	14	
6	46,71		86,76		4
7	46,79	8	86,62	14	3
8	46,87	8	86,48	14	2
9	46,94	7	86,33	15	1
81 0	47,02	8	86,19	14	119 0
	——	8	——	14	
1	47,10		86,05		9
2	47,18	8	85,91	14	8
3	47,25	7	85,77	14	7
4	47,33	8	85,63	14	6
5	47,41	8	85,49	14	5
	——	8	——	14	
6	47,49		85,35		4
7	47,56	7	85,21	14	3
8	47,64	8	85,07	14	2
9	47,72	8	84,93	14	1
82 0	47,80	8	84,79	14	118 0
	Cot.		Tang.		Angle.

Angle.	Tang	D	Cotang.	Diff.		Angle.	Tang	D	Cotang.	Diff.		Angle.	Tang	D	Cotang.	Diff.	
82G 1	47"88	8	84"65	14	117G 9	87G 1	51"91	8	78"07	13	112G 9	92G 1	56"21	8	72"10	11	107G 9
2	47,96	8	84,51	14	8	2	52,00	9	77,95	12	8	2	56,30	9	71,98	12	8
3	48,03	7	84,37	14	7	3	52,08	8	77,82	13	7	3	56,39	9	71,87	11	7
4	48,11	8	84,24	13	6	4	52,16	8	77,70	12	6	4	56,48	9	71,76	11	6
5	48,19	8	84,10	14	5	5	52,25	9	77,57	13	5	5	56,57	9	71,64	12	5
		8		14				8		12				9		12	
6	48,27		83,96		4	6	52,33		77,45		4	6	56,66		71,52		4
7	48,35	8	83,83	13	3	7	52,41	8	77,32	13	3	7	56,75	9	71,41	11	3
8	48,43	8	83,69	14	2	8	52,50	9	77,20	12	2	8	56,84	9	71,30	11	2
9	48,51	8	83,55	14	1	9	52,58	8	77,08	12	1	9	56,93	9	71,19	11	1
83 0	48,59	8	83,42	13	117 0	88 0	52,67	9	76,96	12	112 0	93 0	57,02	9	71,08	11	107 0
		7		14				8		13				9		12	
1	48,66		83,28		9	1	52,75		76,83		9	1	57,11		70,96		9
2	48,74	8	83,15	13	8	2	52,83	8	76,71	12	8	2	57,20	9	70,85	11	8
3	48,82	8	83,01	14	7	3	52,92	9	76,59	12	7	3	57,29	9	70,74	11	7
4	48,90	8	82,88	13	6	4	53,00	8	76,46	13	6	4	57,38	9	70,63	11	6
5	48,98	8	82,74	14	5	5	53,09	9	76,34	12	5	5	57,47	9	70,52	11	5
		8		13				8		12				9		11	
6	49,06		82,61		4	6	53,17		76,22		4	6	57,56		70,41		4
7	49,14	8	82,47	14	3	7	53,26	9	76,10	12	3	7	57,65	9	70,30	11	3
8	49,22	8	82,34	13	2	8	53,34	8	75,98	12	2	8	57,75	10	70,18	12	2
9	49,30	8	82,21	13	1	9	53,43	9	75,86	12	1	9	57,84	9	70,07	11	1
84 0	49,38	8	82,07	14	116 0	89 0	53,51	8	75,73	13	111 0	94 0	57,93	9	69,96	11	106 0
		8		13				9		12				9		11	
1	49,46		81,94		9	1	53,60		75,61		9	1	58,02		69,85		9
2	49,54	8	81,81	13	8	2	53,68	8	75,49	12	8	2	58,11	9	69,74	11	8
3	49,62	8	81,67	14	7	3	53,77	9	75,37	12	7	3	58,20	9	69,63	11	7
4	49,70	8	81,54	13	6	4	53,86	9	75,25	12	6	4	58,29	9	69,52	11	6
5	49,78	8	81,41	13	5	5	53,94	8	75,13	12	5	5	58,39	10	69.41	11	5
		8		13				9		12				9		11	
6	49,86		81,28		4	6	54,03		75,01		4	6	58,48		69,30		4
7	49,94	8	81,15	13	3	7	54,11	8	74,90	11	3	7	58,57	9	69,20	10	3
8	50,03	9	81,02	13	2	8	54,20	9	74,78	12	2	8	58,66	9	69,09	11	2
9	50,11	8	80,89	13	1	9	54,29	9	74,66	12	1	9	58,76	10	68,98	11	1
85 0	50,19	8	80,75	14	115 0	90 0	54,37	8	74,54	12	110 0	95 0	58,85	9	68,87	11	105 0
		8		13				9		12				9		11	
1	50,27		80,62		9	1	54,46		74,42		9	1	58,94		68,76		9
2	50,35	8	80,49	13	8	2	54,55	9	74,30	12	8	2	59,03	9	68,65	11	8
3	50,43	8	80,36	13	7	3	54,63	8	74,19	11	7	3	59,13	10	68,54	11	7
4	50,51	8	80,24	12	6	4	54,72	9	74,07	12	6	4	59,22	9	68,44	10	6
5	50,59	8	80,11	13	5	5	54,81	9	73,95	12	5	5	59,31	9	68,33	11	5
		9		13				8		12				10		11	
6	50,68		79,98		4	6	54,89		73,83		4	6	59.41		68,22		4
7	50,76	8	79,85	13	3	7	54,98	9	73,71	12	3	7	59,50	9	68,11	11	3
8	50,84	8	79,72	13	2	8	55,07	9	73,60	11	2	8	59,59	9	68,00	11	2
9	50,92	8	79,59	13	1	9	55,16	9	73,48	12	1	9	59,69	10	67,90	10	1
86 0	51,00	8	79,46	13	114 0	91 0	55,24	8	73,36	12	109 0	96 0	59,78	9	67,79	11	104 0
		9		12				9		11				10		10	
1	51,09		79,34		9	1	55,33		73,25		9	1	59,88		67,69		9
2	51,17	8	79,21	13	8	2	55,42	9	73,13	12	8	2	59,97	9	67,58	11	8
3	51,25	8	79,08	13	7	3	55,51	9	73,02	11	7	3	60,07	10	67,47	11	7
4	51,33	8	78,95	13	6	4	55,59	8	72,90	12	6	4	60,16	9	67,36	11	6
5	51,42	9	78,83	12	5	5	55,68	9	72,78	12	5	5	60,25	9	67,26	10	5
		8		13				9		11				10		10	
6	51,50		78,70		4	6	55,77		72,67		4	6	60,35		67,16		4
7	51,58	8	78,57	13	3	7	55,86	9	72,55	12	3	7	60,44	9	67,05	11	3
8	51,66	8	78,45	12	2	8	55,95	9	72,44	11	2	8	60,54	10	66,95	10	2
9	51,75	9	78,32	13	1	9	56,04	9	72,32	12	1	9	60,64	10	66,84	11	1
87 0	51,83	8	78,20	12	113 0	92 0	56,13	9	72,21	11	108 0	97 0	60,73	9	66,73	11	103 0
	Cot.		Tang.		Angle.		Cot.		Tang.		Angle.		Cot.		Tang.		Angle.

ANGLE.	TANG.	D	COTANG.	DIFF.		ANGLE.	TANG.	D	COTANG.	DIFF.		ANGLE.	TANG.	D	COTANG.	DIFF.	
97G 1	60"83	10	66"63	10	102G 9	98G 1	61"79	10	65"59	10	101G 9	99G 1	62"77	10	64"57	10	100G 9
2	60,92	9	66,52	11	8	2	61,89	10	65,49	10	8	2	62,87	10	64,47	10	8
3	61,02	10	66,42	10	7	3	61,98	9	65,38	11	7	3	62,97	10	64,37	10	7
4	61,11	9	66,32	10	6	4	62,08	10	65,28	10	6	4	63,06	9	64,27	10	6
5	61,21	10	66,21	11	5	5	62,18	10	65,18	10	5	5	63,16	10	64,16	11	5
		10		10				10		10				10		10	
6	61,31	9	66,11	11	4	6	62,28	10	65,08	10	4	6	63,26	10	64,06	10	4
7	61,40	10	66,00	10	3	7	62,38	9	64,98	11	3	7	63,36	10	63,96	10	3
8	61,50	10	65,90	10	2	8	62,47	10	64,87	10	2	8	63,46	10	63,86	10	2
9	61,60	9	65,80	11	1	9	62,57	10	64,77	10	1	9	63,56	10	63,76	10	1
98 0	61,69		65,69		102 0	99 0	62,67		64,67		101 0	100 0	63,66		63,66		100 0
	Cot.		Tang.		Angle.		Cot.		Tang.		Angle.		Cot.		Tang.		Angle.

TABLE II. — ARGUMENTS, $200^G - (\delta + \delta'), \delta - \delta'$,

δ, δ' étant les distances zénithales observées.

Pour réduire à l'horizon un angle observé dans un plan incliné, prenez dans cette Table un nombre avec l'argument $200^G - (\delta + \delta')$, et puis un second nombre avec l'argument $\delta - \delta'$.

Pour réduire l'angle horizontal ou sphérique à l'angle des cordes, prenez dans la même Table un premier nombre avec l'argument $(P + P')$, et un second avec l'argument $(P - P')$. *Voyez* page 207.

CENTIG.	0G	DIFF.	1G	DIFF.	2G	DIFF.	3G	DIFF.	4G	DIFF.	5G	DIFF.
1'	0,000	0	0,629	12	2,492	25	5,588	37	9,915	49	15,476	62
2	0,000	1	0,641	12	2,517	25	5,625	37	9,965	50	15,538	62
3	0,001	0	0,654	13	2,542	25	5,662	37	10,015	50	15,600	62
4	0,001	1	0,667	13	2,567	25	5,699	37	10,065	50	15,662	62
5	0,002		0,680	13	2,592	25	5,737	38	10,115	50	15,724	62
		0		13		25		38		50		62
6	0,002	1	0,693	13	2,617	25	5,775	38	10,165	50	15,786	62
7	0,003	1	0,706	13	2,642	26	5,813	38	10,215	50	15,848	62
8	0,004	1	0,719	13	2,668	26	5,851	38	10,265	50	15,910	63
9	0,005	1	0,732	14	2,694	26	5,889	38	10,315	50	15,973	63
10	0,006		0,746		2,720		5,927		10,365		16,036	
		2		14		26		38		51		63
11	0,008	1	0,760	14	2,746	26	5,965	38	10,416	51	16,099	63
12	0,009	1	0,774	14	2,772	26	6,003	39	10,467	51	16,162	63
13	0,010	2	0,788	14	2.798	26	6,042	39	10,518	51	16,225	63
14	0,012	2	0,802	14	2,824	26	6,081	39	10,569	51	16,288	63
15	0,014		0,816		2,850		6,120		10,620		16,351	
		2		14		27		39		51		63
16	0,016	2	0,830	14	2,877	27	6,159	39	10,671	51	16,414	64
17	0,018	2	0,844	14	2,904	27	6,198	39	10,722	52	16,478	64
18	0,020	2	0,858	15	2,931	27	6,237	39	10,774	52	16,542	64
19	0,022	2	0,873	15	2,958	27	6,276	39	10,826	52	16,606	64
20	0,024		0,888		2,985		6,315		10,878		16,670	
		3		15		27		39		52		64
21	0,027	3	0,903	15	3,012	27	6,354	40	10,930	52	16,734	64
22	0,030	3	0,918	15	3,039	28	6,394	40	10,782	52	16,798	64
23	0,033	3	0,933	15	3,067	28	6,434	40	11,034	52	16,862	65
24	0,036	3	0,948	15	3,095	28	6,474	40	11,086	52	16,927	65
25	0,039		0,963		3,123		6,514		11,138		16,992	
		3		16		28		40		52		65
26	0,042	3	0,979	16	3,151	28	6,554	40	11,190	52	17,057	65
27	0,045	3	0,995	16	3,179	28	6,594	40	11,242	53	17,122	65
28	0,048	4	1,011	16	3,207	28	6,634	41	11,295	53	17,187	65
29	0,052	4	1,027	16	3,235	28	6,675	41	11,348	53	17,252	65
30	0,056		1,043		3,263		6,716		11,401		17 317	
		4		16		28		41		53		65
31	0,060	4	1,059	16	3,291	28	6,757	41	11,454	53	17,382	66
32	0,064	4	1,075	16	3,319	29	6,798	41	11,507	53	17,448	66
33	0,068	4	1,091	16	3,348	29	6,839	41	11,560	54	17,514	66
34	0,072	4	1,107	17	3,377	29	6,880	41	11,614	54	17,580	66
35	0,076		1,124		3,406		6,921		11,668		17,646	
		4		17		29		41		54		66
36	0,080	4	1,141	17	3,435	29	6,962	42	11,722	54	17,712	66
37	0,084	5	1,158	17	3,464	29	7,004	42	11,776	54	17,778	66
38	0,089	5	1,175	17	3,493	30	7,046	42	11,830	54	17,844	66
39	0,094	5	1,192	17	3,523	30	7,088	42	11,884	54	17,910	66
40	0,099		1,209		3,553		7,130		11,938		17,976	

CENTIG.	0^G	DIFF.	1^G	DIFF.	2^G	DIFF.	3^G	DIFF.	4^G	DIFF.	5^G	DIFF.
41	0,104	5	1,226	17	3,582	30	7,172	42	11,992	54	18,043	67
42	0,109	5	1,243	17	3,612	30	7,214	42	12,046	54	18,110	67
43	0,114	5	1,261	18	3,642	30	7,256	42	12,100	54	18,177	67
44	0,119	5	1,279	18	3,672	30	7,298	42	12,155	55	18,244	67
45	0,124	5	1,297	18	3,702	30	7,340	42	12,210	55	18,311	67
		6		18		30		43		55		67
46	0,130	6	1,315	18	3,732	30	7,383	43	12,265	55	18,378	67
47	0,136	6	1,333	18	3,762	30	7,426	43	12,320	55	18,445	67
48	0,142	6	1,351	18	3,792	31	7,469	43	12,375	55	18,512	68
49	0,148	6	1,369	18	3,823	31	7,512	43	12,430	56	18,580	68
50	0,154		1,387		3,854		7,555		12,486		18,648	
		6		19		31		43		56		68
51	0,160	6	1,406	19	3,885	31	7,598	43	12,542	56	18,716	63
52	0,166	7	1,425	19	3,916	31	7,641	43	12,598	56	18,784	68
53	0,173	7	1,444	19	3,947	31	7,684	44	12,654	56	18,852	68
54	0,180	7	1,463	19	3,978	32	7,728	44	12,710	56	18,920	68
55	0,187		1,482		4,010		7,772		12,766		18,988	
		7		19		32		44		56		69
56	0,194	7	1,501	19	4,042	32	7,816	44	12,822	56	19,057	69
57	0,201	7	1,520	19	4,074	32	7,860	44	12,878	56	19,126	69
58	0,208	7	1,539	20	4,106	32	7,904	44	12,934	56	19,195	69
59	0,215	7	1,559	20	4,138	32	7,948	44	12,990	57	19,264	69
60	0,222		1,579		4,170		7,992		13,047		19,333	
		7		20		32		44		57		69
61	0,229	8	1,599	20	4,202	32	8,036	45	13,104	57	19,402	69
62	0,237	8	1,619	20	4,234	32	8,081	45	13,161	57	19,471	69
63	0,245	8	1,639	20	4,266	33	8,126	45	13,218	57	19,540	69
64	0,253	8	1,659	20	4,299	33	8,171	45	13,275	57	19,609	70
65	0,261		1,679		4,332		8,216		13,332		19,679	
		8		20		33		45		57		70
66	0,269	8	1,699	21	4,365	33	8,261	45	13,389	57	19,749	70
67	0,277	8	1,720	21	4,398	33	8,306	45	13,446	58	19,819	70
68	0,285	8	1,741	21	4,431	33	8,351	45	13,504	58	19,889	70
69	0,293	9	1,762	21	4,464	33	8,396	46	13,562	58	19,959	70
70	0,302		1,783		4,497		8,442		13,620		20,029	
		9		21		33		46		58		70
71	0,311	9	1,804	21	4,530	33	8,488	46	13,678	58	20,099	70
72	0,320	9	1,825	21	4,563	33	8,534	46	13,736	58	20,169	71
73	0,329	9	1,846	21	4,596	34	8,580	46	13,794	58	20,240	71
74	0,338	9	1,867	22	4,630	34	8,626	46	13,852	58	20,311	71
75	0,347		1,889		4,664		8,672		13,911		20,382	
		9		22		34		46		59		71
76	0,356	9	1,911	22	4,698	34	8,718	46	13,970	59	20,453	71
77	0,365	10	1,933	22	4,732	34	8,764	47	14,029	59	20,524	71
78	0,375	10	1,955	22	4,766	34	8,811	47	14,088	59	20,595	71
79	0,385	10	1,977	22	4,800	35	8,858	47	14,147	59	20,666	71
80	0,395		1,999		4,835		8,905		14,206		20,737	
		10		22		35		47		59		71
81	0,405	10	2,021	22	4,870	35	8,952	47	14,265	59	20,808	72
82	0,415	10	2,043	22	4,905	35	8,999	47	14,324	59	20,880	72
83	0,425	10	2,065	23	4,940	35	9,046	47	14,383	60	20,952	72
84	0,435	10	2,088	23	4,975	35	9,093	47	14,443	60	21,024	72
85	0,445		2,111		5,010		9,140		14,503		21,096	
		11		23		35		48		60		72
86	0,456	11	2,134	23	5,045	35	9,188	48	14,563	60	21,168	72
87	0,467	11	2,157	23	5,080	36	9,236	48	14,623	60	21,240	72
88	0,478	11	2,180	23	5,116	36	9,284	48	14,683	60	21,312	72
89	0,489	11	2,203	23	5,152	36	9,332	48	14,743	60	21,384	72
90	0,500		2,226		5,188		9,380		14,803		21,456	
		11		24		36		48		60		73
91	0,511	11	2,250	24	5,224	36	9,428	48	14,863	61	21,529	73
92	0,522	11	2,274	24	5,260	36	9,476	48	14,924	61	21,602	73
93	0,533	12	2,298	24	5,296	36	9,524	48	14,985	61	21,675	73
94	0,545	12	2,322	24	5,332	36	9,572	49	15,046	61	21,748	73
95	0,557		2,346		5,368		9,621		15,107		21,821	
		12		24		36		49		61		74
96	0,569	12	2,370	24	5,404	36	9,670	49	15,168	61	21,895	74
97	0,581	12	2,394	24	5,440	37	9,719	49	15,229	61	21,969	74
98	0,593	12	2,418	24	5,477	37	9,768	49	15,290	62	22,043	74
99	0,605	12	2,442	25	5,514	37	9,817	49	15,352	62	22,117	74
100	0,617		2,467		5,551		9,866		15,414		22,191	

TABLE III. — *Pour trouver l'excès sphérique exprimé en secondes centésimales.*

ARGUMENTS : Base et hauteur des triangles.

(*Voyez* page 262.)

BASE.	HAUTEUR.									
	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
1000m	0"007	0"015	0"023	0"031	0"039	0"047	0"054	0"062	0"070	0,078
2000	0,015	0,034	0,047	0,062	0,078	0,094	0,109	0,125	0,141	0,157
3000	0,023	0,047	0,070	0,094	0,117	0,141	0,164	0,188	0,212	0,235
4000	0,031	0,062	0,094	0,125	0,157	0,188	0,219	0,251	0,282	0,314
5000	0,039	0,078	0,117	0,157	0,196	0,235	0,274	0,314	0,353	0,392
6000	0,047	0,094	0,141	0,188	0,235	0,282	0,329	0,376	0,423	0,471
7000	0,054	0,109	0,164	0,219	0,274	0,329	0,383	0,437	0,491	0,545
8000	0,062	0,125	0,188	0,251	0,314	0,376	0,438	0,500	0,562	0,624
9000	0,070	0,141	0,212	0,282	0,353	0,423	0,493	0,563	0,633	0,700
10000	0,078	0,157	0,235	0,314	0,392	0,471	0,549	0,628	0,706	0,785
11000	0,086	0,173	0,259	0,345	0,431	0,518	0,604	0,691	0,777	0,863
12000	0,094	0,188	0,282	0,376	0,471	0,565	0,659	0,753	0,848	0,942
13000	0,102	0,204	0,306	0,408	0,510	0,612	0,714	0,816	0,918	1,020
14000	0,109	0,219	0,329	0,439	0,549	0,659	0,769	0,879	0,989	1,099
15000	0,117	0,235	0,353	0,471	0,589	0,706	0,824	0,942	1,060	1,178
16000	0,125	0,251	0,376	0,502	0,627	0,753	0,878	1,004	1,130	1,256
17000	0,133	0,267	0,400	0,534	0,667	0,801	0,934	1,068	1,201	1,335
18000	0,141	0,282	0,424	0,565	0,707	0,848	0,989	1,131	1,272	1,414
19000	0,149	0,298	0,447	0,596	0,746	0,895	1,044	1,193	1,342	1,492
20000	0,157	0,314	0,471	0,628	0,785	0,942	1,099	1,256	1,413	1,570
21000	0,164	0,329	0,494	0,659	0,824	0,989	1,154	1,319	1,484	1,649
22000	0,172	0,345	0,518	0,691	0,863	1,036	1,209	1,382	1,554	1,727
23000	0,180	0,361	0,541	0,722	0,903	1,083	1,264	1,444	1,625	1,806
24000	0,188	0,376	0,565	0,753	0,942	1,130	1,319	1,507	1,696	1,884
25000	0,196	0,392	0,588	0,785	0,981	1,177	1,374	1,570	1,766	1,963
26000	0,204	0,408	0,612	0,816	1,020	1,224	1,429	1,633	1,838	2,042
27000	0,212	0,424	0,636	0,848	1,060	1,272	1,484	1,696	1,908	2,120
28000	0,220	0,439	0,659	0,879	1,099	1,319	1,539	1,759	1,979	2,199
29000	0,227	0,455	0,683	0,911	1,138	1,366	1,594	1,821	2,049	2,277
30000	0,235	0,471	0,706	0,942	1,178	1,413	1,649	1,884	2,120	2,356
31000	0,243	0,486	0,730	0,973	1,217	1,460	1.704	1,947	2,191	2,434
32000	0,251	0,502	0,753	1,005	1,256	1,507	1,759	2,010	2,261	2,513
33000	0,259	0,518	0,777	1,036	1,295	1,555	1,814	2,073	2,332	2,591
34000	0,267	0,534	0,801	1,068	1,335	1,602	1,869	2,136	2,403	2,670
35000	0,274	0,549	0,824	1,099	1,374	1,649	1,924	2,199	2,474	2,749
36000	0,282	0,565	0,848	1,130	1,413	1,696	1,979	2,261	2,544	2,827
37000	0,290	0,581	0,871	1,162	1,452	1,743	2,033	2,324	2,615	2,905
38000	0,298	0,596	0,895	1,193	1,492	1,790	2,088	2,387	2,685	2,984
39000	0,306	0,612	0,918	1,225	1,531	1,837	2,144	2,450	2,756	3,063
40000	0,314	0,628	0,942	1,256	1,570	1,884	2,199	2,513	2,827	3,141
41000	0,322	0,644	0,966	1,288	1,610	1,932	2,254	2,576	2,898	3,220
42000	0,329	0,659	0,989	1,319	1,649	1,979	2,309	2,639	2,968	3,298
43000	0,337	0,675	1,013	1,350	1,688	2,026	2,364	2,701	3,039	3,377
44000	0,345	0,691	1,036	1,381	1,727	2,073	2,419	2,764	3,110	3,455
45000	0,353	0,707	1,060	1,413	1,767	2,120	2,474	2,827	3,180	3,534
46000	0,361	0,722	1,083	1,445	1,806	2,167	2,528	2,890	3,251	3,612
47000	0,369	0,738	1,107	1,476	1,845	2,214	2,583	2,952	3,322	3,691
48000	0,377	0,753	1,130	1,507	1,884	2,261	2,638	3,015	3,392	3,769
49000	0,384	0,769	1,154	1,539	1,924	2,309	2,693	3,078	3,463	3,848
50000	0,392	0,785	1,178	1,570	1,963	2,356	2,748	3,141	3,534	3,927

TABLE IV. — *Pour abréger le calcul des positions géographiques des sommets des triangles.*

Nota. Le logarithme du rayon R de courbure du méridien, à la latitude H, s'obtiendra à l'aide de la relation, $\log R = 3 \log N + 6.3879504$ (*voyez* page 360 et suivantes).

Latitude en grades.	Log A.	Diff.	Log B.	Diff.	Log F.	Diff.	Log N.	Log T.	Diff.
30^G	9.0011998	540	1.60243	1661	8.9989750	181	6.8049051	9.9977752	359
31	11458	551	61904	1625	9569	184	9232	8111	367
32	10907	564	63529	1592	9385	189	9416	8478	375
33	10343	573	65121	1564	9196	192	9605	8853	381
34	09770		66685		9004		9797	9234	
		583		1537		195			388
35	09187	593	68222	1510	8809	199	9992	9622	394
36	08594	603	69732	1489	8610	202	6.8050191	6.9980016	401
37	07991	610	71221	1469	8408	204	0393	0417	406
38	07381	618	72690	1451	8204	207	0597	0823	411
39	06763		74141		7997		0804	1234	
		625		1434		209			416
40	06138	631	75575	1419	7788	211	1013	1650	420
41	05507	637	76994	1406	7577	214	1224	2070	423
42	04870	643	78400	1394	7363	215	1438	2493	429
43	04227	647	79794	1385	7148	217	1652	2922	429
44	03580		81179		6931		1869	3351	
		647		1376		214			433
45	02933	655	82555	1370	6717	219	2084	3784	436
46	02278	657	83925	1364	6498	221	2303	4220	437
47	01621	660	85289	1360	6277	221	2524	4656	439
48	00961	661	86649	1357	6056	222	2745	5095	439
49	9.000300		1.88006		5834		2967	5534	
		662		1355		222			440
50	8.9999638	661	1.89361	1356	8.9985612	221	6.8053189	9.9985974	440
51	8977	660	1.90717	1357	5391	221	3410	6414	439
52	8317	662	2074	1360	5170	222	3631	6853	440
53	7655	656	3434	1364	4948	220	3853	7293	436
54	6999		4798		4728		4073	7729	
		655		1370		219			436
55	6344	652	6168	1376	4509	218	4292	8165	434
56	5692	648	7544	1385	4291	217	4510	8599	431
57	5044	646	8929	1394	4074	218	4727	9030	428
58	4398	638	2.00323	1406	3856	213	4945	9458	425
59	3760		1729		3643		5158	9883	
		633		1420		212			421
60	3127		2.03149		3431		5370	9.9990304	

TABLE V. — *Arcs du méridien, degrés de latitude et degrés de parallèles, pour l'aplatissement* 0,00324 = $\frac{1}{309}$, *en mètres.*

LATIT.	ARCS du méridien.	DEGRÉS de latitude.	DIFF.	DEGRÉS des parallèles.	DIFFÉR.	LATIT.	ARCS du méridien.	DEGRÉS de latitude.	DIFF.	DEGRÉS des parallèles.	DIFFÉR.
	m	m		m			m	m		m	
0°	000000,0			111277,5		45°	4984505,1			78812,6	
1	110571,4	110571,4	0,7	111260,8	16,7	46	5095624,5	111119,4	18.8	77429,6	1383,0
2	221143,5	110572,1	1,2	111210,3	50,5	47	5206762,9	111138,3	18,8	76022,8	1406,8
3	331716,9	110573,4	2,0	111126,1	84,2	48	5317920,0	111157,2	18,9	74592,6	1430,2
4	442292,3	110575,4	2,6	111008,2	117,9	49	5429096,0	111176,0	18,7	73139,6	1453,0
5	552870,3	110578,0	3,2	110856,7	151,5	50	5540290,7	111194,7	18,6	71664,1	1475,5
		110581,2	3,9		184,8			111213,3	18,5		1497,6
6	663451,5	110585,1	4,5	110671,9	218,4	51	5651504,9	111231,8	18,3	70166,5	1519,1
7	774036,6	110589,6	5,2	110453,5	251,8	52	5762735,8	111250,1	18,2	68647,4	1540,3
8	884626,2	110594,8	5,8	110201,7	285,4	53	5873985,9	111268,3	18,0	67107,1	1560,8
9	995221,0	110600,6	6,4	109916,3	318,5	54	5985254,2	111286,3	17,8	65546,3	1581,0
10	1105821,6			109597,8		55	6096540,5			63965,3	
		110607,0	7,0		351,8			111304,1	17,6		1600,8
11	1216428,6	110614,0	7,6	109246,0	384,9	56	6207844,6	111321,7	17,3	62364,5	1620,0
12	1327042,6	110621,6	8,3	108861,1	417,9	57	6319166,3	111339,0	17,0	60744,5	1638,8
13	1437664,2	110629,9	8,8	108443,2	450,6	58	6430505,3	111356,0	16,7	59105,7	1656,9
14	1548294,1	110638,7	9,3	107992,6	483,3	59	6541861,3	111372,7	16,5	57448,8	1674,6
15	1658932,8			107509,3		60	6653234,0			55744,2	
		110648,0	10,0		516,1			111389,2	16,0		1691,7
16	1769580,8	110658,0	10,5	106993,2	548,5	61	6764623,2	111405,2	15,8	54082,5	1708,5
17	1880238,8	110668,4	11,0	106444,7	580,0	62	6876028,4	111421,0	15,3	52374,0	1724,7
18	1990907,2	110679,5	11,5	105863,9	612,8	63	6987449,4	111436,3	14,9	50649,3	1740,3
19	2101586,7	110691,0	12,1	105251,1	644,9	64	7098885,7	111451,2	14,6	48909,0	1755,6
20	2212277,7			104606,2		65	7210336,9			47153,4	
		110703,1	12,5		676,5			111465,8	14,1		1770,1
21	2322980,8	110715,6	13,1	103929,7	708,1	66	7321802,7	111479,9	13,7	45383,3	1783,9
22	2433696,4	110728,7	13,5	103221,6	739,5	67	7433282,6	111493,6	13,1	43599,4	1797,6
23	2544425,1	110742,2	13,9	102482,1	770,6	68	7544776,1	111506,7	12,8	41801,8	1810,5
24	2655167,3	110756,1	14,4	101711,5	801,5	69	7656282,8	111519,5	12,2	39991,3	1822,9
25	2765923,4			100910,0		70	7767802,3			38168,4	
		110770,5	14,8		832,1			111531,7	11,7		1834,6
26	2876693,9	110785,4	15,2	100077,9	862,8	71	7879334,0	111543,4	11,1	36333,8	1846,0
27	2987479,3	110800,5	15,6	99215,1	892,6	72	7990877,4	111554,5	10,6	34487,8	1856,6
28	3098279,8	110816,1	15,9	98322,5	922,9	73	8102431,9	111565,1	10,1	32631,2	1866,8
29	3209095,9	110832,0	16,3	97399,6	952,5	74	8213997,0	111575,2	9,5	30764,4	1876,1
30	3319927,9			96447,1		75	8325572,2			28888,3	
		110848,3	16,6		981,7			111584,7	9,0		1885,3
31	3430776,3	110864,9	16,9	95465,4	1010,8	76	8437156,9	111593,7	8,3	27003,0	1893,7
32	3541641,2	110881,8	17,2	94454,6	1039,8	77	8548750,6	111602,0	7,7	25109,3	1901,5
33	3652523,0	110899,0	17,5	93414,8	1068,1	78	8660352,6	111609,7	7,2	23207,8	1908,5
34	3763422,0	110916,5	17,7	92346,7	1096,3	79	8771962,3	111616,9	6,5	21299,3	1915,3
35	3874338,5			91250,4		80	8883579,2			19384,0	
		110934,2	17,9		1124,2			111623,4	5,8		1921,2
36	3985272,7	110952,1	18,0	90126,2	1151,7	81	8995202,6	111629,2	5,3	17462,8	1926,6
37	4096224,8	110970,1	18,4	88974,5	1179,0	82	9106831,8	111634,5	4,6	15536,2	1931,5
38	4207194,9	110988,5	18,4	87795,5	1205,6	83	9218466,3	111639,1	3,9	13604,7	1935,6
39	4318183,4	111006,9	18,6	86589,9	1232,2	84	9330105,4	111643,0	3,3	11669,1	1939,3
40	4429190,3			85357,7		85	9441748,4			9729,8	
		111025,5	18,6		1258,3			111646,3	2,7		1942,4
41	4540215,8	111044,1	18,8	84099,4	1284,0	86	9553391,7	111649,0	2,0	7787,4	1944,8
42	4651259,9	111062,9	18,8	82815,4	1309,4	87	9665043,7	111651,0	1,3	5842,6	1946,5
43	4762322,8	111081,7	18,9	81506,0	1334,3	88	9776694,7	111652,3	0,7	3896,1	1947,6
44	4873404,5	111100,6		80171,7	1359,1	89	9888347,0	111653,0		1948,5	1948,5
45	4984505,1			78812,6		90	10000000,0			0000,0	

TABLES VI ET VII. — *Calcul des différences de niveau.*

TABLE VI.

HAUTEUR h.	1er LOG A à ajouter à LOG k.	DIFFÉRENCE.
1000m	0.0000682	68
1100	0.0000750	69
1200	0.0000819	68
1300	0.0000887	68
1400	0.0000955	68
1500	0.0001023	68
1600	0.0001091	69
1700	0.0001160	68
1800	0.0001228	68
1900	0.0001296	68
2000	0.0001364	69
2100	0.0001433	68
2200	0.0001501	68
2300	0.0001569	68
2400	0.0001637	68
2500	0.0001705	69
2600	0.0001774	68
2700	0.0001842	68
2800	0.0001910	68
2900	0.0001978	68
3000	0.0002046	69
3100	0.0002115	68
3200	0.0002183	68
3300	0.0002251	68
3400	0.0002319	69
3500	0.0002388	68
3600	0.0002456	68
3700	0.0002524	68
3800	0.0002592	69
3900	0.0002661	

TABLE VII.

BASE k.	2e LOG B à ajouter à LOG k.	LOG. du facteur C du 2e terme.
15000m	0.0000002	7,06972
20000	0.0000003	7,19467
25000	0.0000005	7,29164
30000	0.0000008	7,37076
35000	0.0000011	7,43792
40000	0.0000014	7,49584
45000	0.0000018	7,54676
50000	0.0000022	7,59267
55000	0.0000027	7,63403
60000	0.0000032	7,67179
65000	0.0000037	7,70654
70000	0.0000043	7,73870

dE étant la différence de niveau cherchée et k la base donnée par la résolution des triangles, on a pour la hauteur absolue h du point le moins élevé

$$dE = k \cdot A \cdot B \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) + C \times (1^{er}\ \text{terme}) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta).$$

Le 2e terme, qui est très-souvent insensible, est toujours de même signe que le 1er terme.

TABLE VIII. — *Calcul des différences de niveau.*

BASE k.	LOG k.	2e TERME T pour $n = 0,08$.	DIFFÉR.	2e TERME à multiplier par $\frac{1}{2} - n$.	DIFFÉR.
10000m	4.00000	6m58		15m66	
15000	4.17609	14,79	8,21	35,23	19,57
15500	4.19033	15,80	1,01	37,61	2,38
16000	4.20412	16,83	1,03	40,08	2,47
16500	4.21748	17,90	1,07	42,62	2,54
17000	4.23045	19,00	1,10	45,25	2,63
17500	4.24304	20,14	1,14	47,95	2,70
18000	4.25527	21,30	1,16	50,72	2,77
18500	4.26717	22,50	1,20	53,58	2,86
19000	4.27875	23,74	1,24	56,52	2,94
19500	4.29003	25,00	1,26	59,53	3,01
20000	4.30103	26,30	1,30	62,62	3,09
20500	4.31175	27,63	1,33	65,79	3,17
21000	4.32222	29,00	1,37	69,04	3,25
21500	4.33244	30,40	1,40	72,37	3,33
22000	4.34242	31,82	1,42	75,77	3,40
22500	4.35218	33,29	1,47	79,26	3,49
23000	4.36173	34,78	1,49	82,82	3,56
23500	4.37107	36,31	1,53	86,46	3,64
24000	4.38021	37,87	1,56	90,18	3,72
24500	4.38917	39,47	1,60	93,97	3,79
25000	4.39794	41,10	1,63	97,85	3,88
25500	4.40654	42,76	1,66	101,80	3,95
26000	4.41497	44,45	1,69	105,83	4,03
26500	4.42325	46,18	1,73	109,94	4,11
27000	4.43136	47,93	1,75	114,13	4,19
27500	4.43933	49,73	1,80	118,40	4,27
28000	4.44716	51,55	1,82	122,74	4,34
28500	4.45484	53,41	1,86	127,16	4,42
29000	4.46240	55,30	1,89	131,67	4,51
29500	4.46982	57,23	1,93	136,25	4,58

SUITE DE LA TABLE VIII.

BASE k.	LOG k.	2e TERME T pour $n = 0,08$.	DIFFÉR.	2e TERME à multiplier par $\frac{1}{2} - n$.	DIFFÉR
			1,95		4,65
30000m	4.47712	59m18		140m90	
			4,01		9,56
31000	4.49136	63,19		150,46	
			4,14		9,86
32000	4.50515	67,33		160,32	
			4,28		10,18
33000	4.51851	71,61		170,50	
			4,40		10,48
34000	4.53148	76,01		180,98	
			4,54		10,81
35000	4.54407	80,55		191,79	
			4,67		11,11
36000	4.55630	85,22		202,90	
			4,80		11,43
37000	4.56820	90,02		214,33	
			4,93		11,74
38000	4.57978	94,95		226,07	
			5,06		12,06
39000	4.59106	100,01		238,13	
			5,20		12,37
40000	4.60206	105,21		250,50	
			5,32		12,68
41000	4.61278	110,53		263,18	
			5,46		12,99
42000	4.62325	115,99		276,17	
			5,59		13,31
43000	4.63347	121,58		289,48	
			5,72		13,60
44000	4.64345	127,30		303,08	
			5,85		13,95
45000	4.65321	133,15		317,03	
			5,99		14,25
46000	4.66276	139,14		331,28	
			6,11		14,56
47000	4.67210	145,25		345,84	
			6,25		14,88
48000	4.68124	151,51		360,72	
			6,38		15,18
49000	4.69020	157,88		375,90	
			6,51		15,50
50000	4.69897	164,39		391,40	
			6,64		15,82
51000	4.70757	171,03		407,22	
			6,77		16,12
52000	4.71600	177,80		423,34	
			6,91		16,44
53000	4.72428	184,71		439,78	
			7,03		16,75
54000	4.73239	191,74		456,53	
			7,17		17,06
55000	4.74036	198,91		473,59	
			7,30		17,36
56000	4.74819	206,21		490,97	
			7,43		17,69
57000	4.75587	213,64		508,66	
			7,56		18,01
58000	4.76343	221,20		526,67	
			7,69		18,31
59000	4.77085	228,89		544,98	
			7,83		18,64
60000	4.77815	236,72		563,62	

TABLE IX. — *Calcul des hauteurs au-dessus de la mer, par les angles de dépression.*

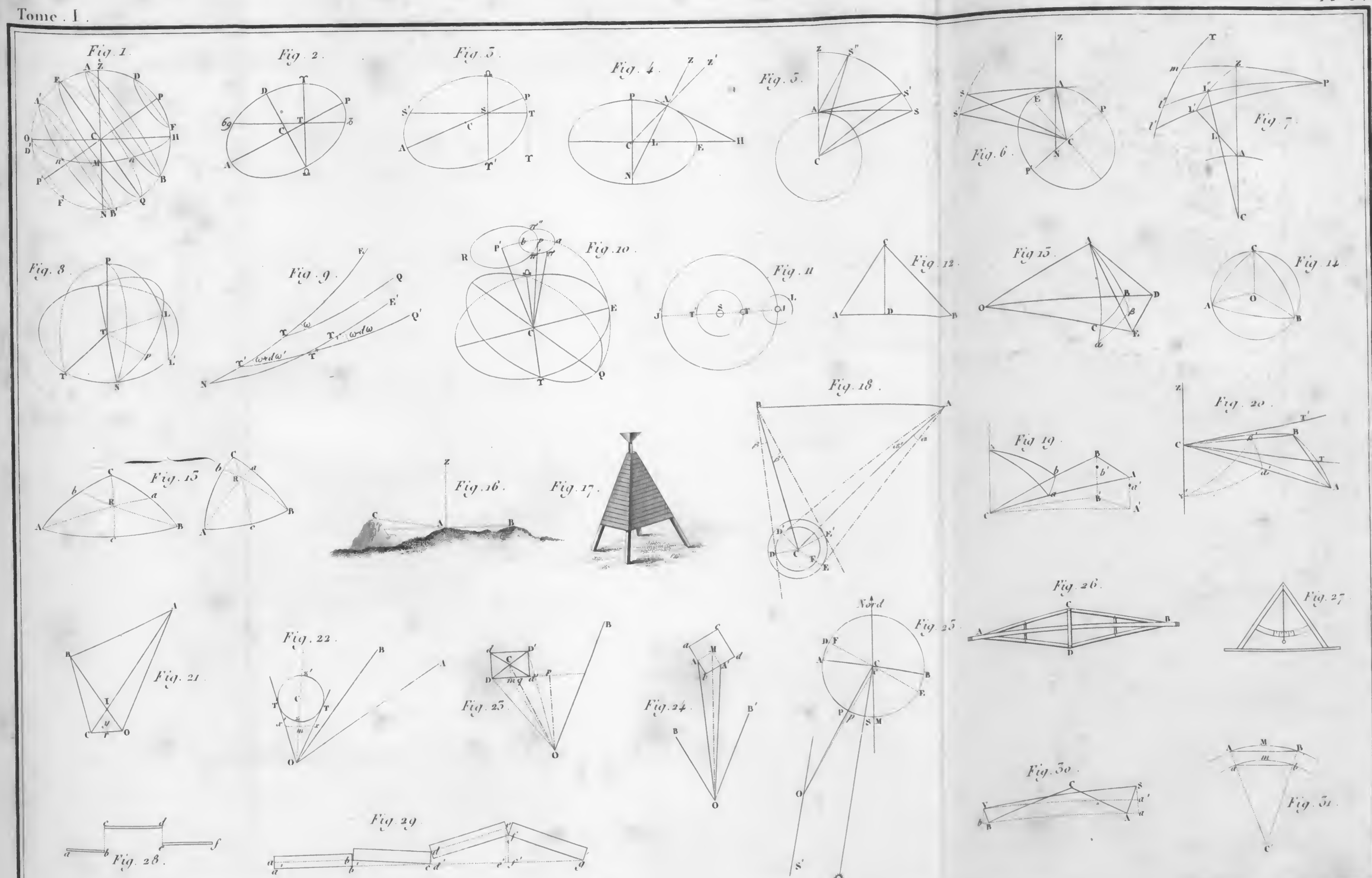
ANGLES de dépression.	HAUTEURS absolues.	DIFFÉR.	ANGLES de dépression.	HAUTEURS absolues.	DIFFÉR.
0^G2000	36^m700		0^G3500	112^m39	3,19
0,2050	38,558	1,858	0,3550	115,62	3,23
0,2100	40,460	1,902	0,3600	118,91	3,29
0,2150	42,411	1,951	0,3650	122,26	3,35
0,2200	44,406	1,995	0,3700	125,61	3,35
		2,040			3,41
0,2250	46,446	2,089	0,3750	129,02	3,46
0,2300	48,535	2,132	0,3800	132,48	3,52
0,2350	50,667	2,179	0,3850	136,00	3,55
0,2400	52,846	2,226	0,3900	139,55	3,60
0,2450	55,072		0,3950	143,15	
		2,269			3,65
0,2500	57,341	2,315	0,4000	146,80	3,69
0,2550	59,656	2,364	0,4050	150,49	3,74
0,2600	62,020	2,410	0,4100	154,23	3,88
0,2650	64,430	2,453	0,4150	158,01	3,84
0,2700	66,883		0,4200	161,85	
		2,502			3,87
0,2750	69,385	2,545	0,4250	165,72	3,92
0,2800	71,930	2,593	0,4300	169,64	3,98
0,2850	74,523	2,637	0,4350	173,62	4,01
0,2900	77,160	2,682	0,4400	177,63	4,06
0,2950	79,842		0,4450	181,69	
		2,731			4,11
0,3000	82,573	2,775	0,4500	185,80	4,15
0,3050	85,348	2,822	0,4550	189,95	4,20
0,3100	88,170	2,865	0,4600	194,15	4,24
0,3150	91,035	2,913	0,4650	198,39	4,29
0,3200	93,948		0,4700	202,68	
		2,962			4,33
0,3250	96,910	3,006	0,4750	207,01	4,38
0,3300	99,916	3,034	0,4800	211,39	4,43
0,3350	102,950	3,110	0,4850	215,82	4,47
0,3400	106,060	3,140	0,4900	220,29	4,52
0,3450	109,200		0,4950	224,81	

SUITE DE LA TABLE IX.

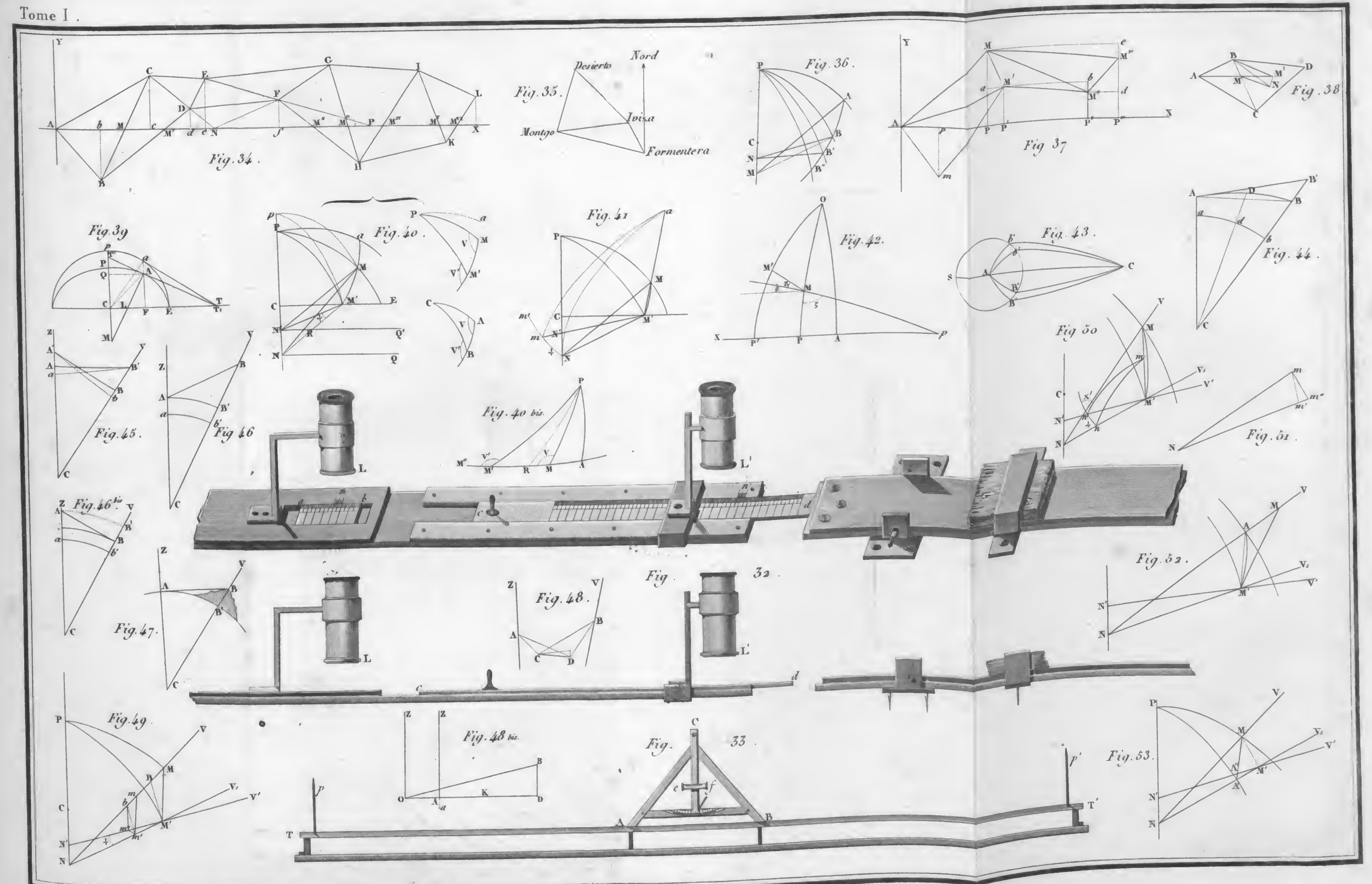
ANGLES de dépression.	HAUTEURS absolues.	DIFFÉR.	ANGLES de dépression.	HAUTEURS absolues.	DIFFÉR.
0^G5000	229^m38		0^G6500	387^m66	
		4,60			5,99
0,5050	233,98		0,6550	393,65	
		4,67			6,03
0,5100	238,65		0,6600	399,68	
		4,70			6,07
0,5150	243,35		0,6650	405,75	
		4,74			6,13
0,5200	248,09		0,6700	411,88	
		4,80			6,17
0,5250	252,89		0,6750	418,05	
		4,84			6,22
0,5300	257,73		0,6800	424,27	
		4,88			6,26
0,5350	262,61		0,6850	430,53	
		4,93			6,32
0,5400	267,54		0,6900	436,85	
		4,99			6,34
0,5450	272,53		0,6950	443,19	
		5,00			6,40
0,5500	277,53		0,7000	449,59	
		5,03			6,46
0,5550	282,56		0,7050	456,05	
		5,17			6,49
0,5600	287,73		0,7100	462,54	
		5,17			6,52
0,5650	292,90		0,7150	459,06	
		5,20			6,59
0,5700	298,10		0,7200	475,65	
		5,25			6,64
0,5750	303,35		0,7250	482,29	
		5,30			6,67
0,5800	308,65		0,7300	488,96	
		5,34			6,72
0,5850	313,99		0,7350	495,68	
		5,40			6,77
0,5900	319,39		0,7400	502,45	
		5,43			6,82
0,5950	324,82		0,7450	509,27	
		5,48			6,85
0,6000	330,30		0,7500	516,12	
		5,54			6,90
0,6050	335,84		0,7550	523,02	
		5,57			6,95
0,6100	341,41		0,7600	529,97	
		5,62			7,00
0,6150	347,03		0,7650	536,97	
		5,67			7,05
0,6200	352,70		0,7700	544,02	
		5,71			7,09
0,6250	358,41		0,7750	551,11	
		5,76			7,13
0,6300	364,17		0,7800	558,24	
		5,81			7,18
0,6350	369,98		0,7850	565,42	
		5,85			7,23
0,6400	375 83		0,7900	572,65	
		5,89			7,28
0,6450	381,72		0,7950	579,92	

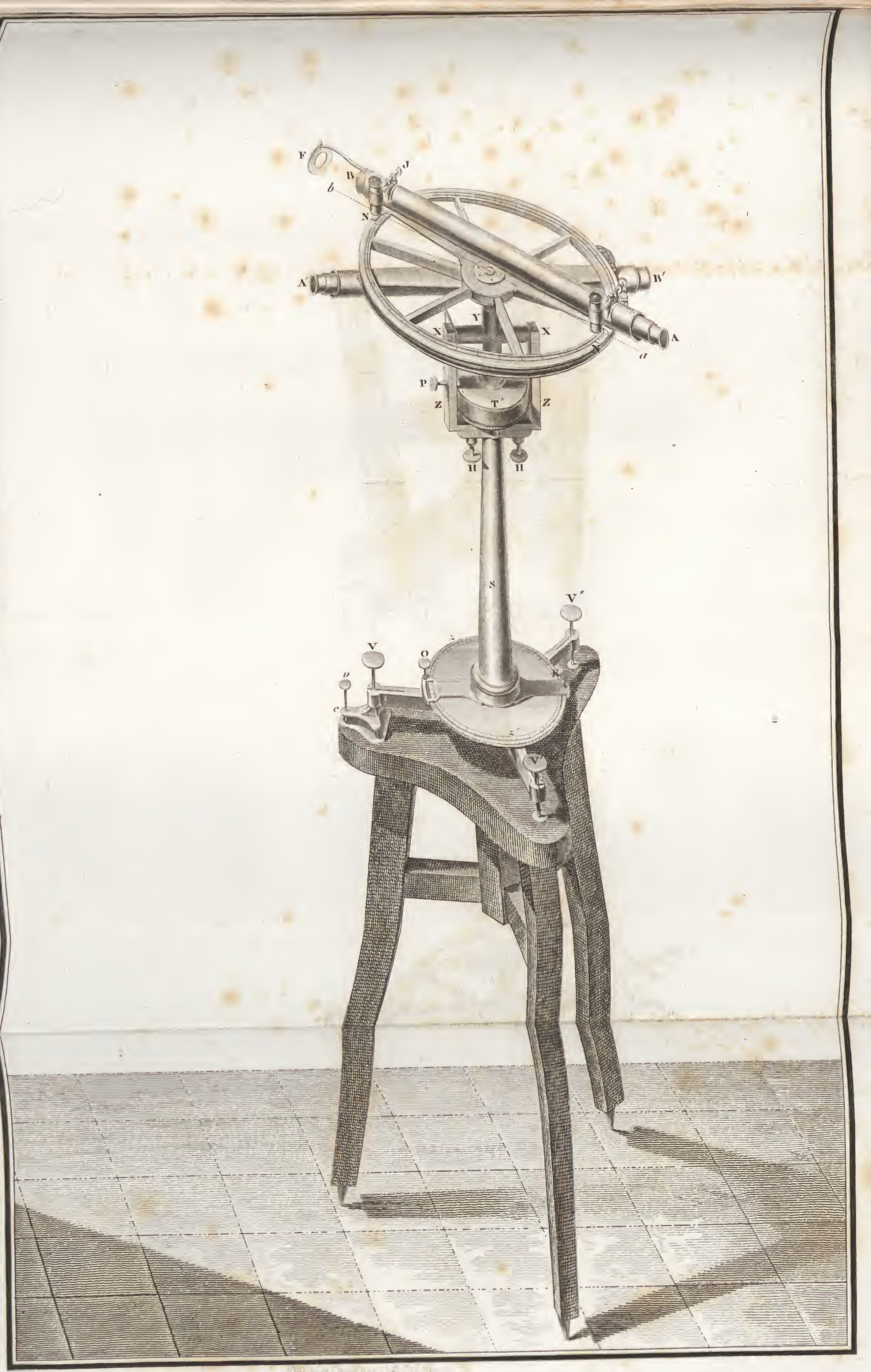
SUITE DE LA TABLE IX.

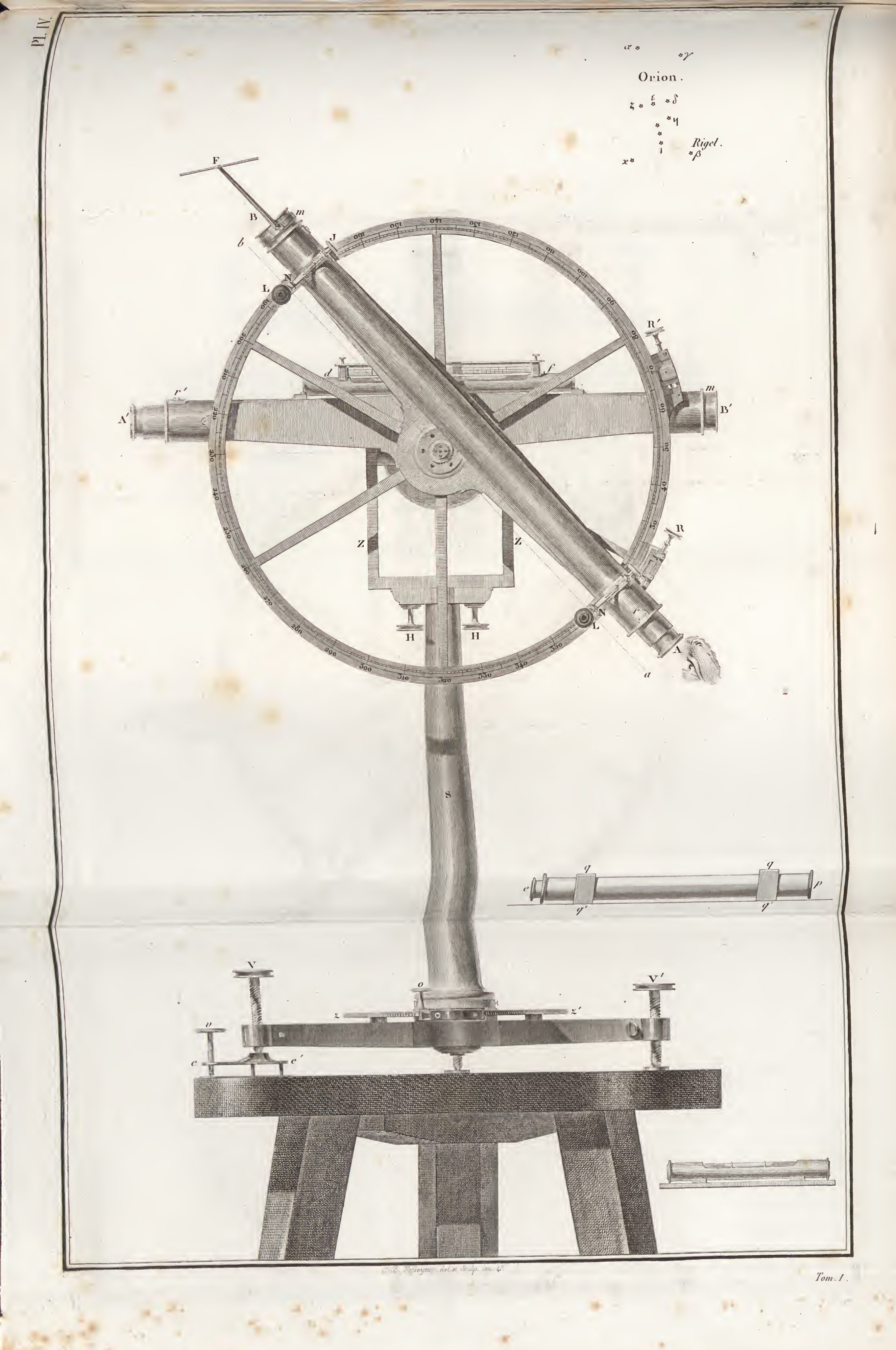
ANGLES de dépression.	HAUTEURS absolues	DIFFÉR.	ANGLES de dépression.	HAUTEURS absolues.	DIFFÉR.
0G8000	587m24	7,32	0G9500	828m14	8,70
0,8050	594,61	7,37	0,9550	836,88	8,74
0,8100	602,02	7,41	0,9600	845,67	8,79
0,8150	609,47	7,46	0,9650	854,50	8,83
0,8200	616,97	7,50	0,9700	863,38	8,88
		7,56			8,93
0,8250	624,53		0,9750	872,31	
0,8300	632,12	7,59	0,9800	881,28	8,97
0,8350	639,76	7,64	0,9850	890,28	9,00
0,8400	647,44	7,68	0,9900	899,35	9,07
0,8450	655,17	7,73	0,9950	908,47	9,12
		7,78			9,15
0,8500	662,95		1,0000	917,62	
0,8550	670,77	7,82	1,0050	926,81	9,19
0,8600	678,63	7,86	1,0100	936,06	9,25
0,8650	686,55	7,92	1,0150	945,34	9,28
0,8700	694,52	7,97	1,0200	954,69	9,35
		8,01			9,39
0,8750	702,53		1,0250	964,08	
0,8800	710,58	8,05	1,0300	973,51	9,43
0,8850	718,67	8,09	1,0350	982,98	9,47
0,8900	726,82	8,15	1,0400	992,50	9,52
0,8950	735,01	8,19	1,0450	1002,08	9,58
		8,23			9,62
0,9000	743,24		1,0500	1011,70	
0,9050	751,53	8,29	1,0550	1021,36	9,66
0,9100	759,86	8,33	1,0600	1031,06	9,70
0,9150	768,23	8,37	1,0650	1040,80	9,75
0,9200	776,64	8,41	1,0700	1050,60	9,80
		8,47			9,85
0,9250	785,11		1,0750	1060,45	
0,9300	793,62	8,51	1,0800	1070,33	9,90
0,9350	802,18	8,56	1,0850	1080,28	9,95
0,9400	810,79	8,61	1,0900	1090,28	10,00
0,9450	819,44	8,65	1,0950	1100,33	10,05

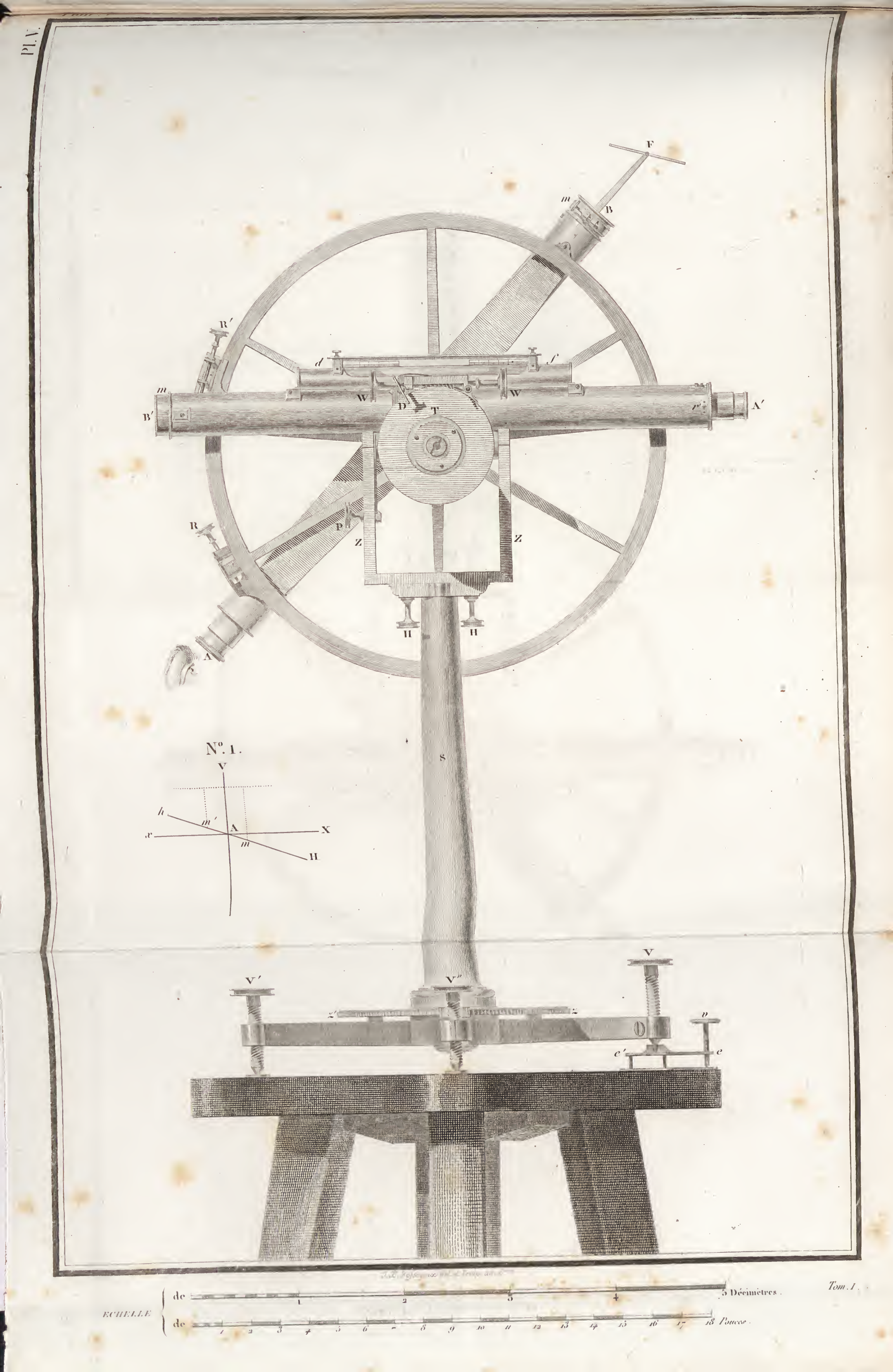

Fig . 1 .
Fig . 2 .
Fig . 3 .
Fig . 4 .
Fig . 5 .
Fig . 6 .
Fig . 7 .
Fig . 8 .
Fig . 9 .
Fig . 10 .
Fig . 11
Fig . 12 .
Fig 13 .
Fig . 14 .
Fig . 15
Fig . 16 .
Fig . 17 .
Fig . 18 .
Fig 19 .
Fig . 20 .
Fig . 21
Fig . 22 .
Fig . 23 .
Fig . 24 .
Nord
Fig . 25 .
Fig . 26 .
Fig . 27 .
Fig . 28 .
Fig . 29
Fig . 30 .
Fig . 31 .

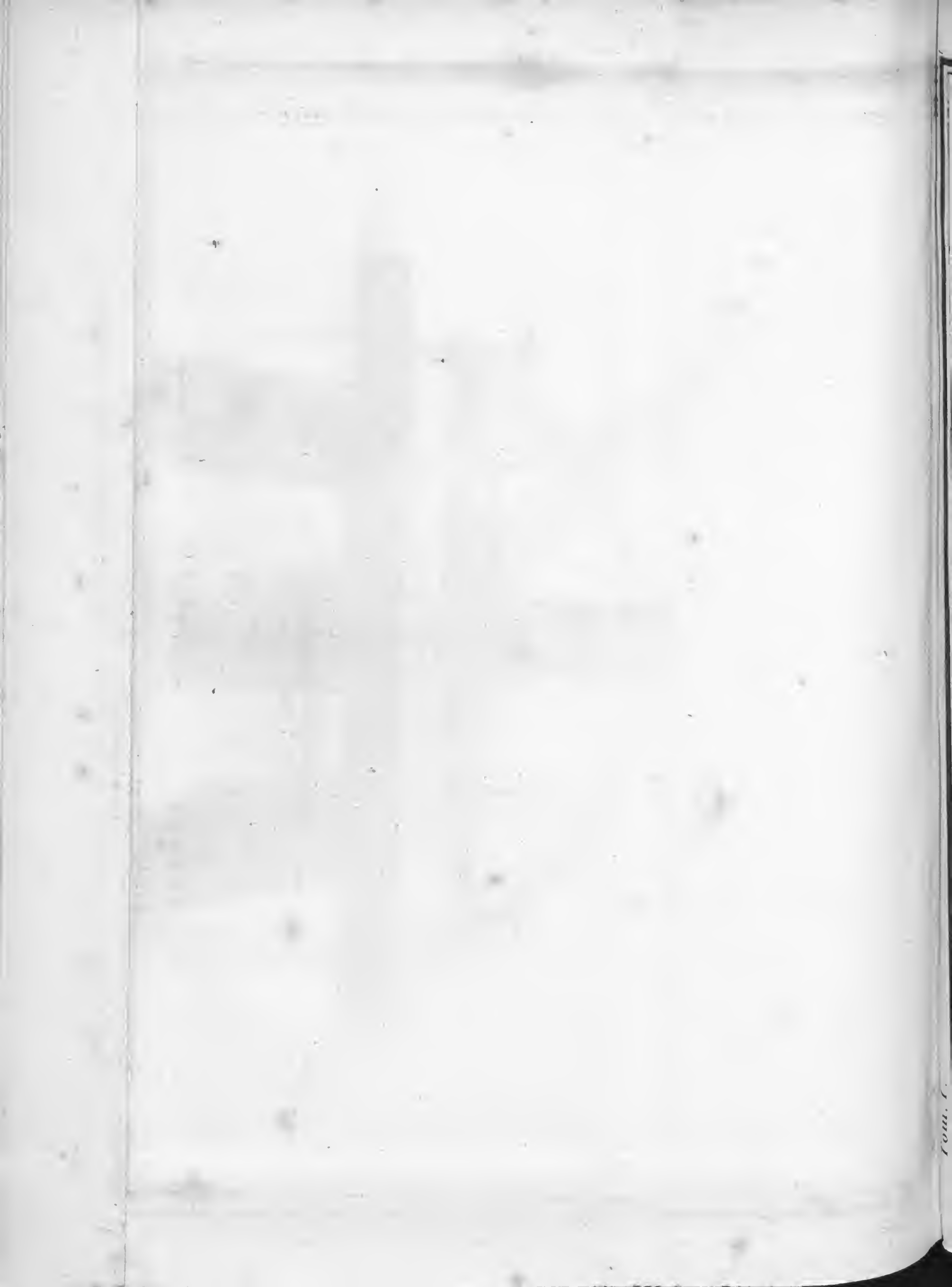



Fig. 34.
Fig. 35.
Desierto
Nord
Ivisa
Montgo
Formentera
Fig. 36.
Fig. 37
Fig. 38
Fig. 39
Fig. 40.
Fig. 41
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46
Fig. 40 bis.
Fig. 50
Fig. 51.
Fig. 46 bis
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 32.
Fig. 52.
Fig. 49
Fig. 48 bis.
Fig. 33.
Fig. 53.

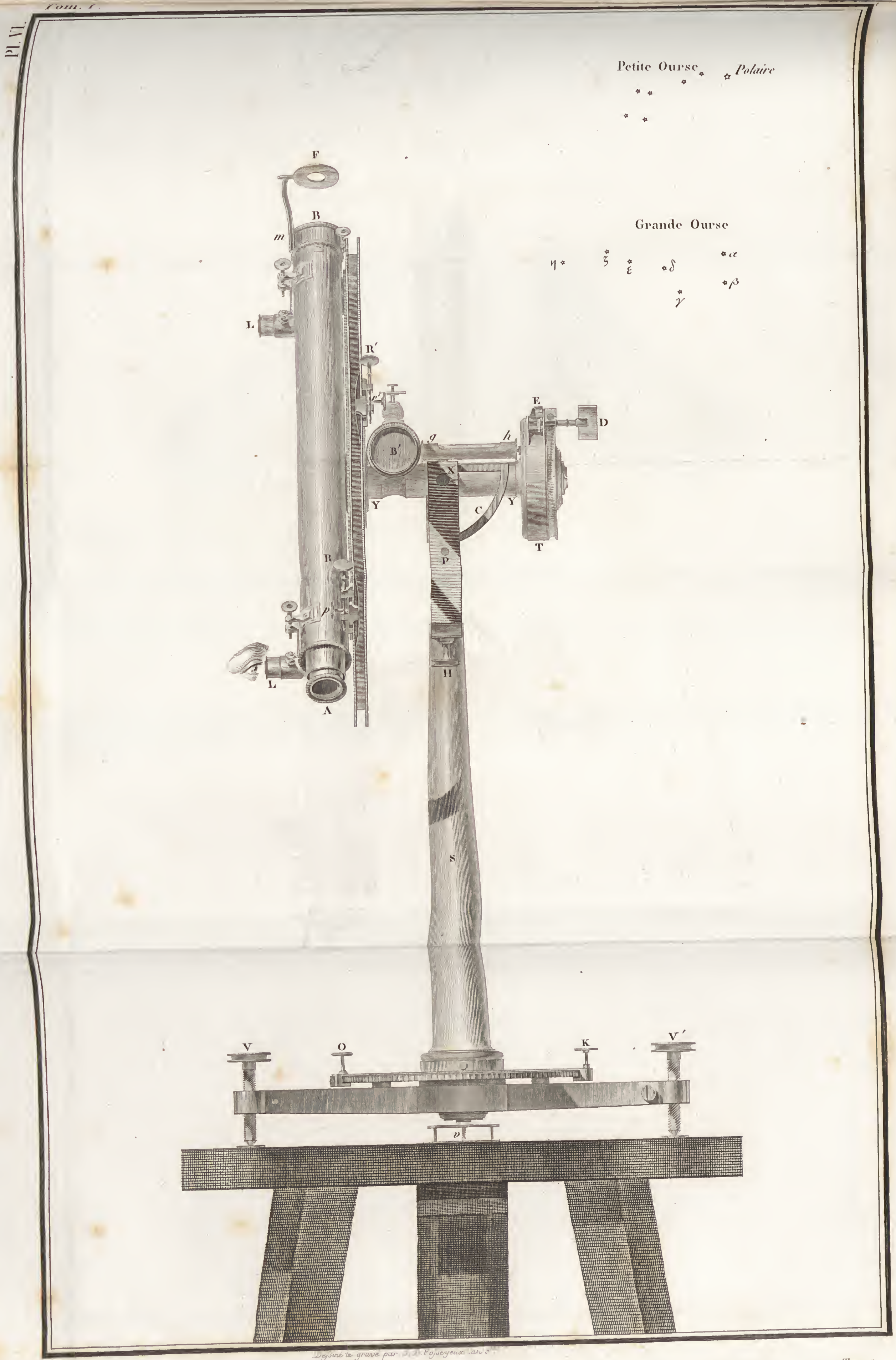

F
B
J
b
N
A′
B′
Y
X
X
A
a
P
T′
Z
Z
H
H
S
V″
V
O
v
c
z′
V′


Orion.
Rigel.
F
B
m
J
b
L
N
R'
d
f
A'
r'
B'
Z
Z
R
H
H
A
a
S
q
q
e
p
q'
q'
V
V'
o
z
z'
v
c
e'


F
B
m
R′
d
f
m
W
W
B′
D
T
r
A′
R
P
Z
Z
A
H
H
N°. 1.
V
h
m′
A
x
X
m
H
S
V
V′
V″
z′
z
v
c′
e
ECHELLE
de
1
2
3
4
5 Décimètres
de
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18 Pouces



Pl. VI.



Dessiné et gravé par [illegible]



N°. 1.

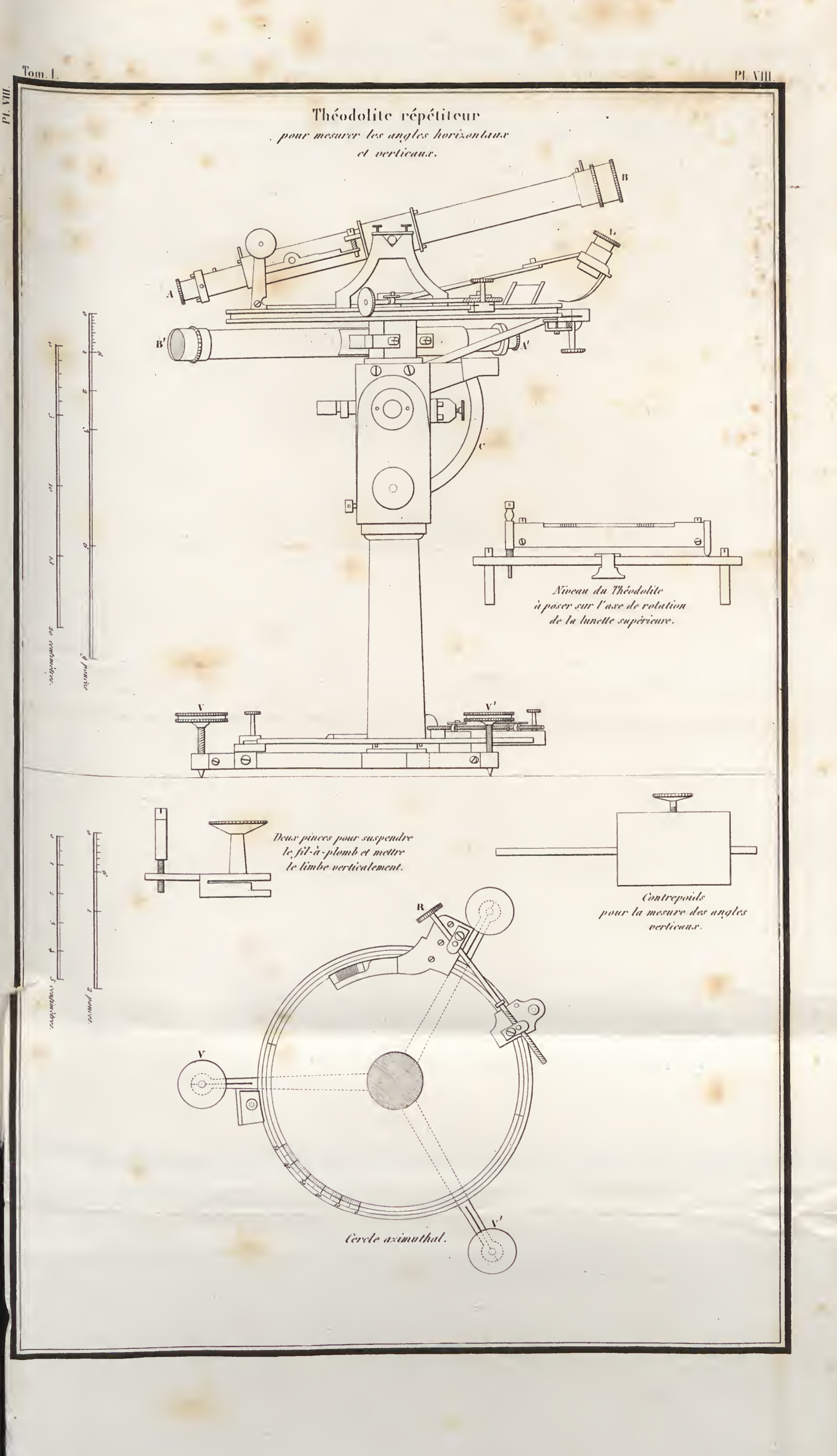
N°. 2.

ECHELLE

de 1 2 3 4 5 6 Décimètres.

de 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 24 Pouces.

J. B. Fossoyeux, del. et Sculp. an 4.


Théodolite répétiteur
pour mesurer les angles horizontaux
et verticaux.
A
B
L
B'
A'
C
V
V'
20 centimètres.
6 pouces
Niveau du Théodolite
à poser sur l'axe de rotation
de la lunette supérieure.
Deux pinces pour suspendre
le fil-à-plomb et mettre
le limbe verticalement.
Contrepoids
pour la mesure des angles
verticaux.
5 centimètres.
2 pouces.
R
V
V'
Cercle azimuthal.

Nord

Senlis

S.t Martin du Tertre

Fig. 1.

Dammartin (Clocher)

S.t Denis

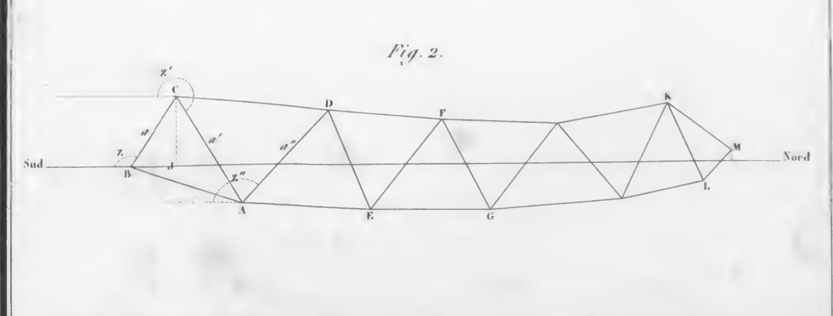
les Alluets

Panthéon

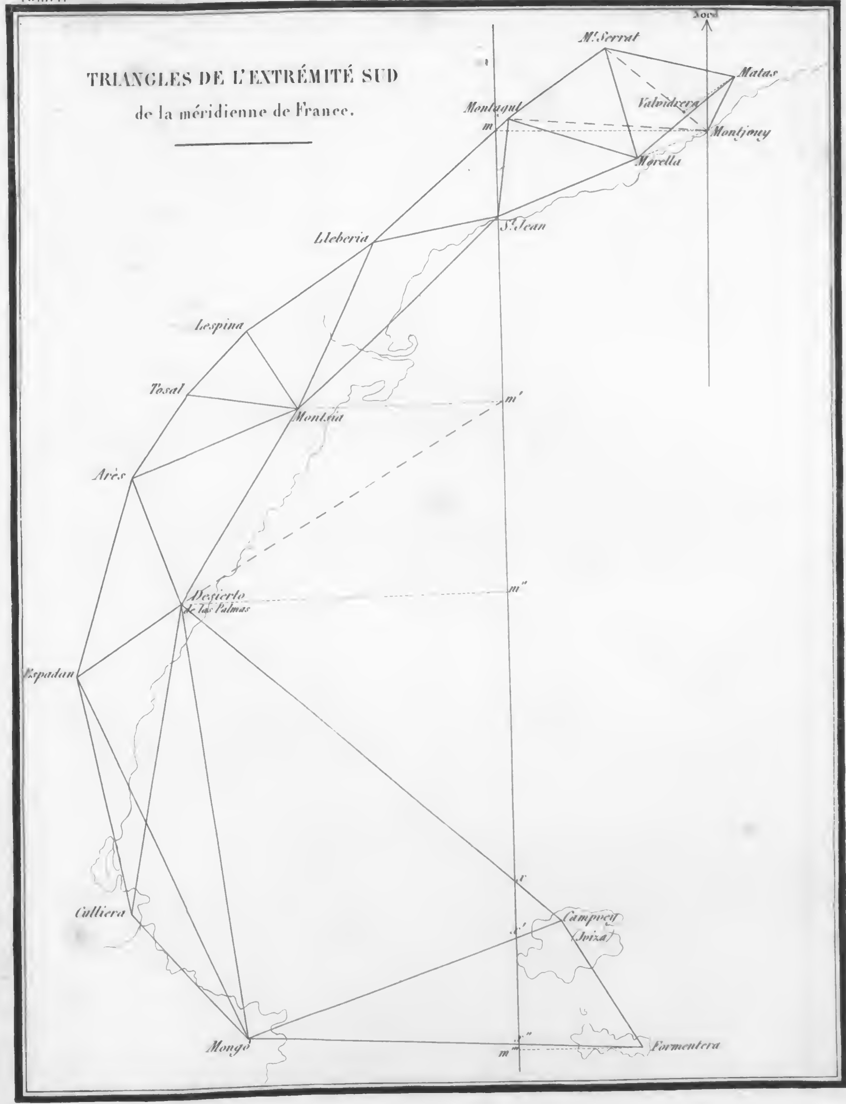
Observatoire

Belle-Assise

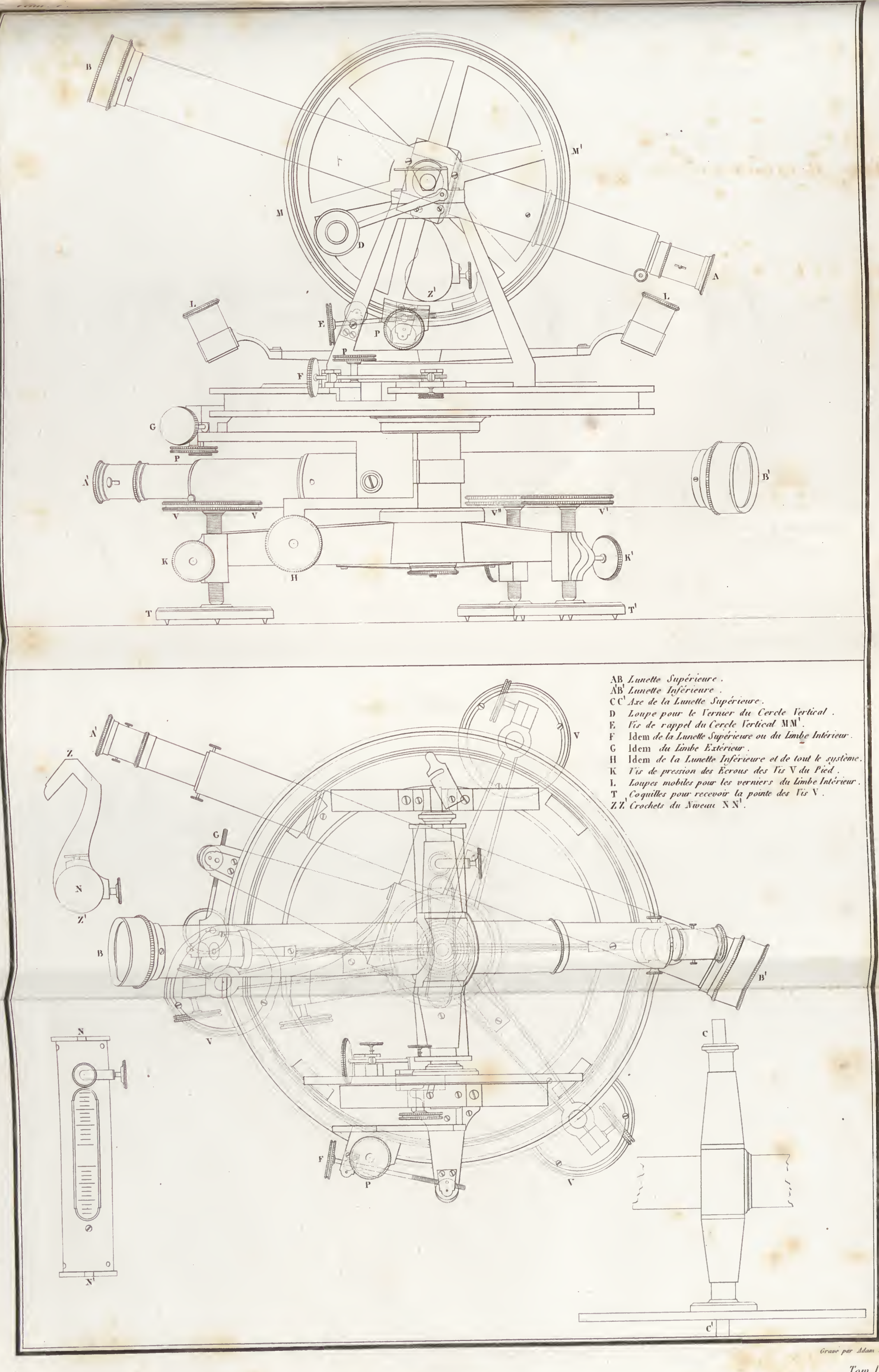
Vélizy






TRIANGLES DE L'EXTRÉMITÉ SUD
de la méridienne de France.
Nord
Mt. Serrat
Matas
Valvidrera
Montagut
m
Montjouy
Morella
St. Jean
Lleberia
Lespina
Tosal
Montsia
m'
Arès
Desierto
de las Palmas
m''
Espadan
Culliera
Campvey
(Iviza)
Mongo
m'''
Formentera




AB Lunette Supérieure.
A'B' Lunette Inférieure.
CC' Axe de la Lunette Supérieure.
D Loupe pour le Vernier du Cercle Vertical.
E Vis de rappel du Cercle Vertical MM'.
F Idem de la Lunette Supérieure ou du Limbe Intérieur.
G Idem du Limbe Extérieur.
H Idem de la Lunette Inférieure et de tout le système.
K Vis de pression des Écrous des Vis V du Pied.
L Loupes mobiles pour les verniers du Limbe Intérieur.
T Coquilles pour recevoir la pointe des Vis V.
Z Z' Crochets du Niveau N N'.
Gravé par Adam.

